第 58 卷 第 1 期 2009 年 1 月
1000-3290/2009/58(01)/0034-06

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.58,No.1,January,2009

超细长弹性杆动力学的 Gauss 原理*

薛 纭† 翁德玮

(上海应用技术学院机械与自动化工程学院,上海 200235)

(2008 年 2 月 25 日收到;2008 年 6 月 9 日收到修改稿)

研究基于 Gauss 变分的超细长弹性杆动力学建模的分析力学方法.分别在弧坐标和时间的广义加速度空间定义虚位移,给出了非完整约束加在虚位移上的限制方程;建立了弹性杆动力学的 Gauss 原理,由此导出 Kirchhoff 方程、Lagrange 方程、Nielsen 方程以及 Appell 方程;对于受有非完整约束的弹性杆,导出了带乘子的 Lagrange 方程;建立了弹性杆截面动力学的 Gauss 最小拘束原理并说明其物理意义.

关键词:超细长弹性杆动力学,分析力学,Gauss 变分,最小拘束原理

PACC:0320,0340D

1.引 言

受应用背景的推动,超细长弹性杆非线性动力学重新受到关注.虽然其研究历史可上溯到 Daniel Bernoulli 和 Euler(1730),以及建立弹性杆静力学理论的 Kirchhoff(1859)[1],但成为当前研究的热点是起因于 Fuller 的工作[2].作为 DNA 的力学模型,用超细长弹性杆的力学行为模拟 DNA 的分子生物学行为已成为物理学(经典力学和弹性力学交叉)和分子生物学交叉的新的研究领域[2—4],其中动力学建模是一个重要的基础问题.

弹性杆的超细长性使得小应变下产生大的位移,形成异常复杂的平衡位形和力学行为,尤其对于受约束(包括自接触)的弹性杆[5—14].因此,作为约束系统动力学理论,有必要将分析力学方法移植到弹性杆力学.Langer,Singer 和 Pozo Coronado 用离散系统的 Lagrange 方程和 Hamilton 原理建立和研究弹性杆的平衡和稳定性问题[15,16].作者从分析力学的基本概念出发[17]定义了点和截面的虚位移,建立了弹性杆静力学的 d'Alembert-Lagrange 原理等分析力学的微分和积分变分原理,导出了 Lagrange 方程等形式的平衡微分方程,建立了弹性杆平衡问题分析力学方法的理论基础.当前,Kirchhoff 弹性杆的动力学问题已成为研究重点[11—14].作者通过位形空间截面虚位移定义[18],建立了弹性杆动力学的 d'Alembert-Lagrange 原理和 Hamilton 原理,导出了 Lagrange 方程等形式的动力学微分方程.本文基于 Gauss 变分建立 Kirchhoff 弹性杆动力学的 Gauss 原理,考虑约束实现的可能途径,导出分析力学形式的动力学方程,推导过程较文献[18]更具逻辑性.

2.超细长弹性杆截面的状态及其虚位移

基于弹性杆的 Kirchhoff 假定.设惯性坐标系 $O\text{-}\xi\eta\zeta$,基矢列阵 $\boldsymbol{e}^{\mathrm{I}}=(\boldsymbol{e}_\xi\quad \boldsymbol{e}_\eta\quad \boldsymbol{e}_\zeta)^{\mathrm{T}}$;沿弹性杆中心线建立弧坐标 s 和与 s 截面固结的主轴坐标系 $p_s\text{-}xyz$,p_s 为截面形心,沿主轴的基矢列阵为 $\boldsymbol{e}^{\mathrm{P}}=(\boldsymbol{e}_1(s)\quad \boldsymbol{e}_2(s)\quad \boldsymbol{e}_3(s))^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{e}_3(s)$ 为截面的法矢.截面位形用姿态坐标 (q_1,q_2,q_3) 和形心位置 $\boldsymbol{r}(q_4,q_5,q_6)$ 给定.广义坐标 $q_i=q_i(s,t)$,$(i=1,\cdots,6)$ 随弧坐标 s 和时间 t 的变化都称为运动.截面的运动可分解为随形心的平移和相对形心的转动.其中截面形心的运动由 $\boldsymbol{r}(q_4,q_5,q_6)$ 及其偏导数表征,即

$$\boldsymbol{r}'=\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial s}=\sum_{j=4}^{6}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_j}q_j'=\boldsymbol{e}_3,\tag{1}$$

$$\dot{\boldsymbol{r}}=\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t}=\sum_{j=4}^{6}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_j}\dot{q}_j,\tag{2}$$

其中撇号和点号分别表示对 s,t 的偏导数.(1)式中

* 国家自然科学基金(批准号:10472067)资助的课题.

