第 58 卷 第 1 期 2009 年 1 月
1000-3290/2009/58(01)/0040-10

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.58,No.1,January,2009


# 非旋转性前进波 Euler 与 Lagrange 解间的转换

陈阳益[1)†] 许弘莒[2)]

1)(中山大学海洋环境及工程学系,高雄 807)

2)(成功大学水工试验所,台南 701)

(2007 年 12 月 14 日收到;2008 年 4 月 2 日收到修改稿)

对等深水中非旋转性的前进重力波动场,以求得的 Euler 与 Lagrange 两种形式至第三阶的解,按照同一流体质点在相同时间与位置处其流速唯一与质量守恒性及在自由表面水位处 Euler 形式解与 Lagrange 形式解为同一值的特性,来推导二者可相互转换.由连续的 Taylor 级数展开,考虑波动场中各流体质点的运动轨迹与运动周期,将已知的 Euler 形式解转换成完全未知的 Lagrange 形式解,解决了以往成果中出现含时间的不合理的共振项,以及无法得到与 Euler 系统不同的 Lagrange 形式的流体质点运动频率与平均运动高程等特性.接着再将所得的 Lagrange 解转换成对应的 Euler 形式,均可得到完全相同的结果.由此可知,虑及波动场各流体质点的运动真实性,对于非旋转性的前进重力波动场而言,这两种描述方式所得的解是可以相互转换的.

关键词:非旋转性前进波,Euler-Lagrange 转换,质点运动轨迹,质点运动频率

PACC:0340,4735,9210F

## 1. 引 言

众所皆知,流体力学中描述流体运动有 Euler 与 Lagrange 两种不同的方式.就物理观点而言,Euler 形式是于空间中各固定的位置点来观测恰好通过这些点的流体质点的运动行为;而 Lagrange 形式是针对个别的流体质点,观测它们在时空中的运动轨迹上之运动行为.就数学表示而言,Euler 形式是直接以时间和空间位置的函数形式表示来描述流场,即其以时间和流体质点所占的空间位置作为独立变量,而流场中各物理量为因变数;而 Lagrange 形式是以时间和标注流体质点的参数作为独立变量来描述流场,而流场中各物理量包括流体质点的轨迹位置等都是因变量.因此,就描述流场特性的简便性而言,直接以时空函数形式来展现的 Euler 形式要优于以参数函数形式来间接表现的 Lagrange 形式.故而 Euler 形式在数学解析处理上比 Lagrange 形式简单,原因在于 Lagrange 形式来描述流场特性时,不管解析求解难易,在求解后仍须再把所得参数函数处理到对应的空间位置表示.尽管如此 Lagrange 形式可完全描述整个流场的所有特性,而 Euler 形式却有无法描述流体质点的运动轨迹之虞.流体运动的这两种不同描述方式的优缺点,也出现在流体中自由表面波动现象的描述里.

由于以 Euler 形式来描述流体运动现象在数学解析处理上较为容易.自 Stokes[1] 以此方式利用摄动展开近似法对任一均匀等深流体中的自由表面重力波动现象进行解析描述后,以 Euler 形式来描述流体中波动问题的研究在横向与纵向的两方面广泛展开.横向方面的发展上,研究了从较深水时的 Stokes 波推展到较浅水时的椭圆函数波[2],甚至到极浅水时的孤立波[3]等.纵向方面的进展上,其理论解析推展到第五阶[4],而数值解甚至已计算到数十阶甚至百阶[5,6],以逼近最高波.

所谓的余摆线波(Trochoidal wave),最早是在描述流体中波动理论的第一篇论文里由捷克数学家 Gerstner[7] 以 Lagrange 形式描述所提出的.然因以 Lagrange 形式描述求解流场解,数学解析处理高度困难,致使以此方式对流体中波动现象的描述受到严重的延滞.Rankine[8] 亦独自以 Lagrange 形式对流体中自由表面波动问题进行了描述,且得到与

† E-mail:yichen@mail.nsysu.edu.tw

Gerstner 完全相同的解，可是此解仅适用于深海情况的第一阶线性解．Miche[9] 以 Lagrange 形式展开再推广到任一均匀等深流体中的自由表面规则重力波动问题的描述，并且更进一步求得其流场到第二阶的解．此外 Pierson[10] 亦以 Lagrange 形式描述下的 Navier-Stokes 方程式，对深海情况流体中的自由表面前进重力波动问题进行探究，并求得其流场的第一阶线性解．必须指出的是，以上所述寥寥可数的前人对流体中自由表面前进重力波与重力驻波波动所得 Lagrange 形式的流场解，其流体运动都是具旋转性(rotational)，这与按照环流量不变的 Thomson 's 定理[11,12] 所述的理想流体由静止(因其为非旋转流具有流速势)而起的运动为非旋转性(irrotational)相违背，这使得人们质疑以 Lagrange 形式描述是否符合理想流体中自由表面波动的物理现象，导致历来大多数的波动问题研究者不感兴趣，这也造成以 Lagrange 形式来描述流体中波动问题迄今进展不大．针对以上前人以 Lagrange 形式来描述流体中波动现象所遇到的两大障碍，即数学解析困难与无法满足非旋转流；近来陈[13,14] 完全以 Lagrange 形式描述下完整的控制方程式，对任一均匀等深流体中具非旋转性运动的自由表面前进重力波与重力驻波波动问题，进行了摄动解析，求得至第三阶流场解，从而有效地克服了两个障碍．

