

# 小世界网络上螺旋波失稳的研究\*

甘正宁<sup>1,2)</sup> 马 军<sup>3)</sup> 张国勇<sup>1)</sup> 陈 勇<sup>1,4)</sup>

1) 兰州大学理论物理研究所, 兰州 730000)

2) 长沙理工大学电气与信息工程学院, 长沙 410076)

3) (兰州理工大学物理系, 兰州 730050)

4) 兰州大学磁学与磁性材料教育部重点实验室, 兰州 730000)

(2007 年 12 月 7 日收到, 2008 年 1 月 26 日收到修改稿)

利用数值计算和分析, 研究了螺旋波失稳与重联概率  $p$  之间的关系. 通过对基于 FitzHugh-Nagumo 神经元模型的小世界网络的计算和分析, 发现螺旋波的小世界效应失稳具有全局性作用和失稳后再激发作用等特点, 是不同于爱克豪斯(Eckhaus)失稳和多普勒(Doppler)失稳的又一种新的重要失稳方式.

关键词: 螺旋波, 失稳, 小世界网络, 重联概率

PACC: 0545

## 1. 引 言

在斑图动力学的研究领域中, 可激媒质系统螺旋波动力学的研究一直是最为引人注目的课题之一. 螺旋波是在远离热力学平衡态的情况下形成的比较稳定的斑图之一. 与靶波不同, 螺旋波一般不需要持续的激发源, 是自激的. 螺旋波现象广泛存在于生物、物理、化学系统中<sup>[1-3]</sup>. 如化学反应扩散系统中的化学波<sup>[4]</sup>, 一氧化碳在铂金表面的催化氧化反应<sup>[5]</sup>等. 螺旋波不仅出现在激发介质中<sup>[6]</sup>, 而且可以在振荡介质中观测到螺旋波<sup>[7]</sup>. 螺旋波的波头是一类拓扑缺陷<sup>[8]</sup>, 在恰当的初始和参数条件下就可诱发螺旋波的产生. 研究发现, 心率不齐可能与在心肌组织中出现的螺旋波有关, 而且心肌组织中螺旋波失稳后会导致心颤<sup>[8,9]</sup>. 因此, 预防螺旋波的出现和破裂等已成为螺旋波现象研究中的一个热点<sup>[10-17]</sup>. 除从之外, 神经网络(CNN)中的螺旋波现象及其控制也引起了更多学者的关注<sup>[18,19]</sup>. 从数学模型角度看, 一般采用反应扩散方程来对螺旋波的相关特性进行研究, 但在研究神经网络时, 由于需要描述的网络中的状态变量是不同的神经元个体的变量. 因此, 要精确地研究该问题必须采用离散模型. 目前已经存在多种神经元模型, FitzHugh-Nagumo

(FHN)<sup>[20-22]</sup>模型就是其中之一. 神经元的形态多种多样, 但都可分为胞体(soma)和突起(neurite)两部分. 胞体的大小差异很大, 小的直径仅 5—6  $\mu\text{m}$ , 大的可达 100  $\mu\text{m}$  以上, 突起形态、数量和长短也很不相同. 神经元突起又分树突(dendrite)和轴突(axon)两种. 树突多呈树状分支, 它可接受刺激并将冲动传向胞体. 轴突呈细索状, 末端常有分支, 称轴突终末(axon terminal), 轴突将冲动从胞体传向末梢. 通常一个神经元有一个或多个树突, 但轴突只有一条. 一般神经元的胞体越大, 其轴突越长. 最近有实验表明, 神经元的空间联接和分布网络不是空间规则网络, 也不是完全的随机网络, 而更接近于小世界结构<sup>[23-26]</sup>. 因此使用小世界网络模型进行研究更与实际情况相符. 下面将对基于 FHN 神经元方程的小世界网络模型中的螺旋波的稳定存在条件和失稳过程进行研究.

## 2. 小世界网络 FHN 模型

FHN 方程是 Hodgkin-Huxley(H-H)<sup>[27]</sup>神经元方程的一种简化形式. 作为可激媒质系统的典型代表, FHN 模型被广泛地用于神经系统中一些非线性现象的研究, 如平衡点和周期解的稳定性, 平衡点的鞍点分岔和霍普夫分岔. 对于二维离散网格的情况,

\* 国家自然科学基金(批准号: 10305005)资助的课题.