† E-mail:xueylyf@citiz.net

的第三个等号为 Kirchhoff 假定所要求.截面相对形心的转动由弯扭度 ω 和角速度 Ω 表征,即

$$\boldsymbol{\omega} = \sum_{j=1}^{3} \boldsymbol{\Xi}_j q'_j,$$
$$\boldsymbol{\Omega} = \sum_{j=1}^{3} \boldsymbol{\Xi}_j \dot{q}_j, \tag{3}$$

其中,$\boldsymbol{\Xi}_j = \boldsymbol{\Xi}_j(q_1, q_2, q_3)$.称$(q_i, q'_i, \dot{q}_i)$为截面的状态.弯扭度变化率 ω' 和角加速度 $\dot{\Omega}$ 为

$$\boldsymbol{\omega}' = \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial s} = \sum_{j=1}^{3} (\boldsymbol{\Xi}'_j q'_j + \boldsymbol{\Xi}_j q''_j), \tag{4}$$

$$\dot{\boldsymbol{\Omega}} = \frac{\partial \boldsymbol{\Omega}}{\partial t} = \sum_{j=1}^{3} (\dot{\boldsymbol{\Xi}}_j \dot{q}_j + \boldsymbol{\Xi}_j \ddot{q}_j). \tag{5}$$

关于弧坐标和时间的广义加速度的全体构成线性空间,记为 $Y_s = (q''_1, \cdots, q''_6)$,$Y_t = (\ddot{q}_1, \cdots, \ddot{q}_6)$.在空间 Y_s,Y_t 上分别定义虚位移如下.

定义 在给定截面状态$(q_i, q'_i, \dot{q}_i)$上假想的,与弧坐标和时间变化无关的,q''_i,$(i = 1, \cdots, 6)$的变更称为截面在弧坐标加速度空间 Y_s 上的虚位移,记为 $\delta_G q''_i$,其全体构成 Y_s 上的虚位移空间,记为 $\delta_G Y_s = (\delta_G q''_1, \cdots, \delta_G q''_6)$.

同理可以定义截面在时间加速度空间 Y_t 上的虚位移 $\delta_G \ddot{q}_i$,其全体构成 Y_t 上的虚位移空间,记为 $\delta_G Y_t = (\delta_G \ddot{q}_1, \cdots, \delta_G \ddot{q}_6)$.注意到,(1)式中的 Kirchhoff 假定在形式上构成对截面状态的非完整约束,但由于它并非约束力作用的结果,不构成对虚位移的限制,因此 $\dim(\delta_G Y_s) = \dim(\delta_G Y_t) = 6$.两个加速度虚位移空间的存在表明,与不定乘子方法对应的约束条件的实现途径也有两个.加速度空间虚位移可以用 Guass 变分 δ_G 表达,定义为

$$\begin{gathered}
\delta_G s = 0, \\
\delta_G t = 0, \\
\delta_G q_i = 0, \\
\delta_G q'_i = 0, \\
\delta_G \dot{q}_i = 0, \\
\delta_G q''_i \neq 0 \text{ 或 } \delta_G \ddot{q}_i \neq 0, \\
(i = 1, \cdots, 6),
\end{gathered} \tag{6}$$

于是加速度空间的截面虚位移可以用 Gauss 变分表示.从(1),(4)和(5)式得

$$\delta_G \boldsymbol{r}'' = \sum_{i=4}^{6} \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_i} \delta_G q''_i,$$

$$\delta_G \boldsymbol{\omega}' = \sum_{i=1}^{3} \boldsymbol{\Xi}_i \delta_G q''_i; \tag{7}$$

$$\delta_G \ddot{\boldsymbol{r}} = \sum_{i=4}^{6} \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_i} \delta_G \ddot{q}_i,$$

$$\delta_G \dot{\boldsymbol{\Omega}} = \sum_{i=1}^{3} \boldsymbol{\Xi}_i \delta_G \ddot{q}_i. \tag{8}$$

