

一个新分数阶超混沌系统及其混沌同步*

周 平† 程雪峰 张年英

(重庆邮电大学应用物理研究所, 重庆 400065)

(重庆邮电大学非线性系统研究所, 重庆 400065)

(2007 年 12 月 25 日收到, 2008 年 1 月 19 日收到修改稿)

给出了一个新的分数阶超混沌系统, 利用严格数学理论实现了该分数阶超混沌系统的混沌同步, 在同步过程中并未删除响应系统的非线性项, 理论分析与仿真计算表明了同步方法的有效性.

关键词: 分数阶超混沌系统, 混沌同步, 非线性项

PACC: 0545

1. 引 言

300 多年前, 数学工作者已经对分数阶微积分展开了纯理论性的研究, 但是在相当长的时间内并未有太多实际应用^[1,2]. 近十几年来, 在松弛、振荡、湍流、控制等领域得到了广泛应用. 特别是近年来, 分数阶动力系统的混沌现象研究引起了人们的广泛兴趣, 人们在研究 Chua's 混沌电路、Chen 混沌系统以及 Rössler 混沌和超混沌系统等混沌系统的过程中发现, 当 Chua's 混沌电路系统^[1]的阶数低至 2.7, Chen 混沌系统^[3]的分数阶低至 0.3, Rössler 混沌系统^[4]的分数阶低至 2.4, 超混沌 Rössler 系统^[4]的分数阶低至 3.8 时, 上述系统仍然有混沌现象. 大量研究表明^[1-7], 当混沌系统的阶数为分数时仍然出现混沌现象, 并且更能反映系统的工程物理现象, 从而促进了分数阶混沌系统的研究以及分数阶微积分理论的发展.

然而, 在已有的分数阶混沌系统控制和同步研究的数值计算过程中, 大多采用的是在工程应用上经常使用的时域与复频域转换法^[1-10], 即通过求解复频域的 $1/s^a$, 得到复频域的展开形式, 再将复频域形式转化为时域形式进行数值求解. 本文给出了一个新的分数阶混沌系统, 同时, 实现了这个新分数阶超混沌系统的混沌同步, 在同步过程中并未删去响应系统的非线性项, 这和很多完全删除响应系统的

非线性项的分数阶混沌系统的同步方法^[1-4,7,8,10]是不同的. 进一步, 在数值研究过程中, 并未采用在工程应用上常用的时域与复频域转换法, 而是直接用时域进行数值计算.

2. 分数阶系统的时域数值计算

文献 [11] 关于分数阶系统的时域计算, 研究如下分数阶系统:

$$\begin{aligned} d^{q_1} x/dt^{q_1} &= f(x, y), \\ d^{q_2} y/dt^{q_2} &= g(x, y), \end{aligned} \quad (1)$$

其中 x, y 为系统变量且是实数, $0 < q_1, q_2 \leq 1$ 为分数阶. 设 $t = 0$ 时, 系统初始条件为 (x_0, y_0) , 文献 [11] 给出了系统 (1) 的数值解差分公式如下:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_0 + \frac{h^{q_1}}{\Gamma(q_1 + 2)} \left[f(x_{n+1}^p, y_{n+1}^p) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=0}^n \alpha_{1,j,n+1} f(x_j, y_j) \right], \\ y_{n+1} &= y_0 + \frac{h^{q_2}}{\Gamma(q_2 + 2)} \left[g(x_{n+1}^p, y_{n+1}^p) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=0}^n \alpha_{2,j,n+1} g(x_j, y_j) \right], \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} x_{n+1}^p &= x_0 + \frac{1}{\Gamma(q_1)} \sum_{j=0}^n \beta_{1,j,n+1} f(x_j, y_j), \\ y_{n+1}^p &= y_0 + \frac{1}{\Gamma(q_2)} \sum_{j=0}^n \beta_{2,j,n+1} g(x_j, y_j), \end{aligned}$$

* 重庆市教育委员会基金(批准号: KJ070502)资助的课题.