回顾近两百余年来的流体中重力波动问题的研究历程，我们得知，完整的 Lagrange 形式描述以数学解析来迂回困难，虽比直接简单化的 Euler 形式描述的进展缓慢，然而已经有所突破，已求得任一均匀等深理想流体中的自由表面重力波动流场至第三阶，而且和已求得的 Euler 形式解一样，符合理想流体由静止而起为非旋转性运动的物理现象．但是，立刻会衍生出一个耐人寻思的严肃问题：虽然对任一均匀等深理想流体中自由表面重力波动问题可以完整的 Lagrange 与 Euler 两种不同的方式描述，都能分别得到具非旋转性运动这一物理现象的流场高阶解析解，但二者的异同与优劣如何？能否相互转换？这是我们这里要探究和厘清的。否则，对同一波动问题以两种不同的方式描述下，会出现人言言殊的不一致结果，将会造成混淆而无法明确了解其真实的物理特性．过去学者如 Wiegel[15]，Chen[16] 在进行由 Euler 解转换至 Lagrange 解至第三阶次量时会出现含时间的不合理的共振项，也无法得到流体质点平均运动高程与流体质点运动周期等重要特性在 Lagrange 解下与 Euler 解下不同[17,18]．基于此，本文的目的在于仅需由一种方式描述下求得其解，经过直接转换，就可得到另一种方式描述下的解．依照同一流体质点在相同时间与位置处流速唯一与质量守恒及在自由表面水位 Euler 形式解与 Lagrange 形式解相同的性质，把连续的 Taylor 级数展开至第三阶，成功求得 Lagrange 解至第三阶．尤其会得到 Lagrange 解中流体质点运动的周波率与平均运动高程等特性，如此便解决了以往学者无法将三阶的 Euler 解转换至 Lagrange 解的问题．接着对描述等水深中非旋转性前进重力波的 Lagrange 解，依照同样的方式转换到 Euler 解．因此，应用本文的转换方式，二者是可相互转换的．

## 2．Euler 与 Lagrange 形式的波动流场解

在直角坐标系 $(x, y)$ 中，水平 $x$ 轴恰位在平均静水位线处且以波浪前进方向为正，而垂直 $y$ 轴向上取正．本文所考虑的波动和任何情形下流体运动的描述一样，可以 Euler 与 Lagrange 两种不同的方式来分别描述，展开至第三阶的对应的流场解，分别被列述于下．

### 2.1．Euler 形式描述下的流场解

在 Euler 形式描述下对所考虑的波动以摄动展开法对其解析，迄今已有不少学者求得其高阶的流场解，如前所述，这些解间形式上的差异仅为所引入的摄动参数常数不同而已，如，Fenton[4] 与陈[19] 两者经摄动参数常数间的转换结果是一致的．因此为方便起见，在不失其解的函数形式与本文结果的正确性下，将引用陈[19] 所得的 Euler 形式的流速势函数至第三阶解，如下：

$$\begin{aligned}\Phi(x,y,t) &= \frac{\sigma_0}{k}\alpha\frac{\cosh k(d+y)}{\cosh kd}\sin(kx-\sigma_w t)\\ &+\frac{3}{8}\alpha^2\sigma_0(\omega_0^{-2}-\omega_0^2)\frac{\cosh 2k(d+y)}{\cosh 2kd}\\ &\times\sin 2(kx-\sigma_w t)-\frac{\alpha^2\sigma_0^2 t}{4\cosh^2 kd}\\ &+\frac{1}{4}k\alpha^3\sigma_0(1-\omega_0^2)\frac{\cosh k(d+y)}{\cosh kd}\\ &\times\sin(kx-\sigma_w t)\\ &+\frac{1}{64}k\alpha^3\sigma_0(9\omega_0^{-4}+5\omega_0^{-2}-53+39\omega_0^2)\\ &\times\frac{\cosh 3k(d+y)}{\cosh 3kd}\sin 3(kx-\sigma_w t).\quad(1)\end{aligned}$$

$$\eta(x,t) = \alpha\omega_0\cos(kx-\sigma_w t)$$

$$+\frac{1}{4}k\alpha^2(3\omega_0^{-1}-\omega_0)\cos2(kx-\sigma_w t)$$
$$+k^2\alpha^3[\frac{1}{16}(3\omega_0^{-1}+12\omega_0-13\omega_0^3)$$
$$\times\cos(kx-\sigma_w t)$$
$$+\frac{1}{64}(27\omega_0^{-3}-9\omega_0^{-1}+9\omega_0-3\omega_0^3)$$
$$\times\cos3(kx-\sigma_w t)]. \quad (2)$$

$$\frac{\sigma_w}{\sigma_0}=1+\frac{1}{16}k^2\alpha^2(9\omega_0^{-2}-10+9\omega_0^2), \quad (3a)$$

$$\frac{\sigma_0^2}{gk}=\tanh kd=\omega_0. \quad (3b)$$

式中 $\Phi=\Phi(x,y,t)$与 $\eta(x,t)$各为 Euler 形式描述下所考虑的前进重力波波动流场的流速势函数(velocity potential)与自由表面水位;$g$ 为重力加速度,$t$ 为时间,$d$ 为平均静水深,而波动的波长(wavelength)为 $L$,周期(period)为 $T_w$,则其对应的波数(wave number)为 $k=2\pi/L$,周波率(angular frequency)为 $\sigma_w=2\pi/T_w$. $\alpha$ 为正比于波浪振幅的量. (3b)式所表示的 $\sigma_0^2=gk\tanh kd$ 即是所谓的前进重力波动的频散关系式(dispersion relation).

### 2.2. Lagrange 形式描述下的流场解

本文所考虑的是对具非旋转性运动及自由表面处的压力为零的波动,在 Lagrange 坐标系统的描述下,满足其对应的流场控制式,按照摄动展开近似法已由 Chen[13] 求得其至第三阶的流场解为

$$kx=ka-k\alpha\frac{\cosh k(b+d)}{\cosh kd}\sin(ka-\sigma t)$$
$$+\alpha^2k^2\Big\{\Big[-\frac{3}{8}(\omega_0^{-2}-\omega_0^2)\frac{\cosh2k(b+d)}{\cosh2kd}$$
$$+\frac{1}{4}(1-\omega_0^2)\Big]\sin2(ka-\sigma t)$$
$$+\frac{1}{2}(1+\omega_0^2)\frac{\cosh2k(b+d)}{\cosh2kd}\sigma_0 t\Big\}$$
$$+k^3\alpha^3\Big\{\frac{\cosh3k(b+d)}{\cosh3kd}\Big[-\frac{1}{64}(9\omega_0^{-4}$$
$$+5\omega_0^{-2}-53+39\omega_0^2)\sin3(ka-\sigma t)$$
$$-\frac{1}{16}(15\omega_0^{-2}+38-21\omega_0^2)\sin(ka-\sigma t)\Big]$$
$$+\frac{\cosh k(b+d)}{\cosh kd}\Big[\frac{1}{48}(15\omega_0^{-2}-34+19\omega_0^2)$$
$$\times\sin3(ka-\sigma t)+\frac{1}{16}(9\omega_0^{-2}-10+9\omega_0^2)$$
$$\times\sin(ka-\sigma t)\Big]\Big\}, \quad (4)$$