其中用到关系式 $\partial \boldsymbol{r}'' / \partial q''_i = \dfrac{\partial \ddot{\boldsymbol{r}}}{\partial \ddot{q}_i} = \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_i}$.对于一般的非完整约束

$$h_j(q_i, q'_i, q''_i, \dot{q}_i, \ddot{q}_i, s, t) = 0,$$
$$(j = 1, \cdots, \sigma < 6). \tag{9}$$

其对加速度空间虚位移的限制方程定义为

$$\sum_{i=1}^{6} \frac{\partial h_j}{\partial q''_i} \delta_G q''_i = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{6} \frac{\partial h_j}{\partial \ddot{q}_i} \delta_G \ddot{q}_i = 0,$$

$$(j = 1, \cdots, \sigma). \tag{10}$$

设其中 $\delta_G q''_i$ 和 $\delta_G \ddot{q}_i$ 的系数矩阵为满秩.(10)式表明了约束(9)实现方式的两个途径.

3. 超细长弹性杆动力学的 Gauss 原理

建立截面动力学的 Gauss 原理[19-22].以 s^- 和 $(s + \Delta s)^+$ 为端面的杆微段为对象,内力主矢和主矩在截面 s^- 上为 $-\boldsymbol{F}(s, t)$ 和 $-\boldsymbol{M}(s, t)$,在 $(s + \Delta s)^+$ 上为 $\boldsymbol{F} + \Delta \boldsymbol{F}$ 和 $\boldsymbol{M} + \Delta \boldsymbol{M}$ 此微段杆的惯性力的主矢和主矩分别为 $\Delta \boldsymbol{F}_Q = -\rho \ddot{\boldsymbol{r}} \Delta s$ 和 $\Delta \boldsymbol{M}_Q = -\Delta s \partial(\boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{\Omega}) / \partial t$,其中 ρ 为杆沿中心线的密度,$\boldsymbol{J}$ 为截面的惯量并矢,在主轴坐标系下的坐标阵为 $J = \mathrm{diag}(J_1 \quad J_2 \quad J_3)$,这里 $J_i = \rho I_i / A$,A 为截面积,I_1,I_2 为截面对主轴 x,y 的惯性矩,I_3 为对 z 轴的极惯性矩,且有 $I_3 = I_1 + I_2$.设杆上作用有沿中心线的连续分布的主动力 $\boldsymbol{f}(s, t)$ 和力偶 $\boldsymbol{m}(s, t)$ 以及约束力 $\boldsymbol{f}^C(s, t)$ 和约束力偶 $\boldsymbol{m}^C(s, t)$.所有这些力在截面加速度空间 $\delta_G Y_t$ 上所作的虚功之和为

$$\begin{aligned}
\delta_G W^t_{\Delta s} = {} & (\Delta \boldsymbol{F} + \Delta \boldsymbol{F}_Q + \boldsymbol{f} \Delta s) \cdot \delta_G \ddot{\boldsymbol{r}} \\
& + (\Delta \boldsymbol{M} + \Delta \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} + \Delta \boldsymbol{M}_Q + \boldsymbol{m} \Delta s) \cdot \delta_G \dot{\boldsymbol{\Omega}},
\end{aligned} \tag{11}$$

式中用到了理想约束条件,

$$\boldsymbol{f}^C \cdot \delta_G \ddot{\boldsymbol{r}} + \boldsymbol{m}^C \cdot \delta_G \dot{\boldsymbol{\Omega}} = 0, \tag{12}$$

并略去了二阶微量.将上式除以 Δs,并令 $\Delta s \to 0$,导出

$$\delta_G W^t = \left(\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial s} - \rho \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial t^2} + \boldsymbol{f} \right) \cdot \delta_G \ddot{\boldsymbol{r}}$$

$$+\left(\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial s}+\boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{F}-\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{\Omega})+\boldsymbol{m}\right)\cdot\delta_{\mathrm{G}}\dot{\boldsymbol{\Omega}},\tag{13}$$

其中偏导数包括对隐含的 s 或 t，称为全偏导数. 同理可以得到杆微段的全部受力在弧坐标加速度空间 $\delta_{\mathrm{G}}Y_s$ 上所作的虚功之和为

$$\delta_{\mathrm{G}}W^s=\left(\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial s}-\rho\frac{\partial^2\boldsymbol{r}}{\partial t^2}+\boldsymbol{f}\right)\cdot\delta_{\mathrm{G}}\boldsymbol{r}''$$
$$+\left(\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial s}+\boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{F}-\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{\Omega})+\boldsymbol{m}\right)\cdot\delta_{\mathrm{G}}\boldsymbol{\omega}',\tag{14}$$

