

二维各向同性均匀随机介质中平面波的传播及其局域性^{*}

丁 锐[†] 王志良 小仓久直

(复旦大学波散射与遥感信息教育部重点实验室, 上海 200433)

(2007 年 11 月 27 日收到, 2008 年 2 月 26 日收到修改稿)

讨论了二维各向同性均匀随机介质中平面波的传播及其局域性. 假设二维随机介质具有各向同性窄带高斯谱, 运用随机泛函理论给出了二维介质中随机平面驻波的解析近似解及其幅度和相位的定量统计特性. 计算结果证实了波在随机介质中传播时的局域性. 将二维介质中的平面波和柱面波的传播特性作了对比. 数值结果模拟了二维随机介质场及平面驻波, 并验证了本文结果的正确性.

关键词: 随机介质, 随机泛函, 平面波, 局域性

PACC: 4110H, 0365D, 0250

1. 引 言

1958 年 Anderson 在研究晶体点阵中的电流传播时提出了局域性的概念^[1]. 1979 年, Abraham 等人^[2]运用标度理论论证了无量子扩散条件下的局域性现象并提出电流的局域性是由电子本质上的波动特性所决定. 随后, 电磁波在随机介质中的传播及其局域性问题就受到越来越多的关注. 电磁波的局域性分为弱局域性和强局域性, 弱局域性又称为增强的后向散射, 描述了电磁波在随机介质中漫散射时的角分布特性, 强局域性又称为 Anderson 局域性, 描述了电磁波在随机介质中的传播特性. 本文所讨论的局域性属于后者. 目前已有大量研究从理论和实验上讨论了电磁波在随机介质中的局域化特性. 对于一维情形, 早在 1975 年 Ogura^[3]就给出了定量的分析, 1988 年 Smith 等^[4]用实验进行了验证, 2002 年 Ziegler^[5]用标度理论再次证明并用数值方法进行讨论. 对于二维情形, 虽然也有很多研究, 但它们或针对于特定的介质模型^[6-10], 或针对于数学特征值问题^[11-14]或在频域内定性描述波的传播特性^[15-17], 没有对随机介质中波的传播特性及局域性给出解析

的定量描述. 本文将运用随机泛函理论讨论二维各向同性均匀连续随机介质中平面波的传播问题及其局域性, 给出随机平面驻波的解析近似解以及幅度和相位的定量统计特性.

二维空间 R_2 , $\mathbf{r} = (x, y)_0 = (r, \theta)_r$ 上笛卡尔坐标系或柱坐标系中的波动方程为

$$[\nabla^2 + k^2(1 + \epsilon(\mathbf{r}, \omega))] \psi(\mathbf{r}, \omega) = 0, \quad (1)$$

其中 $\epsilon(\mathbf{r}, \omega)$ 代表随机介质, $\omega \in \Omega$ 表示随机介质的一个取样或实现, Ω 为概率样本空间. $\psi(\mathbf{r}, \omega)$ 既是介质场的随机泛函, 又是 $\mathbf{r} \in R_2$ 上的函数. 为表达简单, 参数 ω 在下文中有时会被略去.

本文假设介质是具有各向同性窄带谱的高斯随机场, 运用随机泛函理论^[3, 48], 基于平移算子的特性讨论了二维随机介质中的平面波, 并得到平面驻波的解析近似解及其幅度和相位的统计特性, 定量描述了二维随机介质中波的传播及其局域性现象. 类似于一维的情形, 二维随机介质的谱结构决定了平面波传播时的形式为行波或是驻波. 将本文结果和 Ogura^[3, 49]之前所得到的结果对比发现, 平面波和柱面波的传播特性仅仅并且完全由随机介质的谱结构决定, 与波阵面形状无关. 数值结果模拟了二维各向同性均匀随机介质场及平面驻波, 并验证了本文结

^{*} 高等学校博士学科点专项科研基金(批准号: 20060246029)资助的课题.

[†] E-mail: rdling@fudan.edu.cn

果的正确性.

2. 二维各向同性均匀随机介质的随机对称性

本文假定介质场 $\epsilon(\mathbf{r}, \omega)$ 是各向同性均匀的, 即它的概率特性在 R_2 空间上的平移和旋转算子的作用下保持不变, 这种特性称之为随机对称性^[20]. 这些特性使得介质上的随机波场也具有相应的随机对称性. 我们将根据随机波场平移算子的一维表达式讨论介质中平面波的随机解.

2.1. R_2 空间上的平移和旋转

二维空间 R_2 上的一点记为 $\mathbf{r} = (x, y)_b = (r, \theta)_b$, R_2 上的变换因子包括平移算子 g_a 和旋转算子 g_ϕ , 分别定义为 $g_a \mathbf{r} = \mathbf{r} + \mathbf{a}$, $g_\phi \mathbf{r} = (r, \theta + \phi)$. 它们具有下式所示的可加性和不可交换性:

$$g_a g_b = g_{a+b}, g_a g_\beta = g_{a+\beta}, g_a g_\phi = g_\phi g_{g_{-\phi} a}. \quad (2)$$

2.2. Ω 空间上的平移和旋转

二维随机介质记为 $\epsilon(\mathbf{r}, \omega)$ ($\mathbf{r} \in R_2, \omega \in R$). 介质的均匀性和各向同性使其在 R_2 上的平移和旋转变换下概率特性保持不变, 即存在 Ω 空间上的保测变换 T^a ($-\infty < a < \infty$) 和 T^ϕ ($-\infty < \phi < \infty, \text{mod } 2\pi$), 分别定义为

$$\begin{aligned} \epsilon(\mathbf{r} + \mathbf{a}, \omega) &= \epsilon(\mathbf{r}, T^a \omega), \\ \epsilon(g_\phi \mathbf{r}, \omega) &= \epsilon(\mathbf{r}, T^\phi \omega), \end{aligned} \quad (3)$$

T^a 和 T^ϕ 同样具有如下所示的可加性和不可交换性:

$$T^a T^b = T^{a+b}, T^a T^\beta = T^{a+\beta}, T^a T^\phi = T^\phi T^{g_{-\phi} a}. \quad (4)$$

2.3. $R_2 \times \Omega$ 空间上的平移和旋转

对于介质 $\epsilon(\mathbf{r}, \omega)$ 上的任一随机场 $\Psi(\mathbf{r}, \omega)$, 例如 $R_2 \times \Omega$ 空间上的一个函数, 我们引入平移算子 D^a 和旋转算子 D^ϕ , 分别定义为

$$\begin{aligned} D^a \Psi(\mathbf{r}, \omega) &= \Psi(\mathbf{r} + \mathbf{a}, T^{-a} \omega), \\ D^\phi \Psi(\mathbf{r}, \omega) &= \Psi(g_\phi \mathbf{r}, T^{-\phi} \omega), \end{aligned}$$

$$(-\infty < a < \infty, -\infty < \phi < \infty \text{ mod } 2\pi). \quad (5)$$

类似于 g_a, g_ϕ 和 T^a, T^ϕ , 它们同样具有可加性和不可交换性,

$$\begin{aligned} D^a D^b &= D^{a+b}, D^a D^\beta = D^{a+\beta}, \\ D^a D^\phi &= D^\phi D^{g_{-\phi} a}. \end{aligned} \quad (6)$$