FHN 可以写成以下形式:

$$\frac{du_{i,j}}{dt} = f(u_{i,j}, v_{i,j}) + D_u K(u_{i,j}), \quad (1)$$

式中  $f(u_{i,j}, v_{i,j}) = \varepsilon^{-1}(a - u_{i,j}) \chi(u_{i,j} - 1) \cdot u_{i,j} - \varepsilon^{-1} c \cdot v_{i,j}$ .

$$\frac{dv_{i,j}}{dt} = g(u_{i,j}, v_{i,j}) + D_v K(v_{i,j}), \quad (2)$$

式中  $g(u_{i,j}, v_{i,j}) = b \cdot u_{i,j} - v_{i,j}$ .

这里  $i = 1, 2, \dots, N_1$ ,  $j = 1, 2, \dots, N_2$ .  $D_u$  和  $D_v$  分别是变量  $u$  和  $v$  的耦合系数. 上述方程中的耦合项可以在二维规则网格中即为扩散项, 表示为

$$K(u_{i,j}) = 1/h^2 \cdot (u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1} - 4 \cdot u_{i,j}), \quad (3)$$

$$K(v_{i,j}) = 1/h^2 \cdot (v_{i-1,j} + v_{i+1,j} + v_{i,j-1} + v_{i,j+1} - 4 \cdot v_{i,j}), \quad (4)$$

$u_{i,j}$  是沿神经纤维传播的电压脉冲(兴奋变量), 它对应于 H-H 模型中的快变量.  $v_{i,j}$  是恢复变量, 它对应于 H-H 模型中的其余三个变量. 快变量的反应项是一个三次多项式.

对于小世界网络情况, FHN 二维离散方程的形式为

$$\frac{du_{i,j}}{dt} = f(u_{i,j}, v_{i,j}) + h^{-2} D_u \times \sum_{k,l} c_{i,j,k,l} (u_{k,l} - u_{i,j}) + F_{i,j}, \quad (5)$$

$$\frac{dv_{i,j}}{dt} = g(u_{i,j}, v_{i,j}) + h^{-2} D_v \times \sum_{k,l} c_{i,j,k,l} (v_{k,l} - v_{i,j}), \quad (6)$$

$i = 1, 2, \dots, N_1$ ,  $j = 1, 2, \dots, N_2$ ,  $k = 1, 2, \dots, N_1$ ,  $l = 1, 2, \dots, N_2$ . 而  $c_{ijkl}$  称为单元  $(i, j)$  与单元  $(k, l)$  的联络系数.  $F_{i,j}$  是作用在单元  $(i, j)$  上的外加力.

在小世界网络中, 以重联概率  $p$  为给定二维规则网络重新布线. 由于随机性, 被改写的支路会出现非邻接的远距离连线, 被称为捷径(shortcuts). 如果  $p = 0$ , 则仍为给定的规则二维网络, 也就是说只有当单元  $(k, l)$  与单元  $(i, j)$  相邻接的时候, 才有  $c_{i,j,k,l} = 1$ . 当  $p > 0$  时, 则被随机选中的支路被随机重联, 形成空间小世界网络. 而当  $p = 1$  时, 则形成完全的随机网. Watts 和 Strogatz 指出小世界网络在  $p$  较小时也可以具有很大的群集系数和很短的平均路径, 称为小世界效应. 大量的实验研究表明, 真实网络几乎都具有小世界效应. 如果单元  $(i, j)$  与单元  $(k, l)$  相联, 则  $c_{i,j,k,l} = 1$ , 否则  $c_{i,j,k,l} = 0$ . 我们

采用的是如下的小世界网络的点阵构造算法:

1) 构造好二维规则网络, 并且设定重联数目为  $M$ , 令  $m = 0$ ;

2) 在 1 到  $N$  中随机选取两个数  $i, j$ .

3) 如果  $c_{i,j,i+1,j} = 1$ , 或者  $c_{i,j,i-1,j} = 1$ , 或者  $c_{i,j,i,j+1} = 1$ , 或者  $c_{i,j,i,j-1} = 1$ , 则在 1 到  $N$  中随机选取两个数  $k, l$ , 单元  $(i, j)$  与单元  $(k, l)$  不相邻, 并令  $c_{i,j,k,l} = 1$ .

随机地选择  $c_{i,j,i+1,j}$ ,  $c_{i,j,i-1,j}$ ,  $c_{i,j,i,j+1}$  和  $c_{i,j,i,j-1}$  四个联络系数为 1 的一个, 并使这个联络系数为 0.

$$m = m + 1.$$

否则, 执行步骤 2.