理想约束条件为

$$\boldsymbol{f}^{\mathrm{C}}\cdot\delta_{\mathrm{G}}\boldsymbol{r}''+\boldsymbol{m}^{\mathrm{C}}\cdot\delta_{\mathrm{G}}\boldsymbol{\omega}'=0,\tag{15}$$

则 Gauss 原理在 Kirchhoff 弹性细杆动力学中的表述为

Gauss 原理 受有理想双面约束的 Kirchhoff 弹性细杆在任意时刻的真实运动，不同于状态相同的其他运动学上的可能运动仅在于，对于真实运动有

$$\delta_G W^t=0,\tag{16}$$

理想约束条件为(12)式 或

$$\delta_{\mathrm{G}}W^s=0,\tag{17}$$

理想约束条件为(15)式.

显然，(16)和(17)式是等价的，可根据约束的力性质，即广义加速度空间虚位移的限制方程选用. 在线性本构关系下，原理(16)和(17)可以进一步简化. 设

$$M_i=B_i(\omega_i-\omega_i^0)\qquad(i=1,2,3),\tag{18}$$

式中 $\omega_i^0=\omega_i^0(s)$ 为杆的原始弯扭度，B_1，B_2 为关于主轴 x，y 的抗弯刚度，B_3 为关于主轴 z 的抗扭刚度. 注意到

$$\frac{\partial\boldsymbol{\omega}'}{\partial q_i''}=\frac{\partial\boldsymbol{\omega}}{\partial q_i'}=\frac{\partial\boldsymbol{\Omega}}{\partial\dot q_i}=\frac{\partial\dot{\boldsymbol{\Omega}}}{\partial\ddot q_i}=\boldsymbol{\Xi}_i.\tag{19}$$

可以证明如下关系[3,15,16]：

$$\frac{\partial\boldsymbol{M}}{\partial s}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{\omega}}{\partial q_i'}=\frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial S^{\mathrm{r}}}{\partial q_i'}-\frac{\partial S^{\mathrm{r}}}{\partial q_i},$$
$$(i=1,2,3),\tag{20}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{\Omega})\cdot\frac{\partial\boldsymbol{\Omega}}{\partial\dot q_i}=\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial T^{\mathrm{r}}}{\partial\dot q_i}-\frac{\partial T^{\mathrm{r}}}{\partial q_i},$$
$$(i=1,2,3),\tag{21}$$

式中 $S^{\mathrm{r}}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}B_i(\omega_i-\omega_i^0)^2$，$T^{\mathrm{r}}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}J_i\Omega_i^2$ 分别为 s 截面的弹性应变势能和转动动能. 因 $\partial S^{\mathrm{r}}/\partial\dot q_i=\partial T^{\mathrm{r}}/\partial q'_i=0$，及(20)和(21)式，(16)和(17)式写作的 Euler-Lagrange 形式

$$\delta_{\mathrm{G}}W^t=\left(\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial s}-\rho\frac{\partial^2\boldsymbol{r}}{\partial t^2}+\boldsymbol{f}\right)\cdot\delta_{\mathrm{G}}\ddot{\boldsymbol{r}}$$
$$+\sum_{i=1}^{3}\left[\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial\Lambda^{\mathrm{r}}}{\partial q_i'}\right)+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\Lambda^{\mathrm{r}}}{\partial\dot q_i}\right)\right.$$
$$\left.-\frac{\partial\Lambda^{\mathrm{r}}}{\partial q_i}+m_i^{\mathrm{F}}+m_i\right]\cdot\delta_{\mathrm{G}}\ddot q_i=0,\tag{22}$$

$$\delta_{\mathrm{G}}W^s=\left(\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial s}-\rho\frac{\partial^2\boldsymbol{r}}{\partial t^2}+\boldsymbol{f}\right)\cdot\delta_{\mathrm{G}}\boldsymbol{r}''$$
$$+\sum_{i=1}^{3}\left[\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial\Lambda^{\mathrm{r}}}{\partial q_i'}\right)+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\Lambda^{\mathrm{r}}}{\partial\dot q_i}\right)\right.$$
$$\left.-\frac{\partial\Lambda^{\mathrm{r}}}{\partial q_i}+m_i^{\mathrm{F}}+m_i\right]\cdot\delta_{\mathrm{G}}q_i''=0,\tag{23}$$