† E-mail: zhouping@cqupt.edu.cn

$$\alpha_{i,j,n+1} = \begin{cases} n^{q_i+1} - (n - q_i)(n+1)^{q_i}, & j = 0, \\ (n - j + 2)^{q_i+1} + (n - j)^{q_i+1} - 2(n - j + 1)^{q_i+1}, & 1 \leq j \leq n, \\ 1, & j = n + 1, \end{cases}$$

$$\beta_{i,j,n+1} = \frac{h^{q_i}}{q_i} [(n - j + 1)^{q_i} - (n - j)^{q_i}], \quad 0 \leq j \leq n,$$

$i = 1, 2$. 数值计算总时间设为 T , 迭代次数为 N , 则步长为 $h = T/N$. $n = 0, 1, 2, \dots, N$, $t_n = nh$. 这种数值计算逼近的最大误差为

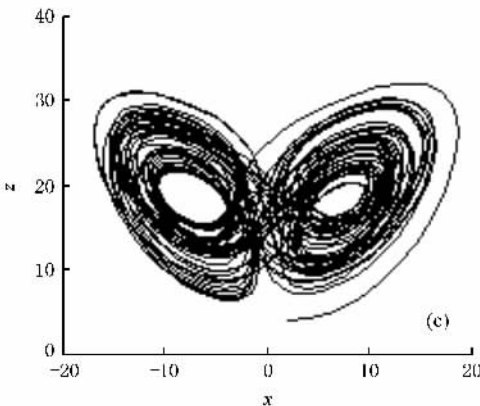
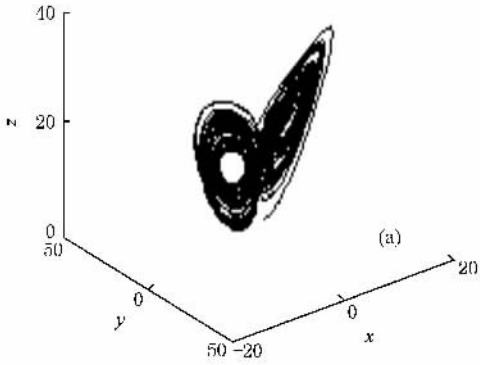
$$|x(t_n) - x_n| = O(h^{p_1}), p_1 = \min(2, 1 + q_1);$$

$$|y(t_n) - y_n| = O(h^{p_2}), p_2 = \min(2, 1 + q_2).$$

文献 [11] 用上述方法研究了分数阶 Chen 混沌系统的混沌现象, 并得到了较好结果. 本文所有的数值计算将采用文献 [11] 的时域计算方法.

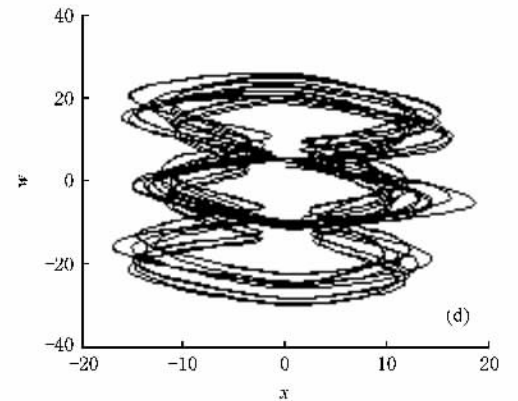
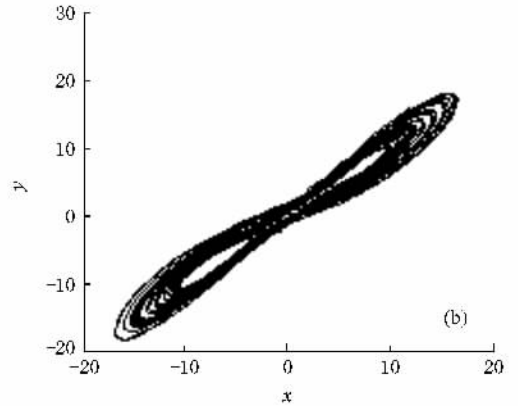
3. 一个新的分数阶超混沌系统