4) 如果  $m < M$ , 执行步骤 2.

5) 停止.

在本文中, 选取  $0 < a < 1$ ,  $b > = 0$ ,  $D_v \ll D_u$ ,  $\varepsilon \ll 1$ , 则方程 (5) 和 (6) 可以描述神经元的可激媒质特性. 如无特殊说明, 方程可采用无流边界条件<sup>[16-18]</sup>. 模型参数为  $N_1 = N_2 = 200$ , 时间步长  $dt = 0.01$ , 空间步长  $h = 0.5$ ,  $a = 0.0875$ ,  $b = 1.0$ ,  $\varepsilon = 0.04$ ,  $c = 0.225$ ,  $D_u = 1$ ,  $D_v = 0$ ,  $F_{i,j} = 0$ . 这里下标  $i, j = 1, 2, \dots, 200$ . 方程采用无流边界条件. 在二维规则网络中, 给定合适的初始条件, 采用改进的欧拉法进行计算, 便可在区域中得到螺旋波.

### 3. 小世界网络中螺旋波的失稳过程及其与重联概率 $p$ 的关系

螺旋波的失稳是相当复杂的系统动态现象, 如机械外力引起的螺旋波破裂导致的失稳<sup>[28]</sup>, 文献 [29] 进一步研究了局部弱驱动下螺旋波控制和预防螺旋波破裂失稳问题. 目前, 人们从理论和实验中发现和认识的螺旋波失稳主要有爱克豪斯(Eckhaus)失稳和多普勒(Doppler)失稳两种<sup>[30, 31]</sup>. 爱克豪斯失稳是系统从有序的螺旋波态到无序的缺陷湍流态的一种失稳机理. 爱克豪斯失稳属于相螺旋波的长波失稳, 往往首先发生在边界处. 人们知道心脏中的心肌电信号的传播属于可激发系统的行波, 因此爱克豪斯失稳不能解释心脏中的心颤现象. 多普勒失稳首先发生在波头附近, 这主要是由于当螺旋波的波尖做“漫游”运动时, 由于多普勒效应, 在螺旋波端点运动方向前面的行波被压缩, 在螺旋波端点运动方向后面的行波被伸长, 不断产生新的缺陷点, 使每

个小螺旋波都发展不起来.系统中的点缺陷数目迅速增加以至饱和,最终达到湍流态.

我们研究发现小世界效应引起的螺旋波失稳既不是从波头开始,也不是从边界开始,而是在空间的全方位进行的.螺旋波首尾各处长程连线的耦合作用下,断裂成许多片段,最终使螺旋波结构被破

坏.暂且把这种全局性的螺旋波失稳称为螺旋波的小世界效应失稳.

在小世界网络中,螺旋波的失稳是与重联概率  $p$  密切相关的.基于本模型的数值计算表明在单位时间为 7 时已形成稳定的螺旋波.在单位时间为 10 时,按重联概率  $p$  改变网络的结构.

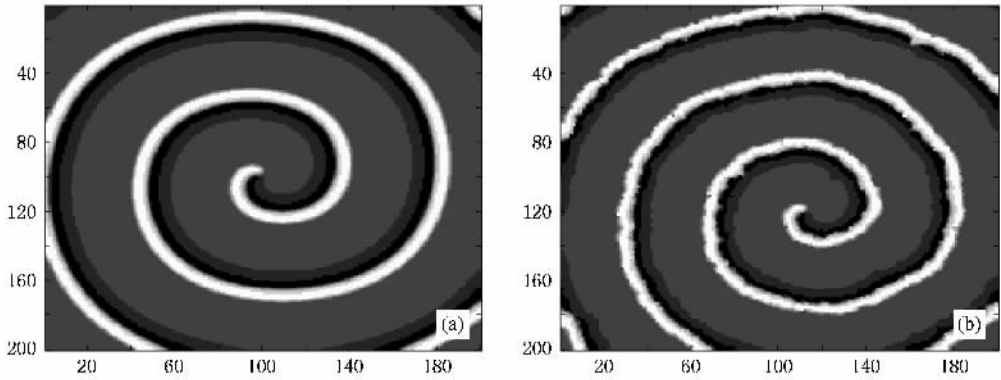


图 1 重联概率  $p = 0.125$  时快变量  $u_{i,j}$  在  $200 \times 200$  的网格中随着时间的变化 (a)(b) 分别对应 10, 80 时间单位