式中

$$\Lambda^{\mathrm{r}}=S^{\mathrm{r}}-T^{\mathrm{r}},$$
$$m_i^{\mathrm{F}}=(\boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{F})\cdot\boldsymbol{\Xi}_i,$$
$$m_i=\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{\Xi}_i.$$

或 Nielsen 形式

$$\delta_{\mathrm{G}}W^t=\left(\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial s}-\rho\frac{\partial^2\boldsymbol{r}}{\partial t^2}+\boldsymbol{f}\right)\cdot\delta_{\mathrm{G}}\ddot{\boldsymbol{r}}$$
$$+\sum_{i=1}^{3}\left[\frac{\partial}{\partial q_i'}\frac{\partial\Lambda^{\mathrm{r}}}{\partial s}+\frac{\partial}{\partial\dot q_i}\frac{\partial\Lambda^{\mathrm{r}}}{\partial t}\right.$$
$$\left.-3\frac{\partial\Lambda^{\mathrm{r}}}{\partial q_i}+m_i^{\mathrm{F}}+m_i\right]\cdot\delta_{\mathrm{G}}\ddot q_i=0,\tag{24}$$

$$\delta_{\mathrm{G}}W^s=\left(\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial s}-\rho\frac{\partial^2\boldsymbol{r}}{\partial t^2}+\boldsymbol{f}\right)\cdot\delta_{\mathrm{G}}\boldsymbol{r}''$$
$$+\sum_{i=1}^{3}\left[\frac{\partial}{\partial q_i'}\frac{\partial\Lambda^{\mathrm{r}}}{\partial s}+\frac{\partial}{\partial\dot q_i}\frac{\partial\Lambda^{\mathrm{r}}}{\partial t}\right.$$
$$\left.-3\frac{\partial\Lambda^{\mathrm{r}}}{\partial q_i}+m_i^{\mathrm{F}}+m_i\right]\cdot\delta_{\mathrm{G}}q_i''=0.\tag{25}$$

还可以证明如下关系：

$$\left(\frac{\partial\boldsymbol{M}}{\partial s}+\boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{F}+\boldsymbol{m}\right)\cdot\frac{\partial\boldsymbol{\omega}'}{\partial q_i''}=\frac{\partial\Pi_s^{\mathrm{r}}}{\partial q_i''},$$
$$\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{\Omega})\cdot\frac{\partial\dot{\boldsymbol{\Omega}}}{\partial\ddot q_i}=\frac{\partial\Pi_t^{\mathrm{r}}}{\partial\ddot q_i},\tag{26}$$

其中[17,18]

$$\Pi_s^{\mathrm{r}}=\frac{1}{2}\sum_j B_j(\omega_j'-\omega_j^{0\prime})^2$$
$$+(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{M}+\boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{F}+\boldsymbol{m})\cdot\boldsymbol{\omega}',\tag{27}$$

$$\Pi_t^{\mathrm{r}}=\frac{1}{2}\sum_j J_j\dot\Omega_j^2+[\boldsymbol{\Omega}\times(\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{\Omega})]\cdot\dot{\boldsymbol{\Omega}},\tag{28}$$

于是，(16)和(17)式写作 Appell 形式

$$\delta_{\mathrm{G}}W^t=\left(\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial s}-\rho\frac{\partial^2\boldsymbol{r}}{\partial t^2}+\boldsymbol{f}\right)\cdot\delta_{\mathrm{G}}\ddot{\boldsymbol{r}}$$
$$+\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial\Pi_s^{\mathrm{r}}}{\partial q_i''}-\frac{\partial\Pi_t^{\mathrm{r}}}{\partial\ddot q_i}\right)\cdot\delta_{\mathrm{G}}\ddot q_i=0,\tag{29}$$

$$\delta_G W^s = \left(\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial s} - \rho \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial t^2} + \boldsymbol{f}\right) \cdot \delta_G \boldsymbol{r}'' + \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\partial \Pi_s^r}{\partial q_i''} - \frac{\partial \Pi_t^r}{\partial \ddot{q}_i}\right) \times \delta_G q_i'' = 0. \tag{30}$$