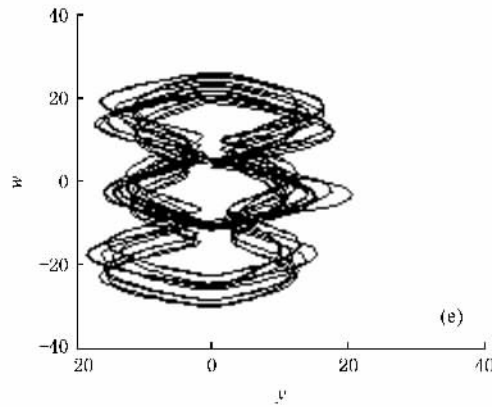
研究如下分数阶动力系统:



$$\begin{aligned} d^{q_1} x_1 / dt^{q_1} &= 3(x_2 - x_1), \\ d^{q_2} x_2 / dt^{q_2} &= 7x_1 + 12x_2 - x_1 x_3 + x_4, \\ d^{q_3} x_3 / dt^{q_3} &= x_1 x_2 - 3x_3, \\ d^{q_4} x_4 / dt^{q_4} &= -5x_1, \end{aligned} \quad (2)$$

其中 $0 < q_1, q_2, q_3, q_4 \leq 1$ 为分数阶. 当 $q_i = 1$ ($i = 1, 2, 3, 4$) 时, 系统 (2) 为整数阶超混沌系统, 其正的李雅普诺夫指数分别为 16.53, 0.265. 当 $q_i = 0.9$ ($i = 1, 2, 3, 4$) 时, 系统 (2) 为其整数阶超混沌系统的分数阶系统, 其吸引子如图 1. 从图 1 可得, 此时系统 (2) 为其整数阶超混沌系统的分数阶混沌系统, 即系统 (2) 为分数阶超混沌系统.



图 1 $q_i = 0.95 (i = 1, 2, 3, 4)$ 对系统 (2) 的混沌吸引子

4. 一个新的分数阶超混沌系统同步

为实现分数阶超混沌系统 (2) 和其响应系统的混沌同步, 为方便仅讨论 $q_1 = q_2 = q_3 = q_4$ 的情况. 现将系统 (2) 改写为系统

$$\frac{d^q x}{dt^q} = Ax + f(x), \quad (3)$$

其中 $f(x)$ 是系统 (2) 的非线性项, A 为常数矩阵. 将系统 (3) 作驱动系统, 构造响应系统

$$\frac{d^q y}{dt^q} = Ay + f(y) + (C - Df(x))e, \quad (4)$$

其中 $e = y - x$ 为驱动系统和响应系统状态变量的误差, $Df(x)$ 是 $f(x)$ 的 Jacobi 矩阵, C 为待定矩阵,

$$A = \begin{pmatrix} -35 & 35 & 0 & 0 \\ 7 & 12 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ -5 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

定理 如果矩阵 $A + C$ 的所有特征值的幅角满足 $|\arg \lambda_i(A + C)| > 0.5\pi q (i = 1, 2, 3, 4)$, 则响应系统 (4) 和驱动系统 (3) 可以达到混沌同步.

证明 由系统 (2) 可得驱动系统

$$\begin{aligned} \frac{d^q x}{dt^q} &= Ax + f(x) \\ &= \begin{pmatrix} -35 & 35 & 0 & 0 \\ 7 & 12 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ -5 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \\ &\quad + \begin{pmatrix} 0 \\ -x_1 x_3 \\ x_1 x_2 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (5)$$

由系统 (4) 可得响应系统

$$\begin{aligned} \frac{d^q y}{dt^q} &= \begin{pmatrix} -35 & 35 & 0 & 0 \\ 7 & 12 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ -5 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -y_1 y_3 \\ y_1 y_2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\quad + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -x_3 & 0 & -x_1 & 0 \\ x_2 & x_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\quad + C \begin{pmatrix} y_1 - x_1 \\ y_2 - x_2 \\ y_3 - x_3 \\ y_4 - x_4 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (6)$$

令 $e = y - x$, 则有驱动系统和响应系统的误差系统为

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} d^q e_1/dt^q \\ d^q e_2/dt^q \\ d^q e_3/dt^q \\ d^q e_4/dt^q \end{pmatrix} &= \left(\begin{pmatrix} -35 & 35 & 0 & 0 \\ 7 & 12 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ -5 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + C \right) \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{pmatrix} \\ &\quad + \begin{pmatrix} 0 \\ -e_1 e_3 \\ e_1 e_2 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (7)$$