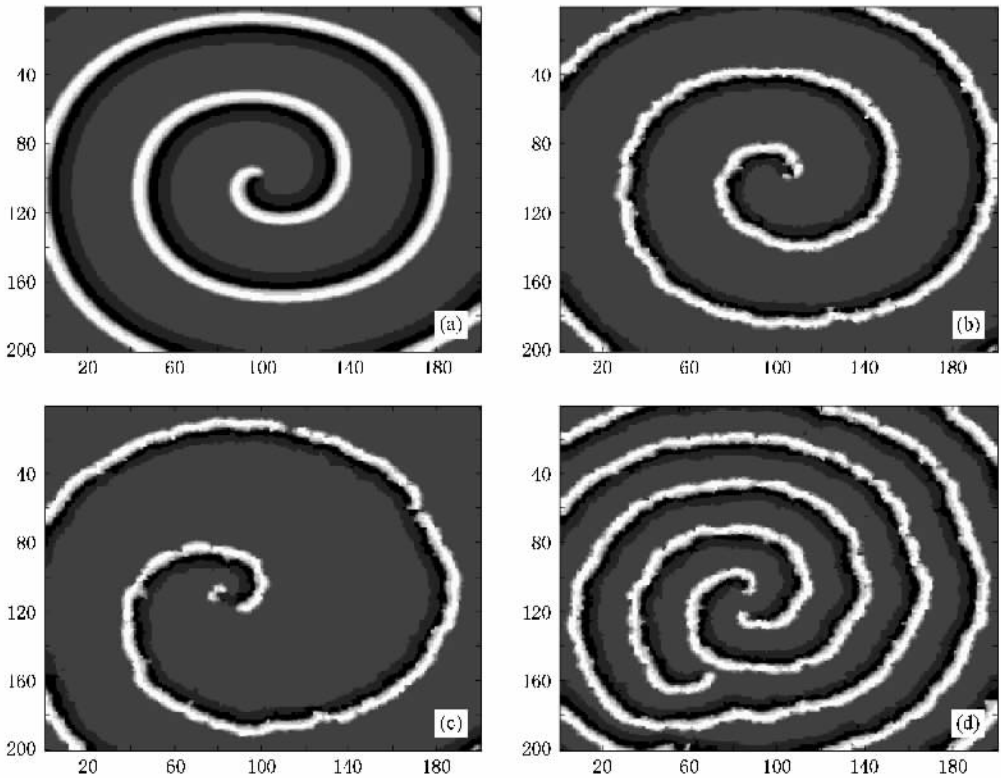


图 2 重联概率  $p = 0.162$  时快变量  $u_{i,j}$  在  $200 \times 200$  的网格中随着时间的变化 (a)(b)(c)(d) 分别对应 10, 11, 30, 40 时间单位

计算和分析结果表明在重联概率  $p$  较小时不会导致螺旋波的失稳.如在图 1 中,重联概率  $p = 0.125$ ,在此条件下可以稳定存在.即使在单位时间

为 80 时也只不过使螺旋波的轮廓变得稍微模糊些而已(图 1(b)).

随着重联概率  $p$  的增加,螺旋波虽然还能稳定

存在,但轮廓变得越来越模糊.当重联概率  $p = 0.162$  时,通过图 2 的截图不难发现在时间单位为 11 时螺旋波的轮廓已经变得模糊(图 2(b)),在时间单位为 30 时螺旋波已经失稳,并且多处断裂(图 2(c)).但在时间单位为 40 时又出现许多新的斑图和波纹(图 2(d)).这种斑纹是带有湍流性质的片段螺旋波.这显然是由螺旋波失稳后长程连接再激发作用引起的.图 3 显示了快变量  $u_{i,j}$  的平均值  $U$  随时间变化的规律.第一阶段从时间单位 0 到 7,是由初始条件演化出稳定的螺旋波的过程.可以发现这时快变量平均值  $U$  在此阶段迅速增加.第二阶段,时间单位为 7 到 10 时,是螺旋波稳定存在的阶段.此阶段  $U$  值基本保持恒定.第三阶段是从时间单位 10 开始到 30 为止.对应的是螺旋波的迅速失稳过程.第四阶段在时间单位在 30 到 40 之间,是螺旋波失稳后的再激发过程,快变量平均值  $U$  迅速上升.第五阶段在时间单位 40 之后,形成较稳定的带有湍流性质的片段螺旋波,故  $U$  值基本保持不变.