$$ky=kb+k\alpha\frac{\sinh k(b+d)}{\cosh kd}\cos(ka-\sigma t)$$
$$+\alpha^2k^2\frac{\sinh2k(b+d)}{\cosh2kd}\Big[\frac{3}{8}(\omega_0^{-2}-\omega_0^2)$$
$$\times\cos2(ka-\sigma t)+\frac{1}{4}(1+\omega_0^2)\Big]$$
$$+k^3\alpha^3\Big\{\frac{\sinh3k(b+d)}{\cosh3kd}\Big[\frac{1}{64}(9\omega_0^{-4}$$
$$+5\omega_0^{-2}-53+39\omega_0^2)\cos3(ka-\sigma t)$$
$$+\frac{1}{16}(9\omega_0^{-2}+22-15\omega_0^2)\cos(ka-\sigma t)\Big]$$
$$+\frac{\sinh k(b+d)}{\cosh kd}\Big[-\frac{1}{16}(3\omega_0^{-2}-6+3\omega_0^2)$$
$$\times\cos3(ka-\sigma t)-\frac{1}{16}(9\omega_0^{-2}-10+9\omega_0^2)$$
$$\times\cos(ka-\sigma t)\Big]\Big\}, \quad (5)$$

$$\frac{\sigma}{\sigma_0}=1+k^2\alpha^2[-\frac{1}{2}(1+\omega_0^2)\frac{\cosh2k(b+d)}{\cosh2kd}$$
$$+\frac{1}{16}(9\omega_0^{-2}-10+9\omega_0^2)],$$
$$\sigma=\frac{2\pi}{T}. \quad (6)$$

上式中 $a$,$b$ 为流体质点在起始时间 $t=t_0$ 时的起始位置处被标注的坐标值参数;其中 $b$ 值为流体质点运动对波浪波长平均下的高度值,在水平底床 $y=-d$ 处 $b=-d$,而在波动自由表面处 $b=0$. $\sigma_L=2\pi/T_L$ 是被参数($a$,$b$)所标注的流体质点运动时重现其高度的周频率(the angular frequency for particle reappearing its level)或称流体质点运动的周频率(the angular frequency of particle motion);而 $T_L$ 为其对应的周期(the period for particle reappearing its level),或称流体质点运动的周期(the period of particle motion). 而 $\alpha$ 为被引入的摄动展开的常数参数,$\alpha\omega_0$ 为第一阶解时的波动振幅.

## 3. Euler 形式解转换成 Lagange 形式解

本节将在仅已知 Euler 形式解的条件下,按照所考虑的波动的同一流体质点在相同时间与位置处流速为唯一以及及质量守衡,来求出事先完全未知的 Lagange 形式解,并从其第二阶与第三阶解得到 Lagange 解中流体质点运动的运动频率与平均运动高程,经 Euler-Lagrange 转换所得的解与 Chen[13] 直接以 Lagrange 坐标系统所得的三阶解完全相同.

由于 Euler 形式是描述流场中流至各固定位置

点处流体质点的运动特性，而 Lagange 形式是描述流场中各别的流体质点所走的轨迹上的运动行为，因此，由 Euler 形式描述所得的流场解转换成对应的 Lagange 形式时，需先将由 Euler 形式解所得的时间 $t$ 在空间位置 $(x,y)$ 点处流体质点的流速，即 $R(x,y,t)=iu(x,y,t)+jv(x,y,t)$，转换成该流体质点对应的 Lagange 形式表示，即 $W(a,b,t)=iU(a,b,t)+jV(a,b,t)$，$(a,b)$ 为该流体质点在起始时间 $t=t_0$ 时起始位置处被标注的参数，此转换的详细推导如下：

令 $\alpha$ 为按照摄动展开法摄动展开的常数参数，流场在 Euler 形式描述下，流体质点速度的水平与垂直分量分别有

$$u(x,y,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha^n u_n(x,y,t)=\frac{\partial\Phi}{\partial x}=\Phi_x, \tag{7}$$

$$v(x,y,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha^n v_n(x,y,t)=\frac{\partial\Phi}{\partial y}=\Phi_y. \tag{8}$$

$$\begin{aligned}\sigma_w&=\sigma_0+\sum_{n=1}^{\infty}\alpha^n\sigma_{wn}=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n\sigma_{wn},\\ \sigma_0&=\sigma_{w0}.\end{aligned} \tag{9}$$

对于本文所考虑的波动流场，流体质点水平与垂直方向的运动轨迹 $(x(a,b,t),y(a,b,t))$，流体质点运动的周频率 $\sigma_L$ 及对应的流体质点速度分量 $U(a,b,t)$，$V(a,b,t)$ 的摄动表示，可写为

$$\begin{aligned}x(a,b,t)&=a+\sum_{n=1}^{\infty}\alpha^n[f_n(a,b,\sigma_L t)\\&\quad+f'_n(a,b,\sigma_{L0}t)]\\&=a+\sum_{n=1}^{\infty}\alpha^n(f_n+f'_n),\end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned}y(a,b,t)&=b+\sum_{n=1}^{\infty}\alpha^n[g_n(a,b,\sigma_L t)\\&\quad+g'_n(a,b,\sigma_{L0}t)]\\&=b+\sum_{n=1}^{\infty}\alpha^n(g_n+g'_n),\end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned}\sigma_L&=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n\sigma_{Ln}=\sigma,\\ \sigma_{L0}&=\sigma_0,\end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned}U(a,b,t)&=x_t=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha^n\sigma_{L0}(f_{n\sigma_L t}+f'_{n\sigma_{L0}t})\\&\quad+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\alpha^{n+m}\sigma_{Lm}f_{n\sigma_L t},\end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned}V(a,b,t)&=y_t=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha^n\sigma_{L0}(g_{n\sigma_L t}+g'_{n\sigma_{L0}t})\\&\quad+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\alpha^{n+m}\sigma_{Lm}g_{n\sigma_L t},\end{aligned} \tag{14}$$