显然 $e_i = 0 (i = 1, 2, 3, 4)$ 是误差系统 (7) 的平衡点. 系统 (7) 在平衡点 $e_i = 0 (i = 1, 2, 3, 4)$ 处的 Jacobi 矩阵是 $A + C$, 即为

$$\begin{pmatrix} -35 & 35 & 0 & 0 \\ 7 & 12 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ -5 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + C.$$

由于 $|\arg(\lambda_i(A+C))| > 0.5\pi (i=1, 2, 3, 4)$, 根据分数阶动力系统稳定性理论^[12, 13]可得, 平衡点 $e_i = 0 (i=1, 2, 3, 4)$ 是系统(7)的渐近稳定平衡点, 故有 $\lim_{t \rightarrow +\infty} e_i = 0 (i=1, 2, 3, 4)$ 成立, 所以响应系统(4)和驱动系统(3)可以达到混沌同步.

上述定理表明, 当选择合适矩阵 C , 使得 $|\arg(\lambda_i(A+C))| > 0.5\pi (i=1, 2, 3, 4)$ 成立时, 就可以实现响应系统(4)和驱动系统(3)的混沌同步. 进一步, 由于响应系统的控制项为 $(C - Df(x))e$, 这表明我们的控制方法并未删除响应系统中的非线性项 $f(y)$, 所以我们保留了响应系统自身的非线性性质, 这和很多已有的分数阶混沌系统同步方

法^[1-4, 7, 8, 10]是不同的.

下面以两个具体算例来验证本文同步理论的正确性.

当选择 $c = \begin{pmatrix} 20 & -35 & 0 & 0 \\ -7 & -13 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \\ 5 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$, 可得矩阵

$A + C$ 的特征值分别为 $\lambda = -15, \lambda = -1, \lambda = -3, \lambda = -4$, 满足 $|\arg(\lambda_i(A+C))| > 0.5\pi (i=1, 2, 3, 4)$, 所以响应系统(4)和驱动系统(3)可以达到混沌同步, 仿真结果如图2.