继续增大重联概率  $p$  并进行分析和计算.当取重联概率  $p = 0.25$  时,如图 4 所示,经历大约 11 个时间单位后螺旋波已经失稳,并且多处断裂(图 4

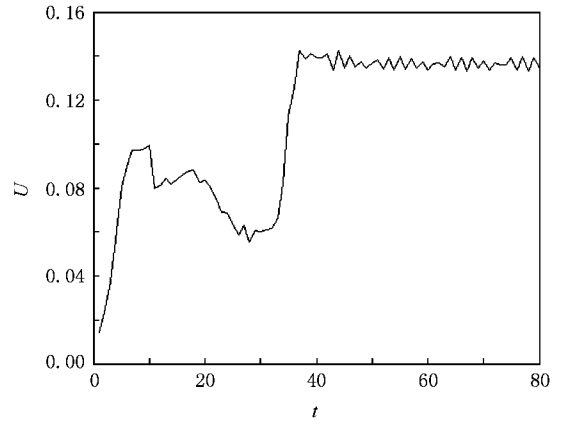


图 3 重联概率  $p = 0.162$  时快变量  $u_{i,j}$  的平均值  $U$  随时间的变化

(b)).在时间单位为 15 时激发态导致的斑纹所占区域达到最小值(图 4(c)).但在时间单位为 40 时又出现许多新的斑图和波纹(图 4(d)).这种斑纹已经不是带有湍流性质的片段螺旋波,而是略带有片段螺旋波性质的湍流.长程连接引起的螺旋波失稳后的再激发作用更加强烈.快变量  $u_{i,j}$  的平均值  $U$  随时间的变化如图 5 所示.从图中不难发现在超过 10 时间单位后  $U$  值迅速下降,对应的是螺旋波的迅速

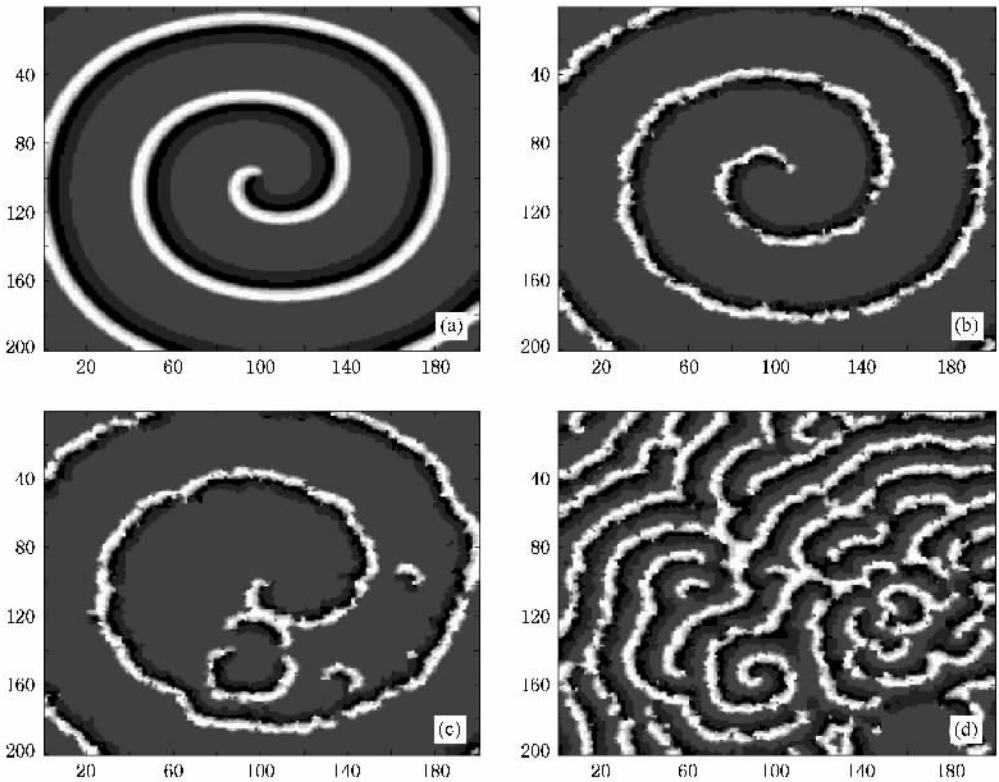


图 4 重联概率  $p = 0.25$  时快变量  $u_{i,j}$  在  $200 \times 200$  的网格中随时间的变化 (a)(b)(c)(d) 分别对应 10, 11, 15, 40 时间单位

失稳过程. 在 15 到 80 时间单位之间是螺旋波失稳后的再激发过程, 快变量平均值  $U$  迅速上升. 在 40 时间单位之后形成在  $U = 0.2$  附近震荡. 这显然不是稳定的带有湍流性质的片段螺旋波, 而是略带有片段螺旋波性质的湍流.