由上述算子定义, 随机介质 $\epsilon(\mathbf{r}, \omega)$ 的均匀性和各向同性可以体现为在 D^a 和 D^ϕ 算子作用下的概率特性保持不变, 分别称之为 D^a 不变特性和 D^ϕ 不变特性,

$$\begin{aligned} D^a \epsilon(\mathbf{r}, \omega) &= \epsilon(\mathbf{r}, \omega), \\ D^\phi \epsilon(\mathbf{r}, \omega) &= \epsilon(\mathbf{r}, \omega). \end{aligned} \quad (7)$$

我们称这种介质为 D^a 不变随机介质, 记为 $\epsilon(\mathbf{r}, \omega) = \epsilon(T^a \omega)$. 进一步的, 我们发现这些算子和 Laplacian 算子 ∇^2 之间具有交换律, 即 $D^a \nabla^2 = \nabla^2 D^a$, $D^\phi \nabla^2 = \nabla^2 D^\phi$, 并且使波动方程(1)式保持概率特性不变. 平移算子和旋转算子的这些特点使其在求解随机波动方程的过程中起到重要作用.

2.4. 平移算子 D^a 的一维随机表示

接下来我们基于平移算子 D^a 讨论介质的随机对称性. 令随机变量 $\alpha(\mathbf{a}, \omega)$ 为平移算子 D^a 的一维表达式. 考虑一个随机波场 $\psi(\mathbf{r}, \omega)$, 作为波动方程(1)式的解, 满足如下的变换方程:

$$D^a \psi(\mathbf{r}, \omega) = \alpha(\mathbf{a}, \omega) \psi(\mathbf{r}, \omega). \quad (8)$$

由算子 D^a 的可加性(6)式可以得到

$$\begin{aligned} \alpha(\mathbf{b} + \mathbf{a}, \omega) &= \alpha(\mathbf{a}, T^{-b} \omega) \alpha(\mathbf{b}, \omega), \alpha(0, \omega) \\ &= 1. \end{aligned} \quad (9)$$

当 $\alpha(\mathbf{a}, \omega)$ 可微时, 容易由(9)式得到它的微分方程

$$\nabla \alpha(\mathbf{a}, \omega) = \lambda(T^{-a} \omega) \alpha(\mathbf{a}, \omega), \quad (10)$$

其中生成量 $\lambda(\omega)$ 是一个 D^a 不变的均匀矢量随机场, 定义为

$$\lambda(\omega) \equiv [\nabla \alpha(\mathbf{r}, \omega)]_{\mathbf{r}=0}. \quad (11)$$

将微分方程(10)式积分, 得到 $\alpha(\mathbf{a}, \omega)$ 的解

$$\begin{aligned} \alpha(\mathbf{a}, \omega) &= \exp\left[\int_0^a \lambda(T^{-b} \omega) \cdot d\mathbf{b}\right] \\ &= \exp\left[\mathbf{p} \cdot \mathbf{a} + \int_0^a \nabla \Phi(T^{-b} \omega) \cdot d\mathbf{b}\right] \\ &= \exp\left[\mathbf{p} \cdot \mathbf{a} + \Phi(T^{-a} \omega) - \Phi(\omega)\right], \end{aligned} \quad (12)$$

其中, $\mathbf{p} = \lambda(\omega)$, 为随机无旋场 $\lambda(\omega)$ 的均值部分, $\nabla \Phi(T^a \omega)$ 为浮动部分, 即 $\nabla \Phi(T^a \omega) = 0$ ^[20].

2.5. 以平移算子表示的平面波一般形式

根据波动方程的 D^a 不变性, 如果随机场 $\psi(\mathbf{r}, \omega)$ 是波动方程(1)式的解, 那么 $D^a \psi(\mathbf{r}, \omega)$ 也是(1)式的解. 因此, 介质中随机波场的解可以表示为

$$\psi(\mathbf{r}, \omega) = \alpha(\mathbf{r}, T^r \omega) u(T^r \omega), \quad (13)$$

其中 $u(T^r \omega)$ 是 D^a 不变的随机场, 且由随机初值定义

$$u(\omega) \equiv \psi(0, \omega). \quad (14)$$

将(12)式代入(13)式,得到二维介质中随机平面波的一般形式,

$$\psi(\mathbf{r}, \omega) = \exp[\mathbf{p} \cdot \mathbf{r} + \int_0^r \nabla \Phi(T^a \omega) \cdot d\mathbf{a}] u(T^r \omega), \quad (15)$$

其中 $\mathbf{p} = i\mathbf{k} + \mathbf{q}$, $k^2 = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = k^2$, $\mathbf{q} = (q_x, q_y)$ 为复矢量,在非随机介质中为零^[20].

3. 随机介质的谱表示

3.1. 介质的谱表示

随机介质 $\epsilon(\mathbf{r}, \omega)$ 是一个平稳高斯场,其 Wiener-Hermite 展开式为

$$\begin{aligned} \epsilon(\mathbf{r}, \omega) &= \epsilon(T^r \omega) \\ &= \int_{R_2} e^{i\lambda \cdot \mathbf{r}} \mathcal{G}(\lambda) dB(\lambda), \end{aligned} \quad (16)$$

其中 $dB(\lambda)$ 为复高斯随机测度,具有正交性,

$$\begin{aligned} \overline{dB(\lambda)} &= dB(-\lambda), \\ \overline{dB(\lambda)} dB(\lambda') &= \delta(\lambda - \lambda') d\lambda d\lambda'. \end{aligned} \quad (17)$$

$\lambda = (\mu, \nu)$, $\lambda_0 = (\Lambda, \phi)$, λ_{y1} 为空间波数矢量.角括号表示在概率空间 Ω 上取统计平均值. $|\mathcal{G}(\lambda)|^2$ 为介质谱密度,且 $\overline{\mathcal{G}(\lambda)} = \mathcal{G}(-\lambda)$.为了下文具体计算,假设随机介质具有各向同性窄带高斯谱,其中心位于 $|\lambda| = 2k$,带宽为 δ ,考虑到介质的各向同性,介质谱记为

$$\begin{aligned} |\mathcal{G}(\lambda)|^2 &= |\mathcal{G}(\Lambda)|^2 = A \exp\left(-\frac{(\Lambda - 2k)^2}{2\delta^2}\right), \\ \Lambda &= |\lambda|, \delta \ll 2k. \end{aligned} \quad (18)$$