(10)—(14) 式中 $f_n$，$f'_n$，$g_n$，$g'_n$ 与 $\sigma_{Ln}$ 皆为未知量，即为事先完全未知的 Lagrange 解，其中 $f_n$ 与 $g_n$ 为流体质点在水平与垂直方向上随时空周期性运动的未知函数，$f'_n$ 与 $g'_n$ 为仅与时间 $t$ 有关的函数，$\sigma_{Ln}$ 为流体质点运动的周频率．对于上述各物理量，其下标 $n$ 表示为摄动参数 $\alpha$ 的阶次量(即次方数)．考虑在时间 $t$ 时刚好位于 $(x,y)$ 处的流体质点，是由起始时间 $t=t_0$ 时被 $(a,b)$ 参数所标注的流体质点流来的．因此，对同一流体质点在相同的时空下其流速在 Euler 与 Lagrange 两种形式表示为同一值，即其解唯一，故有

$$\begin{aligned}u(x,y,t)&=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha^n u_n(x,y,t)\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha^n U_n(a,b,t)\\&=U(a,b,t).\end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned}v(x,y,t)&=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha^n v_n(x,y,t)\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha^n V_n(a,b,t)\\&=V(a,b,t).\end{aligned} \tag{16}$$

而对不可压缩性的(incompressible)理想流体中的波动流场，在第二节所给定的 $(x,y)$ 坐标与标注流体质点的参数 $(a,b)$ 下，按照波动的时空周期性，由水底到自由表面的一个波长的水体，在 Euler 与 Lagrange 两种不同形式的表示下，其容积值也唯一，故有

$$\begin{aligned}\frac{L}{L}\int_0^L\int_{-d}^{\eta}\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x&=\frac{L}{L}\int_0^L(\eta+d)\,\mathrm{d}x=Ld\\&=\int_0^L\int_{b=-d}^{b=0}\frac{\partial(x,y)}{\partial(a,b)}\mathrm{d}a\,\mathrm{d}b,\end{aligned}$$

即

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(a,b)}=J=1. \tag{17}$$

此即为本文所考虑的波动流场的 Lagrange 形式下的质量守恒式.式中 $\eta=\eta(x,t)$ 为 Euler 形式表示下的波动自由表面水位;且有 $\eta(x+L,t)=\eta(x,t+T_w)=\eta(x,t)$ 与 $\int_0^L\eta(x,t)\,\mathrm{d}x=0$.

再者，因为 Lagrange 形式下波动自由表面处的流体质点 $b=0$，因此由 Euler 形式下波动自由表面水位 $y=\eta$ 转换成对应的 Lagrange 形式可得

$$\eta(x,t)=\eta\Big(a+\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n(f_n+f_n'),b=0,t\Big)$$

$$=y(a,0,t)=\Big[\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n(g_n+g_n')\Big]_{b=0}. \quad (18)$$

今将(10)—(14)式代入(15)—(18)式中,且利用 Taylor 级数在 $x$ 在 $a$ 展开,$y$ 在 $b$ 展开以及 $\omega_w$ 转换到 $\sigma_L$,即对下式进行 Taylor 级数展开:

$$kx-\sigma_w t=k\Big[a+\sum_{n=1}^{\infty}\alpha^n(f_n+f_n')\Big]$$
$$-\sigma_L t+\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n(\sigma_{Ln}-\sigma_{wn})t, \quad (19)$$

$$k(y+d)=k\Big[d+b+\sum_{n=1}^{\infty}\alpha^n(g_n+g_n')\Big]. \quad (20)$$

再收集相同的 $\alpha$ 阶次的量,即可得到各阶 Euler 形式解与 Lagange 形式解间的转换关系.至此,求解所必需的方程式已全被列出,有:1)对同一流体质点在相同的时空下,在 Euler 与 Lagange 两种形式下其流速为同一值,即其解唯一,即(15)式与(16)式;2)所考虑的波动场满足 Lagrange 形式下质量守衡,即(17)式;3)Euler 形式下波动自由表面水位 $y=\eta(x,t)$ 转换成对应的 Lagange 形式 $y(a,0,t)$,即(18)式;故可得转换方程组如(15)—(18)式所示.由此方程组,即可由已知的 Euler 形式的流场解,求解出事先完全未知的 Lagrange 形式描述下的流场解.以往学者如 Wiegel[15],Chen[16] 等因为忽略了流体质点运动频率与波浪波形频率不同的特性,且仅考虑第(1)项的方程式,而忽略了第(2)项与第(3)项的方程式,致使在由 Euler 解转换到 Lagrange 解至第三阶时会出现含时间的不合理的共振项,也无法得到 Lagrange 系统下流体质点平均运动高程与流体质点运动周期等与 Euler 系统解下是不相同的重要特性[17,18].详细求解过程如下节所述.