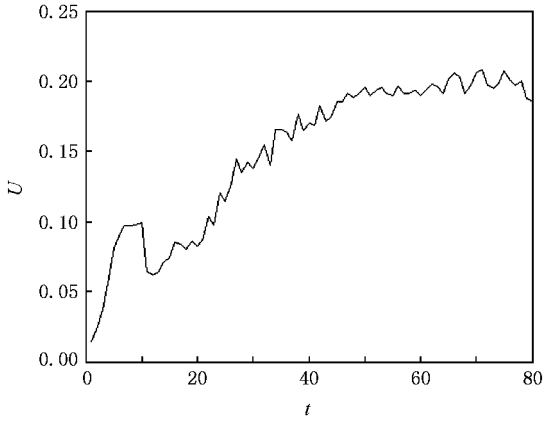


图 5 重联概率  $p = 0.25$  时快变量  $u_{i,j}$  的平均值  $U$  随时间的变化

当重联概率  $p$  增大到 0.375 时, 在 11 时间单位时螺旋波已经迅速失稳, 并且断裂成碎片, 如图 6

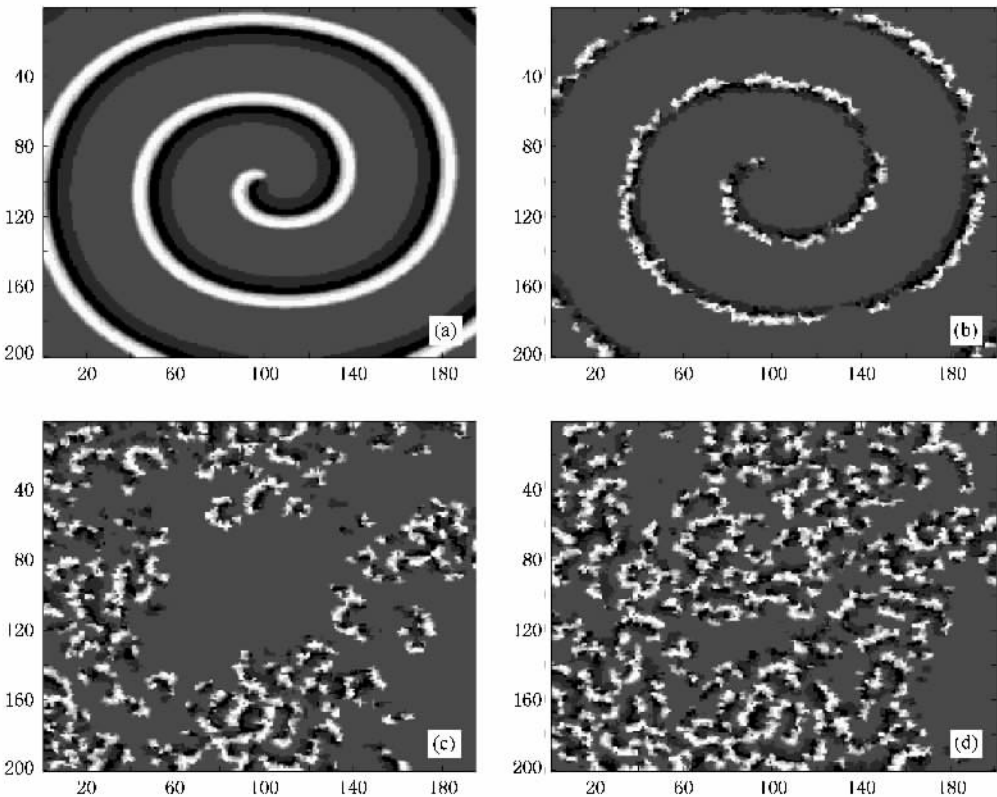


图 6 重联概率  $p = 0.375$  时快变量  $u_{i,j}$  在  $200 \times 200$  的网格中随时间的变化 (a)(b)(c)(d) 分别对应 10, 11, 40, 80 时间单位

(b) 所示. 在 40 和 80 时间单位已经变为完全的湍流碎片或混沌态, 如图 6(c)(d) 所示, 这仍然是长程连接引起的螺旋波失稳后的再激发作用的结果. 从图 7 快变量  $u_{i,j}$  的平均值  $U$  随时间的变化的规律中更能体会到这一点. 从图中不难发现在超过 10 时间单位后  $U$  值迅速下降, 对应的是螺旋波的迅速失稳过程. 在 15 到 80 时间单位之间是螺旋波失稳后的再激发过程, 快变量平均值  $U$  迅速上升, 但波动很大. 这显然不是稳定的带有湍流性质的片段螺旋波, 也不是略带有片段螺旋波性质的湍流, 而是完全的湍流碎片或混沌态<sup>[15]</sup>.