根据下文(21)式容易得到介质方差为

$$\sigma^2 = (2\pi)^2 Ak\delta. \quad (19)$$

3.2. 各向同性的相关函数

随机介质 $\epsilon(\mathbf{r}, \omega)$ 是各向同性的均匀高斯场,其均值 $\overline{\epsilon(\mathbf{r}, \omega)} = 0$,相关函数仅仅由空间中两点之间的距离决定,利用 Hankel 变换可以得到空间两点 \mathbf{r} 和 0 之间的相关函数表达式为

$$\begin{aligned} R(r) &= \overline{\epsilon(\mathbf{r})\epsilon(0)} \\ &= 2\pi \int_0^\infty J_0(\Lambda r) |\mathcal{G}(\Lambda)|^2 \Lambda d\Lambda. \end{aligned} \quad (20)$$

因此,容易得到随机介质 $\epsilon(\mathbf{r})$ 的方差为

$$\sigma^2 = \overline{\epsilon(\mathbf{r})^2} = 2\pi \int_0^\infty |\mathcal{G}(\Lambda)|^2 \Lambda d\Lambda, \quad (21)$$

其中 J_0 为零阶 Bessel 函数.空间两点 \mathbf{r} 和 0 之间的

距离记为 $r = |\mathbf{r} - 0|$.特别的,当 $|\mathcal{G}(\Lambda)|^2 = 1$ 时, $\epsilon(\mathbf{r})$ 退化成白噪声场.

3.3. $\epsilon(\mathbf{r}, \omega)$ 的谱区域条带分割

为了下文计算,将介质谱沿波传播方向 k 分割成一系列条带谱.考虑到 $\epsilon(\mathbf{r}, \omega)$ 具有(16)式所示形式,我们得到

$$\epsilon(\mathbf{r}, \omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \epsilon_n(\mathbf{r}, \omega), \quad (22)$$

其中

$$\begin{aligned} \epsilon_n(\mathbf{r}, \omega) &= \int_Z e^{i\lambda \cdot \mathbf{r}} G_n(\lambda) dB_n(\lambda), \\ \epsilon_{-n}(\mathbf{r}, \omega) &= \epsilon_n^*(\mathbf{r}, \omega), \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} G_n(\lambda) &\equiv \mathcal{G}(\lambda + n\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}), \\ \overline{G_n(\lambda)} &= G_n(-\lambda) (\lambda \in Z), \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} dB_n(\lambda) &\equiv dB(\lambda + n\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}), \\ \overline{dB_n(\lambda)} &= dB_n(-\lambda), \\ \overline{dB_n(\lambda)} dB_m(\lambda') &= \delta_{nm} \delta(\lambda - \lambda') d\lambda d\lambda', \\ &(\lambda \in Z), \end{aligned} \quad (25)$$

$\epsilon_n(\mathbf{r}, \omega)$ 表示带宽为 k 的复高斯场, Z 表示沿 k 轴方向宽为 k 的条带区域,即

$$\begin{aligned} \lambda &= (\mu, \nu) \in Z, \\ (-k/2 < \mu < k/2, -\infty < \nu < \infty). \end{aligned} \quad (26)$$

4. 二维随机介质中的平面波

(15)式给出二维介质中随机平面波的一般形式.代入(1)式,得到随机平面波的波动方程

$$\begin{aligned} \{[\nabla + \mathbf{p} + \nabla \Phi(T^r \omega)]\} \\ + k^2 [1 + \epsilon(T^r \omega)] u(T^r \omega) = 0. \end{aligned} \quad (27)$$

和一维随机介质中平面波理论类似,在具有高斯窄带谱的二维随机介质中也存在驻波形式的平面波.考虑沿 k 方向传播的平面驻波 $\psi(\mathbf{r}, \omega)$,类似随机介质谱的条带分割,将 $\psi(\mathbf{r}, \omega)$ 展开为

$$\psi(\mathbf{r}, \omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{in\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}, \quad (28)$$

低阶近似形式为^[3]

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{r}, \omega) &= A_1(\mathbf{r}, \omega) e^{ik \cdot \mathbf{r}} + A_{-1}(\mathbf{r}, \omega) e^{-ik \cdot \mathbf{r}} \\ &= A_1(\mathbf{r}, \omega) [e^{ik \cdot \mathbf{r}} + I(\mathbf{r}, \omega) e^{-ik \cdot \mathbf{r}}], \end{aligned} \quad (29)$$

其中

$$A_1(\mathbf{r}, \omega) = \exp[\mathbf{q} \cdot \mathbf{r} + \int_0^r \nabla \Phi(T^a \omega) \cdot d\mathbf{a}],$$

$$A_{-1}(\mathbf{r}, \omega) = \Gamma(\mathbf{r}, \omega)A(\mathbf{r}, \omega), \quad (30)$$

$\Gamma(\mathbf{r}, \omega)$ 为随机场. 容易得到平面波的低阶近似解为

$$\psi(\mathbf{r}, \omega) = \exp[\mathbf{q} \cdot \mathbf{r} + \int_0^r \nabla \Phi(T^a \omega) \cdot d\mathbf{a}] \times [e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} + \Gamma(\mathbf{r}, \omega)e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}]. \quad (31)$$

类似于 1D 介质的情形^[31] (31) 式所示的平面驻波可以表示为

$$\psi(\mathbf{r}, \omega) \propto \exp[\operatorname{Re}(\mathbf{q} \cdot \mathbf{r} + \int_0^r \nabla \Phi(T^a \omega) \cdot d\mathbf{a})] \times \cos[\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \operatorname{Im}(\mathbf{q} \cdot \mathbf{r} + \int_0^r \nabla \Phi(T^a \omega) \cdot d\mathbf{a}) + \phi(\omega)]. \quad (32)$$

波的包络 $|A|$ 和相位 Θ 分别为

$$|A| = \exp[\operatorname{Re}(\mathbf{q} \cdot \mathbf{r} + \int_0^r \nabla \Phi(T^a \omega) \cdot d\mathbf{a})] \quad (33)$$

$$\Theta = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \operatorname{Im}(\mathbf{q} \cdot \mathbf{r} + \int_0^r \nabla \Phi(T^a \omega) \cdot d\mathbf{a}) + \phi(\omega). \quad (34)$$

将 (29) 式代入波动方程 (1) 式, 得到关于随机场 A_1, A_{-1} 的方程组

$$(2i\mathbf{k} \cdot \nabla + \nabla^2)A_1 + k^2 \epsilon_2 A_{-1} = 0, \quad (35)$$

$$(-2i\mathbf{k} \cdot \nabla + \nabla^2)A_{-1} + k^2 \epsilon_2^* A_1 = 0, \quad (36)$$

其中 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ 表示复矢量之间的非厄米内积, $\mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = k^2$, 式中和 ϵ_0 相关的项被略去^[20].