### 3.1. 解析求解 Lagrange 形式解至第三阶

#### 3.1.1. 第一阶的 Lagrange 形式解

由(19)与(20)式代入(15)—(18)四式中取出第一阶为

$$f_{1a}+f_{1a}'+g_{1b}+g_{1b}'+[\sigma_{0a}(f_{1\sigma t}+f_{1\sigma_0 t}')$$
$$+\sigma_{0b}(g_{1\sigma t}+g_{1\sigma_0 t}')]t=0, \quad (21a)$$

$$f_{1\sigma_L t}+f_{1\sigma_{L0}t}'=\frac{\cosh k(b+d)}{\cosh kd}[\cos(ka-\sigma_L t)$$
$$-(\sigma_{L0}-\sigma_{w0})t\sin(ka-\sigma_L t)], \quad (21b)$$

$$g_{1\sigma_L t}+g_{1\sigma_{L0}t}'=\frac{\sinh k(b+d)}{\cosh kd}[\sin(ka-\sigma_L t)$$
$$+(\sigma_{L0}-\sigma_{w0})t\cos(ka-\sigma_L t)], \quad (21c)$$

$$(g_1+g_1')_{b=0}=\omega_0\cos(ka-\sigma_L t). \quad (21d)$$

由(21a)—(21d)式及波动流场非处于共振情况下,解得第一阶的 Lagrange 解为

$$\sigma_{L0}=\sigma_{w0}=\sigma_0, \quad (22a)$$

$$f_1=-\frac{\cosh k(b+d)}{\cosh kd}\sin(ka-\sigma_L t),$$
$$f_1'=0, \quad (22b)$$

$$g_1=\frac{\sinh k(b+d)}{\cosh kd}\cos(ka-\sigma_L t),$$
$$g_1'=0. \quad (22c)$$

#### 3.1.2. 第二阶的 Lagrange 形式解

接着,和求解第一阶解的处理相同,取出 $\alpha^2$ 阶次量,且应用所得的第一阶解(22)式,得第二阶为

$$f_{2a}+f_{2a}'+g_{2b}+g_{2b}'+f_{1a}g_{1b}$$
$$-f_{1b}g_{1a}+(\sigma_{L1a}f_{1\sigma_L t}+\sigma_{L1b}g_{1\sigma_L t})t=0, \quad (23a)$$

$$\sigma_0(f_{2\sigma_L t}+f_{2\sigma_0 t}')+\sigma_{L1}f_{1\sigma_L t}$$
$$=\frac{\sinh k(b+d)}{\cosh kd}k\sigma_0 g_1\cos(ka-\sigma_L t)$$
$$-\frac{\cosh k(b+d)}{\cosh kd}\sigma_0[kf_1+(\sigma_{L1}-\sigma_{w1})t]$$
$$\times\sin(ka-\sigma_L t)$$
$$+\frac{3}{4}k\sigma_0(\omega_0^{-2}-\omega_0^2)\frac{\cosh 2k(b+d)}{\cosh 2kd}$$
$$\times\cos 2(ka-\sigma_L t), \quad (23b)$$

$$\sigma_0(g_{2\sigma_L t}+g_{2\sigma_0 t}')+\sigma_{L1}g_{1\sigma_L t}$$
$$=\frac{\cosh k(b+d)}{\cosh kd}k\sigma_0 g_1\sin(ka-\sigma_L t)$$
$$+\frac{\sinh k(b+d)}{\cosh kd}\sigma_0[kf_1+(\sigma_{L1}-\sigma_{w1})t]$$
$$\times\cos(ka-\sigma_L t)$$
$$+\frac{3}{4}k\sigma_0(\omega_0^{-2}-\omega_0^2)\frac{\sinh 2k(b+d)}{\cosh 2kd}$$
$$\times\sin 2(ka-\sigma_L t), \quad (23c)$$

$$(g_2+g_2')_{b=0}$$
$$=\Big[-k\omega_0 f_1\sin(ka-\sigma_L t)$$
$$+\frac{1}{4}k(3\omega_0^{-1}-\omega_0)\cos 2(ka-\sigma_L t)\Big]_{b=0}. \quad (23d)$$

由(23a)—(23d)式及波动流场处于非共振情况下,得第二阶的 Lagrange 形式解为

$$\sigma_{L1}=\sigma_{w1}=g_2'=0, \quad (24a)$$

$$f_2=-\frac{3}{8}k\left(\omega_0^{-2}-\omega_0^2\right)\frac{\cosh 2k(b+d)}{\cosh 2kd}\times\sin 2(ka-\sigma_L t)+\frac{1}{4}k\left(1-\omega_0^2\right)\times\sin 2(ka-\sigma_L t),\tag{24b}$$

$$f_2'=\frac{1}{2}k\left(1+\omega_0{}^2\right)\frac{\cosh 2k(b+d)}{\cosh 2kd}\sigma_0 t,\tag{24c}$$

$$g_2=\frac{3}{8}k\left(\omega_0^{-2}-\omega_0^2\right)\frac{\sinh 2k(b+d)}{\cosh 2kd}\cos 2(ka-\sigma_L t)+\frac{1}{4}k\left(1+\omega_0^2\right)\frac{\sinh 2k(b+d)}{\cosh 2kd}.\tag{24d}$$

3.1.3. **第三阶的 Lagrange 形式解**

和前二阶的求解处理一样，取出 $\alpha^3$ 阶次量且应用前二阶的解(22)与(24)式，无共振出现下，$\alpha^3$ 阶可被列出为

$$\begin{aligned}&f_{3a}+f_{3a}'+g_{3b}+g_{3b}'\\&=k^3\Big[\frac{1}{4}\left(3\omega_0^{-2}+7-6\omega_0^2\right)\frac{\cosh 3k(b+d)}{\cosh 3kd}\times\cos(ka-\sigma_L t)\\&\quad+\frac{1}{4}\left(3\omega_0^{-2}-7+4\omega_0^2\right)\frac{\cosh k(b+d)}{\cosh kd}\times\cos 3(ka-\sigma_L t)\Big]\\&\quad-\Big\{\sigma_{L2a}\frac{\cosh k(b+d)}{\cosh kd}\cos(ka-\sigma_L t)\\&\quad+\Big[\sigma_{L2b}+k^3\left(1+\omega_0^2\right)\sigma_0\frac{\sinh 2k(b+d)}{\cosh 2kd}\Big]\times\frac{\sinh k(b+d)}{\cosh kd}\sin(ka-\sigma_L t)\Big\}t,\end{aligned}\tag{25a}$$