图 1 到图 7 反映了不同重联概率和参数条件下螺旋波的演化. 进一步的数值计算表明: 当重联概率  $p < p_c = 0.162$  时螺旋波不会破裂和失稳. 当重联概率  $p \geq 0.162$  时, 螺旋波会迅速失稳和断裂, 然后又出现螺旋波失稳后的再激发过程. 结果分析表明, 在  $0.162 \leq p < 0.25$  时, 螺旋波失稳后再激发产生带有湍流性质的片段螺旋波; 在  $0.25 \leq p < 0.375$  时, 螺旋波失稳后再激发产生带有片段螺旋波性质的湍流;  $p \geq 0.375$  时, 螺旋波失稳后将再激发产生碎片状湍流或混沌态, 而且随着  $p$  的增大湍流的混乱程

度增加.

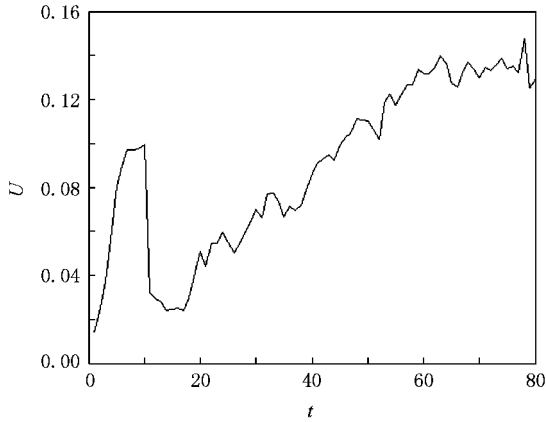


图7 重联概率  $p = 0.375$  时变量  $u_{i,j}$  的平均值  $U$  随时间的变化

## 4. 结 论

基于 FHN 神经元模型,我们研究并分析了小世

界网络中螺旋波的诱导和失稳过程.通过理论分析和数值计算表明,螺旋波的小世界效应失稳不同于两种常见的螺旋波失稳方式:爱克豪斯失稳和多普勒失稳,而是一种新的失稳方式.小世界效应失稳的主要特点是:1)螺旋波的失稳与小世界网络的重联概率  $p$  有关, $p$  必须大于某个定值  $p_c$ ,螺旋波的失稳才会发生.2)螺旋波的失稳和断裂是在全局范围内随机产生的.3)螺旋波的失稳速度随重联概率  $p$  的增加而增加.4)螺旋波失稳后会产生斑图的再激发过程.再激发过程中产生的斑图随着重联概率  $p$  的增加依次为带有湍流性质的片段螺旋波,带有片段螺旋波性质的湍流,湍流和混沌等.这些新斑图的产生主要是长程连接再激发作用的结果.5)螺旋波失稳后的通过再激发作用所产生的新的斑图或湍流碎片使得可激媒质中的快变量的平均值高于失稳前的平均值.