将 A_1, A_{-1} 的表达式 (30) 代入 (35) (36) 式, 得到关于 \mathbf{q}, Γ 和 Φ 的方程组

$$2i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{q} + \nabla \Phi) + (\mathbf{q} + \nabla \Phi)^2 + \nabla^2 \Phi + k^2 \epsilon_2 \Gamma = 0, \quad (37)$$

$$\mathcal{A}(\mathbf{q} + \nabla \Phi)^2 + \nabla^2 \Phi \Gamma + k^2 \epsilon_2 \Gamma + [-2i\mathbf{k} \cdot \nabla \Gamma + \nabla^2 \Gamma] + \mathcal{A}(\mathbf{q} + \nabla \Phi) \cdot \nabla \Gamma + k^2 \epsilon_2^* \Gamma = 0. \quad (38)$$

考虑到在 D^a 变换下的特性, 将 $\Gamma(\mathbf{r})$ 和 $\Phi(\mathbf{r})$ 以复 Wiener 积分形式展开至前两项

$$\Gamma(\mathbf{r}) = \int_Z \Gamma_1(\lambda) e^{-i\lambda \cdot \mathbf{r}} dB_2^*(\lambda) + \iiint_Z \Gamma_3(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) e^{-i(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) \cdot \mathbf{r}} h_3 \times [dB_2(\lambda_1) dB_2^*(\lambda_2) dB_2^*(\lambda_3)], \quad (39)$$

$$\Phi(\mathbf{r}) = \iint_Z \Phi_2(\lambda_1, \lambda_2) e^{i(\lambda_1 - \lambda_2) \cdot \mathbf{r}} h_2 [dB_2(\lambda_1) dB_2^*(\lambda_2)] + \iiint_Z \Phi_4(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) e^{i(\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4) \cdot \mathbf{r}} h_4$$

$$\times [dB_2(\lambda_1) dB_2(\lambda_2) dB_2^*(\lambda_3) dB_2^*(\lambda_4)] \quad (40)$$

其中 Γ_n, Φ_n 是 n 阶 Wiener 核, h_n 是以 n 变量复 Hermite 多项式表示的 Wiener-Hermite 微分算子, $dB_2(\lambda_i)$ 和 $dB_2^*(\lambda_i)$ 分别表示和 ϵ_2 和 ϵ_2^* 相关的项, Z 为 (26) 式中所示的窄带区域. 为表达简单, 用 $[\]_n, n = 0, 1, 2, \dots$ 表示 n 阶 Wiener-Hermite 展开式. 在 (39) 和 (40) 式中, $\Gamma(\mathbf{r})$ 和 $\Phi(\mathbf{r})$ 展开至第二项, 实际上, 后面可以看到, 仅仅利用第一项计算已经可以给出很好的近似结果.

对 (37) 式取统计平均并略去 σ^4 量级项, 得到零阶方程

$$\mathbf{q} = i\zeta \mathbf{k} / 2, \quad (41)$$

其中

$$\zeta = \epsilon_2 \Gamma = \int_Z G_2(\lambda) \Gamma_1(\lambda) d\lambda. \quad (42)$$

对 (38) 式取统计平均并略去其中 σ^4 量级的项, 脱去积分符号, 进而得到一阶 Wiener-Hermite 核 Γ_1 的近似解

$$\Gamma_1 = \frac{k^2 G_2^*(\lambda)}{\lambda^2 + 2\mathbf{k} \cdot \lambda - 2k^2 \zeta}. \quad (43)$$

代入 (42) 式, 并考虑到 $\lambda = (\mu, \nu)$, 略去高阶小项得到

$$\zeta = \iint_Z \frac{k^2 |G_2(\lambda)|^2}{2k\mu + \nu^2 - 2k^2 \zeta} d\mu d\nu. \quad (44)$$

为了进一步计算 (44) 式, 根据 (24) 式得到

$$|G_2(\lambda)|^2 = A \exp\left[-\frac{(\sqrt{(\mu + 2k)^2 + \nu^2} - 2k)^2}{2\delta^2}\right] \approx A \exp\left\{\frac{[(\mu/k) + \nu^2/(4k^2)]^2}{2\Delta^2}\right\}. \quad (45)$$

代入 (44) 式, 有

$$\zeta = \frac{Ak^2}{2} \iint_Z \frac{\exp[-(\mu + \nu^2/4)^2/2\Delta^2]}{\mu + \nu^2/2 - 2\zeta} d\mu d\nu. \quad (46)$$

上式右端对 μ 的积分可以近似写成 $\mu = -\nu^2/2$ 处的留数与一个主值积分之和的形式

$$\zeta \approx \frac{Ak^2}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \{\pm i\pi \exp[-(\nu^2/4)^2/2\Delta^2] + I_1(\nu)\} d\nu, \quad (47)$$

其中主值积分 $I_1(\nu)$ 为^[20]

$$I_1(\nu) \equiv P \int \frac{\exp[-(\mu + \nu^2/4)^2/2\Delta^2]}{\mu + \nu^2/2} d\mu = \exp[-\nu^4/(4\Delta)^2] \left[\frac{\sqrt{2\pi}}{\Delta} \left[\frac{\nu^2}{4} + \frac{1}{3} \frac{\nu^6}{\Delta^2} + \frac{3}{5} \frac{\nu^{10}}{\Delta^4} + \frac{15}{7} \frac{\nu^{14}}{\Delta^6} + \dots \right] \right], \quad (48)$$

其中 Gamma 函数 $\Gamma(z)$ 定义为

$$\Gamma(c/b) = a^{c/b} \int_0^{\infty} \exp(-ax^b) x^{c-1} dx, \quad (49)$$

令 $\zeta = \xi + i\eta$ 则有

$$\xi = \frac{Ak^2}{2} \int I_1(\nu) d\nu \approx 0.2406 \frac{\sigma^2}{\sqrt{\Delta}}, \quad (50)$$

$$\eta = \pm \frac{\pi Ak^2}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[-\nu^4 / (4\Delta)^2] d\nu = \pm 0.2150 \frac{\sigma^2}{\sqrt{\Delta}}. \quad (51)$$

由于在(32)式中存在指数因子

$$\begin{aligned} \exp(qx) &\equiv \exp[(\alpha + i\beta)x] \\ &= \exp\left(i \frac{\xi k}{2} x\right) \\ &= \exp\left(-\frac{\eta k}{2} x\right) \exp\left(i \frac{\xi k}{2} x\right), \quad (52) \end{aligned}$$