$$\begin{aligned}&\sigma_0\left(f_{3\sigma_L t}+f'_{3\sigma_0 t}\right)+\sigma_{L2}f_{1\sigma_L t}\\&=\sigma_0 k^2\Big\{\Big[\frac{3}{64}\left(9\omega_0^{-4}+5\omega_0^{-2}-53+39\omega_0^2\right)\times\frac{\cosh 3k(b+d)}{\cosh 3kd}\\&\quad-\frac{1}{16}\left(15\omega_0^{-2}-34+19\omega_0^2\right)\frac{\cosh k(b+d)}{\cosh kd}\Big]\times\cos 3(ka-\sigma_L t)\\&\quad+\Big[\frac{1}{16}\left(15\omega_0^{-2}+34-33\omega_0^2\right)\frac{\cosh 3k(b+d)}{\cosh 3kd}\\&\quad-\frac{1}{4}\left(1-\omega_0^2\right)\frac{\cosh k(b+d)}{\cosh kd}\Big]\cos(ka-\sigma_L t)\Big\}\\&\quad-\sigma_0\Big[\frac{1}{2}\left(1+\omega_0^2\right)k^2\sigma_0\frac{\cosh 2k(b+d)}{\cosh 2kd}\\&\quad+\left(\sigma_{L2}-\sigma_{w2}\right)\Big]\frac{\cosh k(b+d)}{\cosh kd}\cdot t\sin(ka-\sigma_L t),\end{aligned}\tag{25b}$$

$$\begin{aligned}&\sigma_0\left(g_{3\sigma_L t}+g'_{3\sigma_0 t}\right)+\sigma_{L2}g_{1\sigma_L t}\\&=\sigma_0 k^2\Big\{\Big[\frac{3}{64}\left(9\omega_0^{-4}+5\omega_0^{-2}-53+39\omega_0^2\right)\times\frac{\sinh 3k(b+d)}{\cosh 3kd}\\&\quad-\frac{1}{16}\left(9\omega_0^{-2}-18+9\omega_0^2\right)\frac{\sinh k(b+d)}{\cosh kd}\Big]\times\sin 3(ka-\sigma_L t)\\&\quad+\Big[\frac{1}{16}\left(9\omega_0^{-2}+18-27\omega_0^2\right)\frac{\sinh 3k(b+d)}{\cosh 3kd}\\&\quad+\frac{1}{4}\left(1-\omega_0^2\right)\frac{\sinh k(b+d)}{\cosh kd}\Big]\sin(ka-\sigma_L t)\Big\}\\&\quad+\sigma_0\Big[\frac{1}{2}\left(1+\omega_0^2\right)k^2\sigma_0\frac{\cosh 2k(b+d)}{\cosh 2kd}\\&\quad+\left(\sigma_{L2}-\sigma_{w2}\right)\Big]\frac{\sinh k(b+d)}{\cosh kd}\times t\cos(ka-\sigma_L t),\end{aligned}\tag{25c}$$

$$\begin{aligned}&\left(g_3+g_3'\right)_{b=0}\\&=\omega_0\Big\{\left[k\left(f_2+f_2'\right)+\left(\sigma_{w2}-\sigma_{L2}\right)t\right]\sin(ka-\sigma_L t)\\&\quad+\frac{1}{2}k^2 f_1{}^2\cos(ka-\sigma_L t)\Big\}_{b=0}\\&\quad-\frac{1}{2}k^2\left(3\omega_0{}^{-1}-\omega_0\right)f_1\sin 2(ka-\sigma_L t)\Big\}_{b=0}\\&\quad+k^2\Big[\frac{1}{16}\left(3\omega_0{}^{-1}+12\omega_0-13\omega_0{}^3\right)\cos(ka-\sigma_L t)\\&\quad+\frac{1}{64}\left(27\omega_0{}^{-3}-9\omega_0{}^{-1}+9\omega_0-3\omega_0{}^3\right)\times\cos 3(ka-\sigma_L t)\Big].\end{aligned}\tag{25d}$$

由(25a)—(25c)式，按照前面求解第二阶解的同样步骤，则可解得第三阶的 Lagrange 形式解为

$$\sigma_{L2}=\frac{1}{16}\sigma_0 k^2\left(9\omega_0^{-2}-10+9\omega_0^2\right)-\frac{1}{2}\sigma_0 k^2\left(1+\omega_0^2\right)\frac{\cosh 2k(b+d)}{\cosh 2kd},\tag{26a}$$

$$\begin{aligned}f_3&=\left[\beta_{333}\sin 3(ka-\sigma_L t)+\beta_{331}\sin(ka-\sigma_L t)\right]\frac{\cosh 3k(b+d)}{\cosh 3kd}\\&\quad+\left[\beta_{313}\sin 3(ka-\sigma_L t)+\beta_{311}\sin(ka-\sigma_L t)\right]\frac{\cosh k(b+d)}{\cosh kd},\\f_3'&=0.\end{aligned}\tag{26b}$$

$$\begin{aligned}g_3&=\left[\lambda_{333}\cos 3(ka-\sigma_L t)+\lambda_{331}\cos(ka-\sigma_L t)\right]\frac{\sinh 3k(b+d)}{\cosh 3kd}\\&\quad+\left[\lambda_{313}\cos 3(ka-\sigma_L t)+\lambda_{311}\cos(ka-\sigma_L t)\right]\frac{\sinh k(b+d)}{\cosh kd},\end{aligned}$$

$$g'_3 = 0. \tag{26c}$$

其中各项系数如下所示:

$$\beta_{333} = -\frac{1}{64}k^2(9\omega_0^{-4} + 5\omega_0^{-2} - 53 + 39\omega_0^2),$$

$$\beta_{331} = -\frac{1}{16}k^2(15\omega_0^{-2} + 38 - 21\omega_0^2),$$

$$\beta_{313} = \frac{1}{48}k^2(15\omega_0^{-2} - 34 + 19\omega_0^2),$$

$$\beta_{311} = \frac{1}{16}k^2(9\omega_0^{-2} - 10 + 9\omega_0^2),$$

$$\lambda_{333} = \frac{1}{64}k^2(9\omega_0^{-4} + 5\omega_0^{-2} - 53 + 39\omega_0^2),$$