- [ 1 ] Winfree A T 1987 *When Time Breaks Down* ( Princeton University Press , Princeton , NJ )
- [ 2 ] Winfree A T 2001 *The Geometry of Biological Time* 2nd ed ( Springer-Verlag , Berlin )
- [ 3 ] Mikhailov A S , Showalter K 2006 *Phys. Rep.* **425** 79
- [ 4 ] Winfree A T 1972 *Science* **175** 634
- [ 5 ] Bär M ,Gottschalk N , Eiswirth M , Ertl G 1994 *J. Chem. Phys.* **100** 1202
- [ 5 ] Hildebrand M , Bär M , Eiswirth M 1995 *Phys. Rev. Lett.* **75** 1503
- [ 6 ] Cross M C , Hohenberg P 1993 *Rev. Mod. Phys.* **65** 851
- [ 7 ] Mermin N D 1979 *Rev. Mod. Phys.* **51** 591
- [ 8 ] Nash M P , Panfilov A V 2004 *Progr. Biophys & Molec. Biol.* **85** 501
- [ 9 ] Holden A V 1997 *Nature* **387** 655
- [ 10 ] Wang P Y , Xie P , Yin H W 2003 *Chin. Phys.* **12** 647
- [ 11 ] Xiao J H , Hu G , Zhang H *et al* 2005 *Europhys. Lett.* **69** 29
- [ 12 ] Ma J , Pu Z S , Feng W J , Li W X 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 4602 ( in Chinese ) 马 军、蒲忠胜、冯旺军、李维学 2005 物理学报 **54** 4602 ]
- [ 13 ] Ma J , Ying H P , Li Y L 2007 *Chin. Phys.* **16** 955
- [ 14 ] Ma J , Jin W Y , Li Y L , Chen Y 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 2456 ( in Chinese ) 马 军、靳伍银、李延龙、陈 勇 2007 物理学报 **56** 2456 ]
- [ 15 ] He X Y , Zhang H , Hu B B *et al* 2007 *New J. Phys.* **9** 66
- [ 16 ] Ma J , Jin W Y , Yi M , Li Y L 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 2832 ( in Chinese ) [ 马 军、靳伍银、易 鸣、李延龙 2008 物理学报 **57** 2832 ]
- [ 17 ] Liu F C , Wang X F , Li X C *et al* 2007 *Chin. Phys.* **16** 2640
- [ 18 ] Hu G , Xiao J H , Chua L O 1998 *Phys. Rev. Lett.* **80** 1884
- [ 19 ] Pivka L 1995 *IEEE Trans. Circuits Syst. I* **42** 638
- [ 20 ] Koch C 1999 *In Biophysics of Computation* ( Oxford University Press , New York )
- [ 21 ] Glass L , Hunter P , McCulloch A 1991 *Theory of Heart* ( Springer-Verlag , New York )
- [ 22 ] Dauby P C , Desai T , Croisier H *et al* 2006 *Phys. Rev. E* **73** 021908
- [ 23 ] Wasserman S , Faust K 1994 *Social Network Analysis* ( Cambridge : Cambridge University Press )
- [ 24 ] Watts D J 1999 *Small Worlds : The Dynamics of Networks Between Order and Randomness* ( Princeton University Press , Princeton , NJ )
- [ 25 ] He D H , Hu G , Zhan M *et al* 2002 *Phys. Rev. E* **65** 55204
- [ 26 ] Shefi O , Golding I , Segev R 2002 *Phys. Rev. E* **66** 021905
- [ 27 ] Hodgkin A L , Huxley A F 1952 *J. Physiol. ( London , U. K. )* **117** 500
- [ 28 ] Zhang H , Ruan X S , Hu B B *et al* 2004 *Phys. Rev. E* **70** 016212
- [ 29 ] Li B W , Sun L L , Chen B *et al* 2007 *Chin. Phys. Lett.* **24** 2415
- [ 30 ] Fenton F H , Cherry E M , Hastings H M *et al* 2002 *Chaos* **12** 852
- [ 31 ] Yang J Z , Xie F G , Qu Z L 2003 *Phys. Rev. Lett.* **91** 148302

# Instability of spiral wave in small-world networks<sup>\*</sup>

Gan Zheng-Ning<sup>1,2)</sup> Ma Jun<sup>3)</sup> Zhang Guo-Yong<sup>1)</sup> Chen Yong<sup>1,4)</sup>

1) *Institute of Theoretical Physics, Lanzhou University, Lanzhou 730000, China*

2) *College of Electronic and Information Engineering, Changsha University of Science & Technology, Changsha 410076, China*

3) *Department of Physics, Lanzhou University of Technology, Lanzhou 730050, China*

4) *Key Laboratory for Magnetism and Magnetic materials of the Ministry of Education, Lanzhou University, Lanzhou 730000, China*

( Received 7 December 2007 ; revised manuscript received 26 January 2008 )

## Abstract

Using a FitzHugh-Nagumo system as an example, we studied the stabilities of spiral waves in two-dimensional small-world network. It was found that there exists a critical rewiring probability  $p$  such that the spiral instability appears for  $p > p_c$  due to the small-world connectivity. It was also confirmed that this spiral instability is different from the Eckhaus instability and the Doppler instability.

**Keywords** : spiral wave, instability, small-world networks, rewiring probability

**PACC** : 0545

<sup>\*</sup> Project supported by the National Natural Science of Foundation of China ( Grant Nos. 10305005 ).