因此,随机平面波的幅度沿波的传播方向指数增长或是衰减由(51)式给出的 η 的正负性所决定.为了和一维介质中的平面波对比,采用和文献[3]中的相同的表示符号,平均对数幅度增长(衰减)因子和平均波数浮动因子分别为

$$\alpha = \frac{\ln |A|}{x} = \text{Re}(q) = -\frac{\eta k}{2} = \pm 0.1075 \frac{\sigma^2 k}{\sqrt{\Delta}}, \quad (53)$$

$$\beta = \frac{\Theta}{x} - k = \text{Im}(q) = \frac{\xi k}{2} \approx 0.1203 \frac{\sigma^2 k}{\sqrt{\Delta}}. \quad (54)$$

相应的,对数幅度和相位的方差分别为(附录)

$$\begin{aligned} d^2 &= (\ln |A| - \ln |A|)^2 \\ &\approx \frac{\pi Ak^3 x}{8} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[-\nu^4 / (4\Delta)^2] d\nu \\ &= \frac{1}{2} \alpha x, \quad (55) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta^2 &= (\Theta - \Theta)^2 \\ &\approx \frac{\pi Ak^3 x}{8} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[-\nu^4 / (4\Delta)^2] d\nu \\ &\approx \frac{1}{2} \alpha x. \quad (56) \end{aligned}$$

式(55)和(56)所示 d^2 和 θ^2 是关于 $x(x > 0)$ 的渐近表达式,且正比于 x .当 $x < 0$ 时,用 $-x$ 代替 x 上两式仍然成立. $x(x > 0)$ 增大时, d^2 和 θ^2 线性增大,但标准差和平均值的比值 $d/|\ln |A||$ 却逐渐变小,即

$$\frac{d}{\ln |A|} \propto \frac{1}{\sqrt{x}} = \alpha(x \rightarrow \infty). \quad (57)$$

这表示,当 $x \rightarrow \infty$ 时,波的对数幅度 $\ln |A|$ 趋近于它的数学期望值.类似的,可以得到渐近相位表达式为

$$\Theta = (k + \Delta k)x.$$

5. 不同介质中波传播特性的对比

考虑一维均匀随机介质的情形,其功率谱为

$$|\mathcal{G}(\lambda)|^2 = A \exp\left[-\frac{(\lambda - 2k)^2}{2\delta^2}\right], \quad \delta = k\Delta \ll 2k \quad (58)$$

一维随机平面驻波具有相应的传播指数系数 $\gamma = \alpha + i\beta$,

$$\alpha = \pm \frac{k^2 \pi}{4} |\mathcal{G}(2k)|^2, \quad (59)$$

$$\begin{aligned} \beta &\approx \frac{k^2}{4} P \int_{-k/2}^{k/2} \frac{|\mathcal{G}(2k + \lambda)|^2}{\lambda} d\lambda \\ &+ k^2 \left[-\frac{1}{3} |\mathcal{G}(k)|^2 + \frac{1}{16} |\mathcal{G}(2k)|^2 \right. \\ &\left. + \frac{1}{5} |\mathcal{G}(3k)|^2 \right]. \quad (60) \end{aligned}$$

注意到对于窄带高斯谱有 $|\mathcal{G}(k)|^2 = |\mathcal{G}(3k)|^2 \ll |\mathcal{G}(2k)|^2$,略去 $|\mathcal{G}(k)|^2$ 和 $|\mathcal{G}(3k)|^2$ 项得到平均对数幅度增长(衰减)因子 α 和平均波数浮动因子 β 分别为

$$\begin{aligned} \alpha &= \pm \frac{k^2 \pi}{4} A \approx \pm \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma^2 k}{\Delta} \\ &= \pm 0.3133 \frac{\sigma^2 k}{\Delta}, \quad (61) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta &\approx \frac{k^2}{16} |\mathcal{G}(2k)|^2 = \frac{1}{16 \sqrt{2\pi}} \frac{\sigma^2 k}{\Delta} \\ &= 0.0249 \frac{\sigma^2 k}{\Delta}. \quad (62) \end{aligned}$$

对于二维介质情形,同样考虑具有窄带高斯谱的各项同性均匀随机介质,其功率谱由(18)式给出.二维随机平面驻波的传播特性因子由(53)式和(54)式所给出

$$\alpha = \pm 0.1075 \frac{\sigma^2 k}{\sqrt{\Delta}}, \quad \beta = 0.1203 \frac{\sigma^2 k}{\sqrt{\Delta}}. \quad (63)$$

二维随机介质中的柱面波具有和(63)式相同的传播特性因子^[19].由以上对比可以发现,随机平面波在一维介质和二维介质中的传播特性不同,而二维随机介质中的平面波和柱面波却具有相同的传播特性.为了解释这种现象,考虑 Bessel 函数的渐近表达式^[21]

$$e^{ikr \cos \theta} = J_0(kr) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} i^n J_n(kr) \cos n\theta. \quad (64)$$

把上式中的 r 和 θ 理解为空间柱坐标变量,并且把

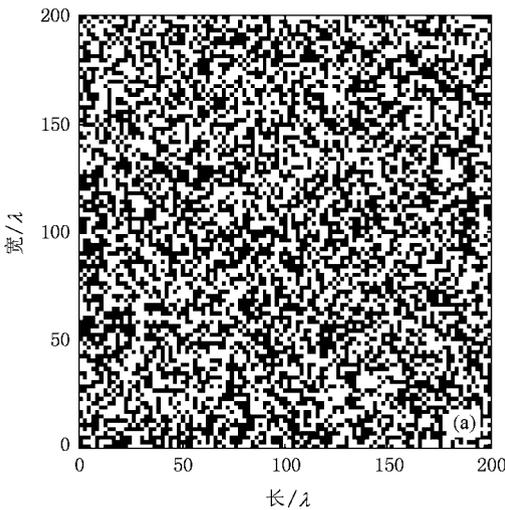
k 理解为波数.同时取相位的时间因子为 $e^{-i\omega t}$,则上式两端都分别对应于波动过程相位因子的空间部分.左端是沿正 x 轴方向传播的平面波,它的等位面是 $kr\cos\theta - \omega t = \text{常数}$,而右端各项中 $J_0(kr)$ 和 $J_n(kr)$ 描述的是柱面波,其等位面是圆柱面 $kr \mp \omega t = \text{常数}$.(64)式即表示平面波可以展开成一系列柱面波的和,因此二维介质中的平面波和柱面波具有相同的传播特性.同样的,平面波也可以由球面波展开

$$e^{ikr\cos\theta} = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^l j_l(kr) P_l(\cos\theta). \quad (65)$$

但仅凭此式还无法确定上述结论也适用于球面波.在三维随机介质中,平面波和球面波是否具有相同的传播特性还需要进一步研究.