4．超细长弹性杆动力学方程

对于自由弹性杆，诸广义加速度的虚位移 $\delta_G \ddot{q}_i$ 或 $\delta_G q_i''$ 彼此独立，于是，从(16)或(17)式导出弹性杆截面的 Kirchhoff 动力学方程

$$\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial s} - \rho \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial t^2} + \boldsymbol{f} = 0,$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial s} + \boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{F} - \frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{\Omega}) + \boldsymbol{m} = 0. \tag{31}$$

从(22)—(25)，(29)，(30)式分别导出关于截面姿态的 Lagrange 方程、Nielsen 方程和 Appell 方程，即

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial \Lambda^r}{\partial q_i'}\right) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \Lambda^r}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial \Lambda^r}{\partial q_i} + m_i^F + m_i = 0, \quad (i = 1,2,3), \tag{32}$$

$$\frac{\partial}{\partial q_i'}\left(\frac{\partial \Lambda^r}{\partial s}\right) + \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\left(\frac{\partial \Lambda^r}{\partial t}\right) - 3\frac{\partial \Lambda^r}{\partial q_i} + m_i^F + m_i = 0, \quad (i = 1,2,3), \tag{33}$$

$$\frac{\partial \Pi_s^r}{\partial q_i''} - \frac{\partial \Pi_t^r}{\partial \ddot{q}_i} = 0, (i = 1,2,3). \tag{34}$$

对于受有一般的非完整约束(9)，设虚位移的限制方程由(10)式第二式给出，按不定乘子方法，从(24)式导出带乘子的 Lagrange 方程

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial \Lambda^r}{\partial q_i'}\right) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \Lambda^r}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial \Lambda^r}{\partial q_i} + m_i^F + m_i + \sum_{j=1}^{\sigma} \lambda_j \frac{\partial h_j}{\partial \ddot{q}_i} = 0, \quad (i = 1,2,3), \tag{35}$$

$$\left(\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial s} - \rho \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial t^2} + \boldsymbol{f}\right) \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_i} + \sum_{j=1}^{\sigma} \lambda_j \frac{\partial h_j}{\partial \ddot{q}_i} = 0, \quad (i = 4,5,6). \tag{36}$$

同理可导出带乘子的 Nielsen 方程和 Appell 方程.

5．超细长弹性杆的 Gauss 最小拘束原理

对于给定状态 $(q_i, q_i', \dot{q}_i)$，定义加速度空间 Y_s, Y_t 上的拘束函数

$$Z_s(q_1'', \cdots, q_6'') = \left(\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial s} - \rho \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial t^2} + \boldsymbol{f}\right) \cdot \boldsymbol{r}'' + \sum_{i=1}^{3} \frac{B_i}{2}\Big[(\omega_i' - {\omega^0}_i') + \frac{1}{B_i}\Big(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{M} + \boldsymbol{e}_3 \boldsymbol{F} - \frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{\Omega}) + \boldsymbol{m}\Big) \cdot \boldsymbol{e}_i\Big]^2; \tag{37}$$

$$Z_t(\ddot{q}_1, \cdots, \ddot{q}_6) = \frac{\rho}{2}\left[\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial s} + \boldsymbol{f}\right) - \ddot{\boldsymbol{r}}\right]^2 + \sum_{i=1}^{3} \frac{J_i}{2}\Big[-\dot{\Omega}_i + \frac{1}{J_i}\Big(\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{\Omega}) + \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial s} + \boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{F} + \boldsymbol{m}\Big) \cdot \boldsymbol{e}_i\Big]^2. \tag{38}$$

由此，对于受有理想双面约束的 Kirchhoff 弹性杆在任意时刻的真实运动，不同于状态相同的其他运动学上的可能运动仅在于，对于真实运动，有

$$\delta_G Z_t = 0, \text{或 } \delta_G Z_s = 0. \tag{39}$$

此即超细长弹性杆的 Gauss 原理．可以进一步证明，真实运动使拘束函数 Z_s, Z_t 取极小值，即 Gauss 最小拘束原理[22]．在 Gauss 变分下拘束函数的增量为

$$\begin{aligned}\Delta Z_s &= Z_s^* - Z_s = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3} B_i(\Delta\omega_i')^2 + \left(\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial s} - \rho \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial t^2} + \boldsymbol{f}\right) \cdot \Delta \boldsymbol{r}'' \\ &\quad + \left[\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial s} + \boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{F} - \frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{\Omega}) + \boldsymbol{m}\right] \cdot \Delta \boldsymbol{\omega}' \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3} B_i(\Delta\omega_i')^2 + \delta_G Z_s,\end{aligned} \tag{40}$$