$$\lambda_{331} = \frac{1}{16}k^2(9\omega_0^{-2} + 22 - 15\omega_0^2),$$

$$\lambda_{313} = -\frac{1}{16}k^2(3\omega_0^{-2} - 6 + 3\omega_0^2),$$

$$\lambda_{311} = -\frac{1}{16}k^2(9\omega_0^{-2} - 10 + 9\omega_0^2).$$

### 3.2. 印 证

由上述结果右知,本文所考虑的自由表面规则前进波动场中的流体质点速度,可由(22),(24)与(26)式从 Euler 形式表示可完全转换到完全未知的 Lagrange 形式表示其流体质点的运动轨迹.而以往学者如 Wiegel[15],Chen[16] 因忽略了流体质点运动频率与波浪波形频率不同的特性,仅考虑第(15)式与(16)式,并忽略了(17)式与(18)式,致使在从 Euler 解转换至 Lagrange 解至第三阶次量时会出现含时间的不合理的共振项,也无法得到 Lagrange 系统下流体质点平均运动高程与流体质点运动周期等与 Euler 系统解不相同的重要特性[17,18].因此,本文所考虑的自由表面规则前进重力波动场,由 Euler 形式的流场解按照本节的推导是完全可转换成 Lagrange 形式解的 ;而且与与纯由 Lagrange 描述方式下解出的流场解完全一致,如(4)—(6)式.

## 4. Lagrange 形式解转换成 Euler 形式解

本文论述的主旨是按照同一流体质点在相同时间与位置处其流速值唯一,与在波浪时空周期下一波长的水体质量也唯一,即满足(15)—(18)式,从一已知的形式解完整地推导出事先完全未知的另一形式解.从 Lagrange 形式解转换成 Euler 形式,即转换成一般常用的 Euler 形式至第三阶次量解的情况.可由倒推上节的处理方式得到,即利用 Taylor 级数将 $a$ 在 $x$ 展开,$b$ 在 $y$ 展开,以及 $\sigma_L$ 转换到 $\sigma_w$

$$ka - \sigma_L t = k\Big[x - \sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n(f_n + f'_n)\Big] - \sigma_w t - \sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n(\sigma_{Ln} - \sigma_{wn})t, \tag{27}$$

$$k(b + d) = k\Big[d + y - \sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n(g_n + g'_n)\Big], \tag{28}$$

其中

$$\sigma_L = \sigma_{L0} + \sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n\sigma_{Ln},$$

$$\sigma_w = \sigma_{w0} + \sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n\sigma_{wn},$$

$$\sigma_{L0} = \sigma_{w0} = \sigma_0. \tag{29}$$

收集同阶量,即可得到各阶 Euler 形式解与 Lagange 形式解间的转换关系 并由波动并处于无共振情况得出 Euler 形式解中前进重力波波形脉动的周波率 $\sigma_w$.基于此,应用已有的(4)—(6)式或上节所求得的(22),(24)与(26)式的 Lagrange 形式解,就能把已知的 Lagrange 形式解的流速势函数 $\phi(a,b,t)$、流体质点速度的水平分量 $x_t = U(a,b,t)$ 与垂直分量 $y_t = V(a,b,t)$ 及水位 $y(a,0,t)$ 等,成功地转换成事先完全未知的 Euler 形式的流速势函数 $\Phi(x,y,t)$、速度水平分量 $u(x,y,t)$ 与速度垂直分量 $v(x,y,t)$ 及水位 $y(x,t)$ 等,并可以证明准确无误.其详细的推导过程如下.

由于前进重力波 Lagrange 形式解中,各阶量 $f_n$,$f'_n$ 与 $g_n$,$g'_n$ 皆为 $a$,$b$ 与 $t$ 的函数,因此利用(27)—(29)式将它们于 $a$ 在 $x$,$b$ 在 $y$,及 $\sigma_L t$ 在 $\sigma_w t$ 连续展开,由已知展开至 $\alpha^3$ 的解(4)—(7)式中 $f'_n = g'_n = 0$ 与 $\sigma_L$ 为常数下,应用(27)—(29)式进行连续的 Taylor 's 级数展开至 $\alpha^3$ 阶,以通式的函数形式 $\varepsilon^m F_m(a,b,\sigma_L t)$ 表示则有

$$\begin{aligned}
&\alpha^m F_m(a,b,\sigma_L t)\\
&= \alpha^m F_m(x,y,\sigma_w t) + \sum_{m_1=1}^{\infty}\frac{1}{m!}\\
&\quad\times\Big\{-\frac{\partial}{\partial a}\Big|_{\substack{a=x\\ b=y\\ \sigma_L=\sigma_w}}\Big[\sum_{n=1}^{\infty}\alpha^n f_n(a,b,\sigma_L t)\Big]\\
&\quad-\frac{\partial}{\partial b}\Big|_{\substack{a=x\\ b=y\\ \sigma_L=\sigma_w}}\Big[\sum_{n=1}^{\infty}\alpha^n g_n(a,b,\sigma_L t)\Big]\\
&\quad-\frac{\partial}{\partial(\sigma_L t)}\Big|_{\substack{a=x\\ b=y\\ \sigma_L=\sigma_w}}\Big[\sum_{n=1}^{\infty}\alpha^n(\sigma_{wn} - \sigma_{Ln})t\Big]\Big\}^{m_1}
\end{aligned}$$