6. 数值模拟和结果验证

对于随机介质中波的传播问题,现有的弱起伏理论没有关于波的幅度和相位的定量描述^[4-16].因



此本文采用 Ogura^[22]给出的数值验证方法进行定量结果验证.电磁波在通过连续随机介质时的传输系数 T 随传播距离指数减小.据此在长距离内数值模拟 F 矩阵得到驻波模式特性,计算绝对幅度和相位.进行多次数值模拟试验,进而得到对数幅度和相位的均值和方差,将数值试验统计值与本文所得到的理论解析值对比.假设随机介质的均值为零,方差为 $\sigma^2 = 0.01$,具有各向同性窄带高斯谱,谱中心位于 $|\lambda| = 2k = 1$,带宽为 $\delta = 0.05$,如(18)式所示.相关函数由(20)式给出.此时(53)-(56)式相应地变为

$$\alpha = \pm 0.0017, \beta = 0.0019, \quad d^2 = 0.00085x, \theta^2 = 0.00085x. \quad (66)$$

图1所示为二维随机介质数值模拟.(a)是随机介质 $\epsilon(r, \omega)$ 的数值模拟,介质所占区域为 200×200 波长.(b)为介质的窄带高斯谱,中心位于 $|\lambda| = 1$.为表示方便,图中用环状谱近似表示窄带高斯谱.

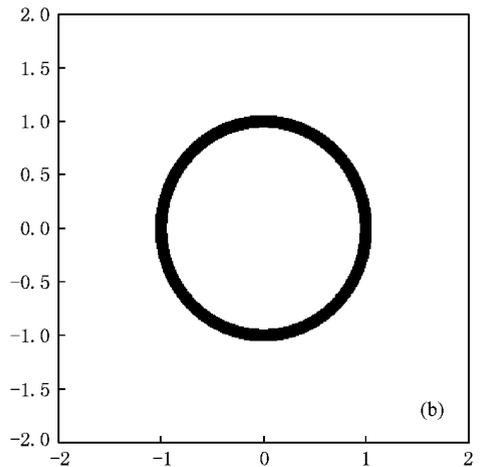


图1 二维随机介质数值模拟 (a)二维随机介质 $\epsilon(r, \omega)$ (b)各向同性窄带高斯谱

图2所示为二维随机介质中平面波的数值模拟.横轴表示波的传播距离,为200个波长;纵轴表示波的幅度.其中(a)为增长模式,(b)为衰减模式^[23],分别对应 $\alpha > 0$ 和 $\alpha < 0$.由图示可以看出,波的幅度沿波的传播方向指数增长或衰减,存在局域性现象.

图3和图4为二维非随机介质和随机介质中平面波强度的二维表示.电磁波沿横轴传播,波阵面平行于纵轴.图3所示非随机介质中的平面波是以行波的形式传播,即为正弦波.在图4所示的随机介质

中,平面波是以驻波的形式存在,其中(a)(b)分别对应增长模式和衰减模式.由图示可以看出,波的能量集中在一个小块区域内,再次证实了随机介质中波的局域化特性.

图5和图6为(53)-(56)式所示传播因子的数值模拟.横轴表示波的传播距离,以波长为单位.由图5可以看出,平均对数幅度和相位随传播距离线性增大.对数幅度和相位的方差由图6所示.可以看出,数值模拟结果和(53)-(56)式所给出的理论结果基本一致.

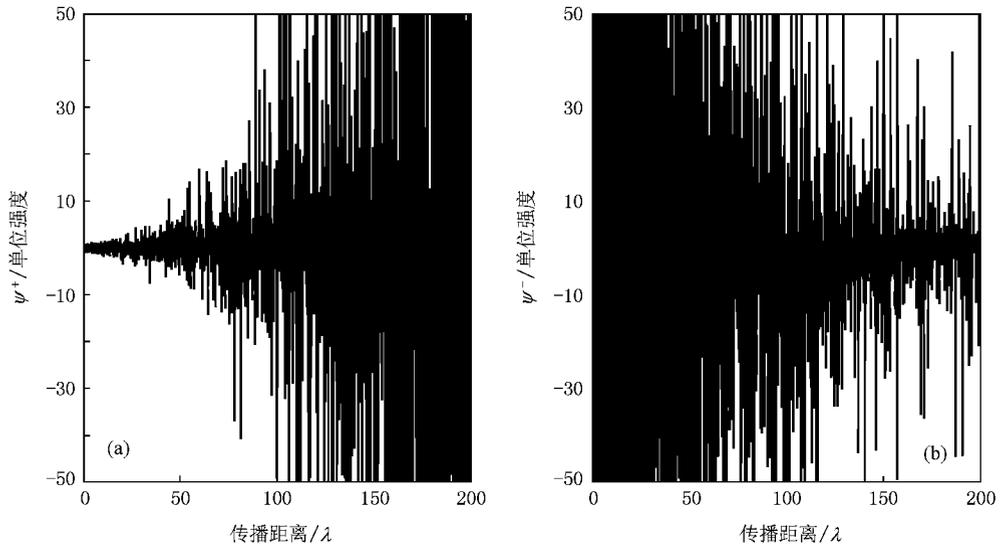


图 2 二维随机介质中的平面波传播(一维表示)

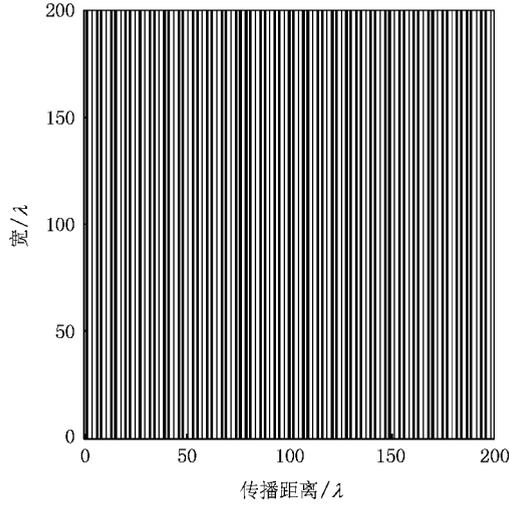


图 3 二维非随机介质中平面波的传播(二维表示)