$$\begin{aligned}\Delta Z_t &= Z_t^* - Z_t \\ &= \frac{1}{2}\Big[\rho(\Delta\ddot{\boldsymbol{r}})^2 + \sum_{i=1}^{3} J_i(\Delta\dot{\Omega}_i)^2\Big] - \Big\{\left(\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial s} - \rho \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial t^2} + \boldsymbol{f}\right)\Delta\ddot{\boldsymbol{r}} \\ &\quad + \left[\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial s} + \boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{F} - \frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{\Omega}) + \boldsymbol{m}\right] \cdot \Delta\dot{\boldsymbol{\Omega}}\Big\} \\ &= \frac{1}{2}\Big[\rho(\Delta\ddot{\boldsymbol{r}})^2 + \sum_{i=1}^{3} J_i(\Delta\dot{\Omega}_i)^2\Big] - \delta_G Z_t.\end{aligned} \tag{41}$$

分别将(29)和(30)式代入,于是对于真实运动有

$$\Delta Z_s = Z_s^* - Z_s = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3} B_i(\Delta\omega_i')^2 \geqslant 0, \tag{42}$$

$$\Delta Z_t = Z_t^* - Z_t = \frac{1}{2}\Big[\rho(\Delta\ddot{\boldsymbol{r}})^2 + \sum_{i=1}^{3} J_i(\Delta\dot{\Omega}_i)^2\Big] \geqslant 0. \tag{43}$$

则证明拘束函数对于真实运动具有极小值.对于约束在曲面上的弹性杆,拘束函数 Z_t 有简单的物理意义. 由曲面上弹性杆的 Kirchhoff 动力学方程

$$\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial s} - \rho\frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial t^2} + \boldsymbol{f} + \boldsymbol{f}^{\mathrm{C}} = 0,$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial s} + \boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{F} - \frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{\Omega}) + \boldsymbol{m} + \boldsymbol{m}^{\mathrm{C}} = 0. \tag{44}$$

拘束函数可用分布约束力集度 $\boldsymbol{f}^{\mathrm{C}}$,$\boldsymbol{m}^{\mathrm{C}}$ 表示

$$Z_t(\ddot{q}_1,\cdots,\ddot{q}_6) = \frac{1}{2\rho}(\boldsymbol{f}^{\mathrm{C}})^2 + \sum_{i=1}^{3}\frac{1}{2J_i}(\boldsymbol{m}^{\mathrm{C}}\cdot\boldsymbol{e}_i)^2. \tag{45}$$

于是可知,对于主动力 $\boldsymbol{f}$,$\boldsymbol{m}$ 和对应于约束所允许的可能状态的向量

$$\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial s} - \rho\frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial s} + \boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{F} - \frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{\Omega}).$$

真实运动对应的约束力集度 $\boldsymbol{f}^{\mathrm{C}}$,$\boldsymbol{m}^{\mathrm{C}}$ 必使拘束函数(45)取极小值. 作为特例,对于约束在光滑平面上的弹性杆,$\boldsymbol{m}^{\mathrm{C}} \equiv 0$,拘束函数取极小值相当于要求约束力与约束平面正交,即与轴线正交.因未考虑拉/压和剪切变形,Z_s 没有类似的表达.

6. 结 论

描述弹性杆截面位形的 6 个广义坐标是以弧坐标和时间作为自变量,存在关于弧坐标和时间的两个加速度空间;两个广义加速度空间上的虚位移都可以用 Gauss 变分表达;分别在两个广义加速度虚位移空间上建立的 Gauss 原理是等价的;各种分析力学形式的弹性杆动力学方程均可从本文的 Gauss 原理导出;弹性杆的真实运动是使拘束函数取极小值.在关于弧坐标和时间的加速度空间上的,基于 Gauss 变分的讨论在逻辑上更为直接和顺畅.