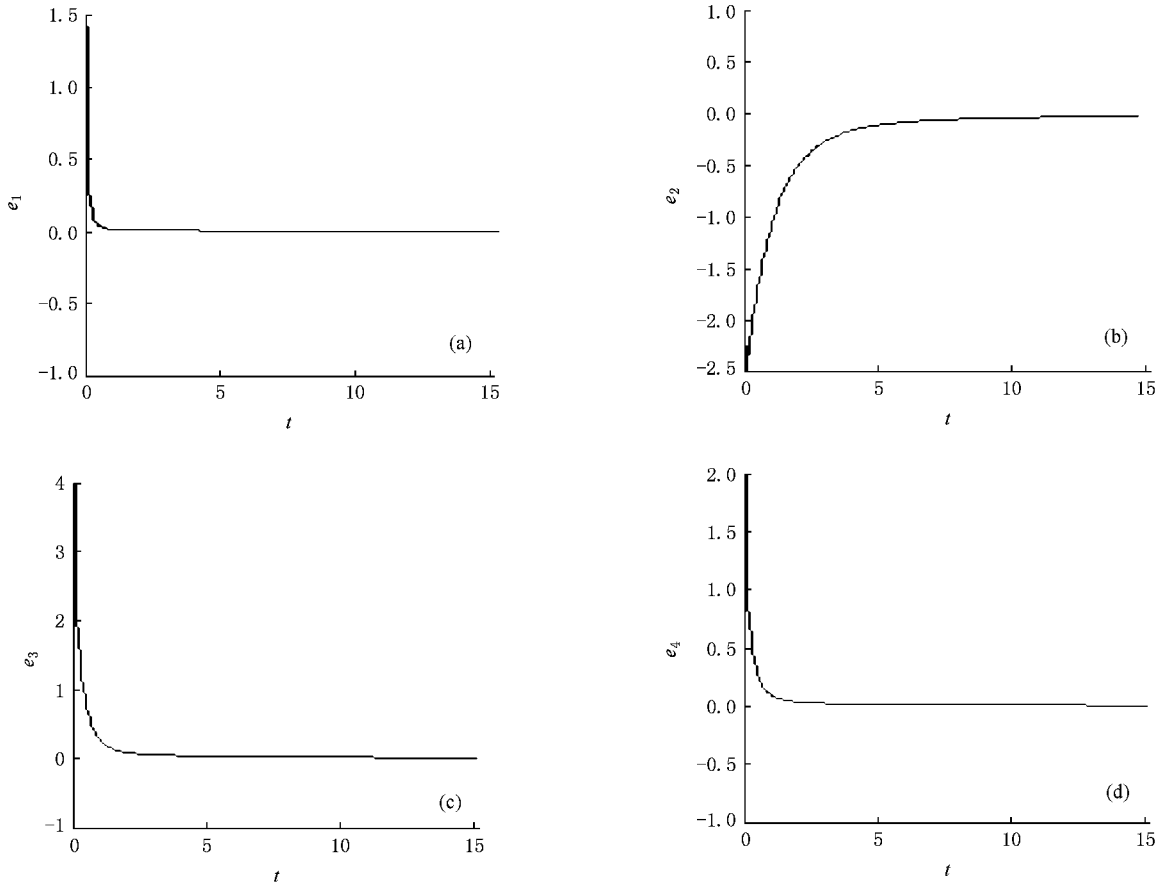


图2 响应系统(4)和驱动系统(3)的同步误差

当选择 $c = \begin{pmatrix} 35 & -35 & 1 & 0 \\ -7 & -12 & 1 & -1 \\ -2.5 & -3 & -1 & 3 \\ 5 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ 时, 可得

矩阵 $A + C$ 的特征值分别为 $\lambda = -0.8667, \lambda_{\pm} = -0.0666 \pm 1.6971i, \lambda = -1$, 满足 $|\arg(\lambda_i(A+C))| > 0.5\pi (i=1, 2, 3, 4)$, 所以响应系统(4)和驱动系统(3)可以达到混沌同步, 仿真结果如图3.