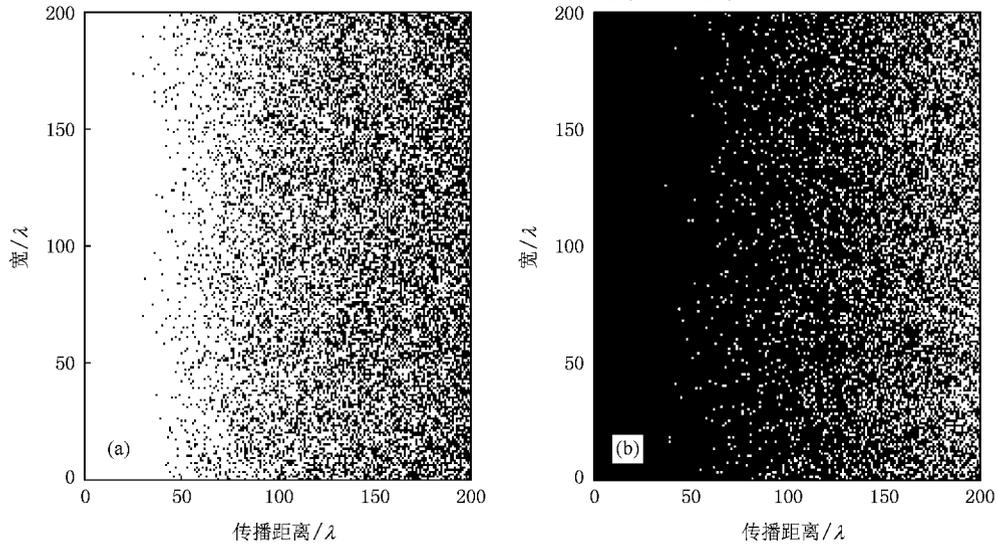


图 4 二维随机介质中平面波的传播(二维表示)

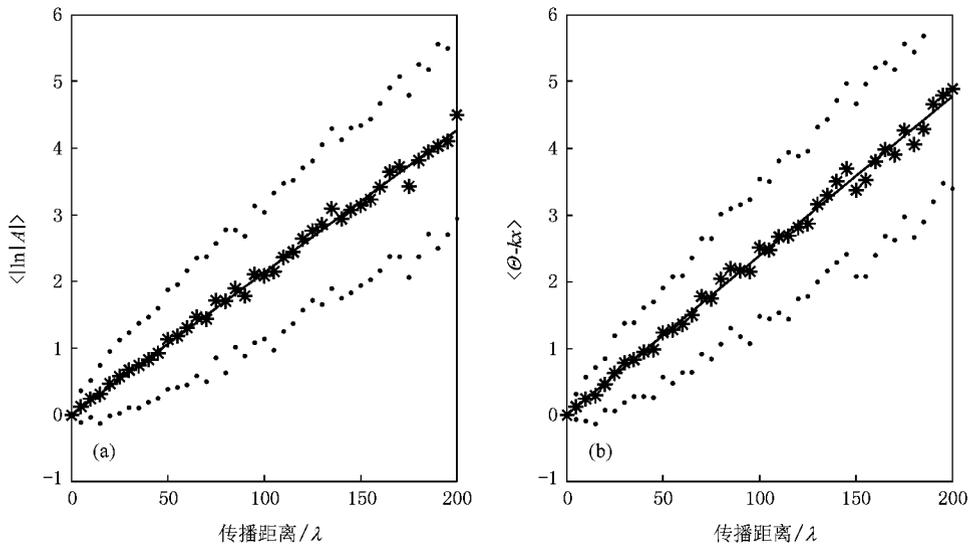


图 5 平均对数幅度和相位浮动数值验证(实线表示理论解析值,星点表示 30 次数值试验平均值,圆点表示 30 次数值试验值标准差)

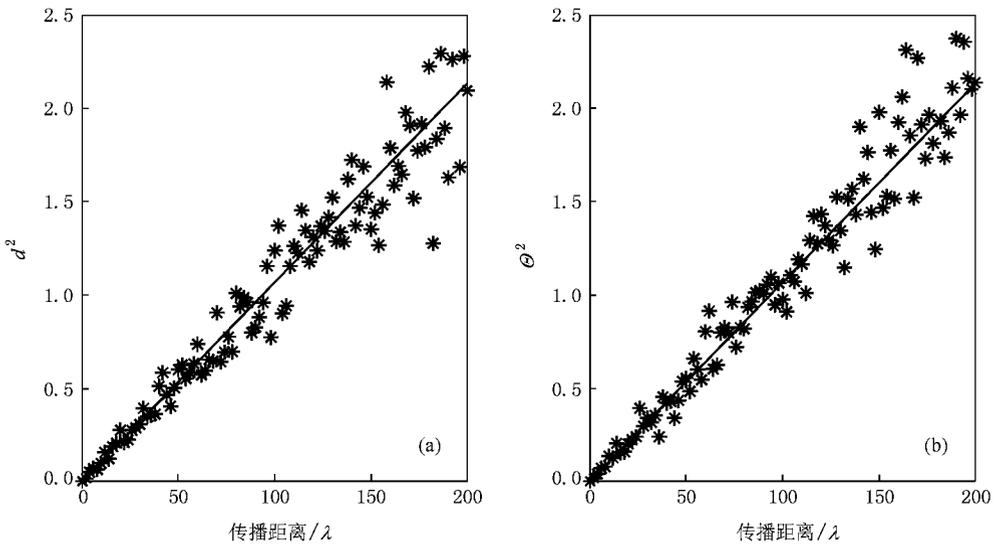


图 6 对数幅度和相位的方差数值模拟(实线表示理论解析值,星点表示 30 次数值试验值方差)

7. 总结讨论

本文用随机泛函理论讨论了二维随机介质中的平面波的传播特性以及局域化现象.假设介质是具有窄带高斯谱的各向同性均匀随机场,基于平移算子的特性给出二维随机平面波的解析近似解以及幅度和相位的定量分析.将不同介质中的平面波和柱面波对比发现,一维和二维随机介质中波的传播特性仅仅并且完全由介质的谱结构决定,与波阵面形

状无关.这表明,在同一种介质中,平面波和柱面波将具有相同的传播特性.

此外,由(51)式和(53)式可以得到

$$\begin{aligned} \alpha &= -\frac{\eta k}{2} = \pm \frac{\pi A k^3}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[-\nu^4 / (\chi 4 \Delta)^2] \text{H}\nu \\ &= \pm \frac{k^2 \pi}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} |\mathcal{G}(2k, \nu)|^2 \text{H}\nu, \end{aligned} \quad (67)$$

其中 $|\mathcal{G}(2k, \nu)|^2$ 为 $\lambda = (2k, \nu)$ 处的谱.因此 α 的数值完全由 $|\mathcal{G}(2k, \nu)|^2$ 所决定,并且当 $\int_{-\infty}^{+\infty} |\mathcal{G}(2k, \nu)|^2 \text{H}\nu = 0$ 时,有 $\alpha = 0$.此时二维随

机介质中的平面波不再是驻波,而是行波.对于本文中的窄带高斯谱,其中心位于 $\Lambda = 2k$, 一定有

$\int_{-\infty}^{+\infty} |\alpha(2k, \nu)|^2 d\nu \neq 0$, 因此只会出现驻波.