[1] Love A E H 1927 *A Treatise on Mathematical Theory of Elasticity* 4-th ed.(New York:Dover Publications)

[2] Fuller FB 1971 *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **68** 815

[3] Liu Y Z 2006 *Nonlinear Mechanics of Thin Elastic Rod -Theoretical Basis of Mechanical Model of DNA* (Beijing:Tsinghua Press & Springer)(in Chinese)[刘延柱 2006 弹性细杆的非线性力学—DNA 力学模型的理论基础(北京:清华大学-斯普林格出版社)]

[4] Liu Y Z 2003 *Mechanics in Engineering* **25**(1) 1(in Chinese)[刘延柱 2003 力学与实践 25(1)1]

[5] Xue Y,Liu Y Z,Chen L Q 2004 *Chin. Phys.* **13** 794

[6] Xue Y,Chen L Q,Liu Y Z 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 12 (in Chinese)[薛 纭、陈立群、刘延柱 2004 物理学报 53 12]

[7] Liu Y Z,Xue Y,Chen L Q 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 2424 (in Chinese)[刘延柱、薛 纭、陈立群 2004 物理学报 53 2424]

[8] Xue Y,Chen L Q,Liu Y Z 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 4029 (in Chinese)[薛 纭、陈立群、刘延柱 2004 物理学报 53 4029]

[9] Liu Y Z 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 4989 (in Chinese)[刘延柱 2005 物理学报 54 4989]

[10] Huang L,Bao G W,Liu Y Z 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 2457(in Chinese)[黄 磊、包光伟、刘延柱 2005 物理学报 54 2457]

[11] Liu Y Z,Sheng L W 2007 *Chin. Phys.* **16** 891

[12] Liu Y Z,Sheng L W 2007 *Acta Mech. Sin.* **23** 215

[13] Zhao W J,Wong Y Q,Fu J L 2007 *Chin. Phys. Lett.* **24** 2773

[14] Liu Y Z,Sheng L W 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 2305(in Chinese)[刘延柱、盛立伟 2007 物理学报 56 2305]

[15] Langer J,Singer D A 1996 *SIAM Rev.* **38** 605

[16] Pozo Coronado L M 2000 *Physica* D **141** 248

[17] Xue Y,Liu Y Z,Chen L Q 2005 *Acta Mech. Sin.* **37** 485 (in Chinese)[薛 纭、刘延柱、陈立群 2005 力学学报 37 485]

[18] Xue Y,Liu Y Z,Chen L Q 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3845 (in Chinese)[薛 纭、刘延柱、陈立群 2006 物理学报 55 3845]

[19] Liu Y Z 2001 *Advanced Dynamics* (Bejing:Higher Education Press) 35 (in Chinese)[刘延柱 2001 高等动力学(北京:高等教育出版社) 第 35 页]

[20] Chen B 1987 *Analytical Dynamics* (Bejing:Bejing University Press) 345 (in Chinese)[陈 滨 1987 分析动力学(北京:北京大学出版社) 第 345 页]

[21] Mei F X,Liu D,Luo Y 1991 *Advanced Analytical Dynamics* (Bejing:Bejing Institute of Technology Press) 52(in Chinese)[梅凤翔、刘端、罗 勇 1991 高等分析力学(北京:北京理工大学出版社)第 52 页]

[22] Wang J H 1982 *Analytical Mechanics* (Bejing:Higher Education Press)183(in Chinese)[汪家 1982 分析力学(北京:高等教育出版社) 第 183 页]

Gauss principle for a super-thin elastic rod dynamics*

Xue Yun† Weng De-Wei

(*School of Mechanical and Automation Engineering*, *Shanghai Institute of Technology*, *Shanghai* 200235, *China*)

(Received 25 February 2008; revised manuscript received 9 June 2008)

Abstract

The analytical formulation of dynamics of a super-thin elastic rod was studied on the basis of Gauss variation. The definition of virtual displacement in the generalized acceleration space with respect to the arc-coordinate and the time were given with expression of Gauss variation, respectively. The nonholonomic constraint equations of the virtual displacements expressed by Gauss variation were given. The Gauss's principle of the dynamics of a super-thin elastic rod was established, from which the Kirchhoff equation, the Lagrange equation, the Nielsen equation and the Appell equation of the rod can be derived. The Lagrange equation with indeterminate multipliers was obtained for the case when the rod is subjected to the nonholonomic constraints. The Gauss's principle of least compulsion of a super-thin elastic rod was proved and the compulsion function has a minimum for the actual motion and its physical meaning was indicated.

Keywords: super-thin elastic rod, analytical mechanics, Gauss variation, Gauss's principle of least compulsion

PACC: 0320, 0340D

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10472067)

† E-mail: xueylyf@citiz.net