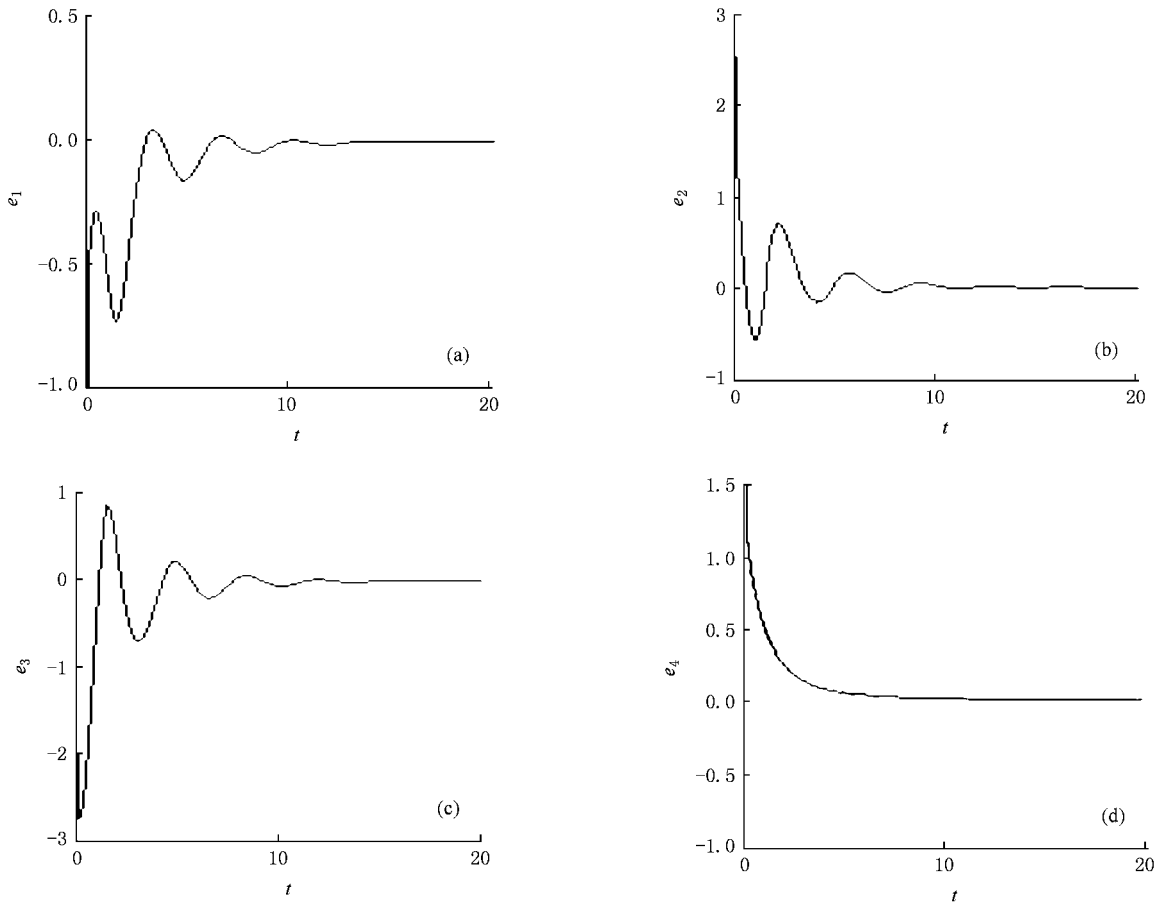


图 3 响应系统(4)和驱动系统(3)的同步误差

5. 结 论

本文给出了一个分数阶超混沌系统,得到了该系统的混沌吸引子.利用反馈控制,实现了此分数阶

超混沌系统的混沌同步,在此同步方法中我们保留了响应系统的所有非线性信息,这和很多已有的分数阶混沌系统同步方法^[1-4,7,8,10]是不同的.本文给出了该同步方法的严格数学理论证明,仿真结果与理论分析结果的一致性表明了该方法是有效的.

- [1] Gao X , Yu J B 2005 *Chin. Phys.* **14** 908
- [2] Gao X , Yu J B 2005 *Chin. Phys.* **14** 1522
- [3] Lu J G 2006 *Physica A* **359** 107
- [4] Li C G , Chen G 2004 *Physica A* **341** 55
- [5] Ahmad W M , Sprott J C 2003 *Chaos , Soliton and Fractals* **16** 339
- [6] Li C G , Liao X F , Yu J B 2003 *Phys. Rev. E* **68** 067203
- [7] Zhou P 2007 *Chin. Phys.* **16** 1263
- [8] Yan J P , Li C P 2007 *Chaos Solitons and Fractals* **32** 725
- [9] Shi S Q , Gao X , Liu X W 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 6815(in Chinese)[邵仕泉、高 心、刘兴文 2007 物理学报 **56** 6815]
- [10] Zhang C F , Gao J F , Xu L 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 5124(in Chinese)[张成芬、高金峰、徐 磊 2007 物理学报 **56** 5142]
- [11] Li C P , Peng G J 2004 *Chaos , Solitons and Fractals* **22** 443
- [12] Matignon D 1996 *IMACS , IEEE-SMC* ,(Lille , France) 963
- [13] Ogata K 1990 *Modern Control Engineering* (Englewood Cliffs , NJ : Prentice-Hall)

A new fractional-order hyperchaotic system and its chaotic synchronization^{*}

Zhou Ping[†]) Cheng Xue-Feng Zhang Nian-Ying

(*Institute of Applied Physics , Chongqing University of Post and Telecommunication , Chongqing 400065 ,China*)

(*Institute of Nonlinear System , Chongqing University of Post and Telecommunication , Chongqing 400065 ,China*)

(Received 25 December 2007 ; revised manuscript received 19 January 2008)

Abstract

A new fractional-order hyperchaotic system is reported. A synchronization method for the new chaotic systems is established and its mathematical proof is provided. The nonlinear terms in the response system are not dropped. The good agreement between theoretical analysis and numerical simulation shows the efficiency of the method.

Keywords : fractional-order hyperchaotic system , chaotic synchronization , nonlinear terms

PACC : 0545

^{*} Project supported by the Education Committee Foundation of Chongqing (Grant No. KJ070502)

[†] E-mail : zhouping@cqupt.edu.cn