附录

对数幅度方差 d^2 由(55)式给出

$$d^2 = (\ln |A| - \ln |A|)^2 = \left(\int_0^T \text{Re}[\nabla\Phi(T^a\omega)] dt \right)^2. \tag{A1}$$

由(40)式容易得到 $\nabla\Phi$ 的二阶 Wiener 核为

$$[\nabla\Phi]_2 = \chi(\lambda_1 - \lambda_2)\Phi_2(\lambda_1, \lambda_2), \tag{A2}$$

相应地 $\text{Re}(\nabla\Phi)$ 的二阶 Wiener 核为

$$[\text{Re}(\nabla\Phi)]_2 = \frac{i}{2}(\lambda_1 - \lambda_2) [\Phi_2(\lambda_1, \lambda_2) - \Phi_2^*(\lambda_1, \lambda_2)]. \tag{A3}$$

对于一个平稳随机过程 $u(x)$ 有^[3]

$$\left(\int_0^x u(x') dx' \right)^2 = 2\pi F(0)x, \tag{A4}$$

其中 $F(0)$ 表示功率谱 $F(\omega)$ 在 $\omega = 0$ 处的值.

将(A4)式运用到(A1)式中来计算 d^2 . 由(A3)式可以得到 $\text{Re}(\nabla\Phi)$ 所对应的 $F(0)$,

$$F(0) = \frac{1}{4} \iint_Z |\chi(\lambda_1 - \lambda_2)\Phi_2(\lambda_1, \lambda_2) - \chi(\lambda_1 - \lambda_2)\Phi_2^*(\lambda_1, \lambda_2)|^2 d\lambda_1 d\lambda_2, \tag{A5}$$

其中

$$\Phi_2(\lambda_1, \lambda_2) \approx \frac{1}{2} \frac{k^4 G_2(\lambda_1) G_2^*(\lambda_2)}{(\lambda_1 - \lambda_2)^2 + 2k \cdot (\lambda_1 - \lambda_2)} \times \left[\frac{1}{\lambda_1^2 - 2k \cdot \lambda_1 - 2k^2 \zeta} + \frac{1}{\lambda_2^2 - 2k \cdot \lambda_2 - 2k^2 \zeta} \right]. \tag{A6}$$

将(A6)式代入(A5)式得到

$$F(0) \approx \frac{Ak^3}{16} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\nu^4/\alpha^4 \Delta^2} d\nu, \tag{A7}$$

代入(A4)式即可得到(55)式.

同样的, 我们有

$$[\text{Im}(\nabla\Phi)]_2 = \frac{1}{2}(\lambda_1 - \lambda_2) [\Phi_2(\lambda_1, \lambda_2) + \Phi_2^*(\lambda_1, \lambda_2)]. \tag{A8}$$

类似的可以得到(56)式. 注意到 $|\text{Re}(\nabla\Phi)|^2 = |\text{Im}(\nabla\Phi)|^2$, 所以 $d^2 = \theta^2$.

[1] Anderson P W 1958 *Phys. Rev.* **109** 1492

[2] Abrahams E, Anderson P W, Licciardello D C, Ramakrishnan T V 1979 *Phys. Rev. Lett.* **42** 673

[3] Ogura H 1975 *Phys. Rev. A* **11** 942

[4] Smith D T, Lorensen C P, Hallock R B, McCall K R, Guyer R A 1998 *Phys. Rev. Lett.* **61** 1286

[5] Ziegler K 2003 *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer* **79** 1189

[6] Sheng P, Zhang Z Q 1986 *Phys. Rev. Lett.* **57** 1879

[7] Soukoulis C M, Economou E N, Grest G S, Cohen M H 1989 *Phys. Rev. Lett.* **62** 575

[8] Sigalas M M, Soukoulis C M, Chan C T, Turner D 1996 *Phys. Rev. B* **53** 8340

[9] Foteinopoulou S, Soukoulis C M 2005 *Phys. Rev. B* **72** 165112

[10] Asatryan A A, Nicorovici N A, Botten L C *et al* 1998 *Phys. Rev. B* **57** 13535

[11] Kirsch W, Stollmann P, Stolz G 1998 *Commun. Math. Phys.* **195** 495

[12] Combers J M, Hislop P D, Tip A 1999 *Ann. Inst. Henri Poincaré, Physique Theorique* **70** 381

[13] Condat C A, Kirkpatrick T R 1987 *Phys. Rev. B* **36** 6782

[14] Weaver R L 1994 *Phys. Rev. B* **49** 5881

[15] Tsang L, Ishimaru A 1984 *J. Opt. Soc. Am. A* **1** 836

[16] Ishimaru A 1977 *Proceedings of the IEEE* **65** 1030

[17] Liu J S, Liu H, Wang C 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 3116 (in Chinese)[刘劲松、刘 海、王 春 2005 物理学报 **54** 3116]

[18] Wang Z L, Ogura H, Takahashi N 1995 *Phys. Rev. B* **52** 6027

[19] Ogura H 2003 *Radio Sci.* **38** 8006

[20] Ding R, Wang Z L, Ogura H 2007 *Radio Sci.* **43** RS2005

[21] Li X H, Yang Y T 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 12 (in Chinese)[李兴华、杨亚天 2005 物理学报 **54** 12]

[22] Ogura H, Aoki T, Yoshida Y 1976 *Phys. Rev. A* **13** 349

[23] Ogura H, Yoshida Y 1976 *Phys. Rev. A* **14** 796

Propagation and localization of plane waves in two-dimensional homogeneous and isotropic random medium^{*}

Ding Rui[†] Wang Zhi-Liang Hisanao Ogura

(*The Key Laboratory of Wave Scattering and Remote Sensing Information of the Ministry of Education, Fudan University, Shanghai 200433, China*)

(Received 27 November 2007; revised manuscript received 26 February 2008)

Abstract

Propagation and localization of plane waves in two-dimensional homogeneous and isotropic random medium is studied. The approximate stochastic solution of the plane wave and the propagation behaviors are obtained by means of stochastic functional approach. The results verify the phenomenon of localization of waves in random medium. The agreements between the theory and the computer simulations are shown to be satisfactory in spite of the use of approximate theoretical formulas.

Keywords : random medium , stochastic functional approach , plane wave , localization

PACC : 4110H , 0365D , 0250

^{*} Project supported by the Specialized Research Fund for the Doctoral Program of Higher Education of China (Grant No. 20060246029).

[†] E-mail : rding@fudan.edu.cn