$$\times \alpha^m F_m(a,b,\sigma_L t), \tag{30}$$

又因无共振情形的发生，故需 $\sigma_{Ln}=\sigma_{wn}$ 即 $\sigma_L=\sigma_w$. 因此，(30)式又可写为

$$\begin{aligned}
&\alpha^m F_m(a,b,\sigma_L t)\\
&=\alpha^m F_m(x,y,\sigma_w t)\\
&\quad+\sum_{m_1=1}^{\infty}\frac{1}{m_1!}\Big\{-\frac{\partial}{\partial a}\Big|_{\substack{a=x\\b=y\\\sigma_L=\sigma_w}}\Big[\sum_{n=1}^{\infty}\alpha^n f_n(a,b,\sigma_L t)\Big]\\
&\quad-\frac{\partial}{\partial b}\Big|_{\substack{a=x\\b=y\\\sigma_L=\sigma_w}}\Big[\sum_{n=1}^{\infty}\alpha^n g_n(a,b,\sigma_L t)\Big]\Big\}^{m_1}\alpha^m F_m(a,b,\sigma_w t)\\
&=\alpha^m F_m(x,y,\sigma_w t)\\
&\quad+\sum_{m_1=1}^{\infty}\frac{1}{m_1!}\Big\{-\frac{\partial}{\partial a}\Big|_{\substack{a=x\\b=y\\\sigma_L=\sigma_w}}\Big[\sum_{n=1}^{\infty}\alpha^n f_n(x,y,\sigma_w t)\\
&\quad+\frac{1}{m_2!}\Big(-\frac{\partial}{\partial a}\Big|_{\substack{a=x\\b=y\\\sigma_L=\sigma_w}}\Big[\sum_{n_1=1}^{\infty}\alpha^{n_1} f_{n_1}(a,b,\sigma_L t)\Big]\\
&\quad-\frac{\partial}{\partial b}\Big|_{\substack{a=x\\b=y\\\sigma_L=\sigma_w}}\Big[\sum_{n_1=1}^{\infty}\alpha^{n_1} g_{n_1}(a,b,\sigma_L t)\Big]\Big)^{m_2}\\
&\quad\times\sum_{n=1}^{\infty}\alpha^n f_n(a,b,\sigma_L t)\Big]\\
&\quad-\frac{\partial}{\partial b}\Big|_{\substack{a=x\\b=y\\\sigma_L=\sigma_w}}\Big[\sum_{n=1}^{\infty}\alpha^n g_n(x,y,\sigma_w t)\\
&\quad+\frac{1}{m_2!}\Big(-\frac{\partial}{\partial a}\Big|_{\substack{a=x\\b=y\\\sigma_L=\sigma_w}}\Big[\sum_{n_1=1}^{\infty}\alpha^{n_1} f_{n_1}(a,b,\sigma_L t)\Big]\\
&\quad-\frac{\partial}{\partial b}\Big|_{\substack{a=x\\b=y\\\sigma_L=\sigma_w}}\Big[\sum_{n_1=1}^{\infty}\alpha^{n_1} g_{n_1}(a,b,\sigma_L t)\Big]\Big)^{m_2}\\
&\quad\times\sum_{n=1}^{\infty}\alpha^n g_n(a,b,\sigma_L t)\Big]\Big\}^{m_1}\alpha^m F_m(a,b,\sigma_w t)\\
&=\Big\{\alpha^m F_m-\alpha^{m+1}\Big[f_1\frac{\partial F_m}{\partial a}+g_1\frac{\partial F_m}{\partial b}\Big]\\
&\quad+\alpha^{m+2}\Big[-f_2\frac{\partial F_m}{\partial a}-g_2\frac{\partial F_m}{\partial b}+f_1\frac{\partial f_1}{\partial a}\frac{\partial F_m}{\partial a}\\
&\quad+g_1\frac{\partial f_1}{\partial b}\frac{\partial F_m}{\partial a}+f_1\frac{\partial g_1}{\partial a}\frac{\partial F_m}{\partial b}+g_1\frac{\partial g_1}{\partial b}\frac{\partial F_m}{\partial b}\\
&\quad+\frac{1}{2}\Big(f_1^{\,2}\frac{\partial^2 F_m}{\partial a^2}+2f_1g_1\frac{\partial^2 F_m}{\partial a\partial b}+g_1^{\,2}\frac{\partial^2 F_m}{\partial b^2}\Big)\Big]\Big\}_{\substack{a=x\\b=y\\\sigma_L=\sigma_w}}\\
&\quad+O(\alpha^{m+3}).
\end{aligned}\tag{31}$$

应用(31)式，把前进重力波的 Lagrange 形式解经连续的 Taylor 级数展开. 由已知的 Lagrange 形式解转换成事先完全未知的 Euler 形式解至第三阶时，有

$$\begin{aligned}
\frac{k}{\sigma_0}u&=\frac{k}{\sigma_0}\frac{\partial}{\partial t}x(a,b,t)\\
&=k\alpha\frac{\cosh k(d+y)}{\cosh kd}\cos(kx-\sigma_w t)\\
&\quad+\frac{3}{4}k^2\alpha^2(\omega_0^{-2}-\omega_0^2)\frac{\cosh 2k(d+y)}{\cosh 2kd}\\
&\quad\times\cos 2(kx-\sigma_w t)\\
&\quad+k^3\alpha^3\Big[\frac{1}{4}(1-\omega_0^2)\frac{\cosh k(d+y)}{\cosh kd}\\
&\quad\times\cos(kx-\sigma_w t)\\
&\quad+\frac{3}{64}(9\omega_0^{-4}+5\omega_0^{-2}-53+39\omega_0^2)\\
&\quad\times\frac{\cosh 3k(d+y)}{\cosh 3kd}\cos 3(kx-\sigma_w t)\Big]\\
&=\frac{k}{\sigma_0}U(x,y,t),
\end{aligned}\tag{32a}$$

$$\begin{aligned}
\frac{k}{\sigma_0}v&=\frac{k}{\sigma_0}\frac{\partial}{\partial t}y(a,b,t)\\
&=k\alpha\frac{\sinh k(d+y)}{\cosh kd}\sin(kx-\sigma_w t)\\
&\quad+\frac{3}{4}k^2\alpha^2(\omega_0^{-2}-\omega_0^2)\frac{\sinh 2k(d+y)}{\cosh 2kd}\\
&\quad\times\sin 2(kx-\sigma_w t)\\
&\quad+k^3\alpha^3\Big[\frac{1}{4}(1-\omega_0^2)\frac{\sinh k(d+y)}{\cosh kd}\\
&\quad\times\sin(kx-\sigma_w t)\\
&\quad+\frac{3}{64}(9\omega_0^{-4}+5\omega_0^{-2}-53+39\omega_0^2)\\
&\quad\times\frac{\sinh 3k(d+y)}{\cosh 3kd}\sin 3(kx-\sigma_w t)\Big]\\
&=\frac{k}{\sigma_0}V(x,y,t),
\end{aligned}\tag{32b}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{k^2}{\sigma_0}\phi(a,b,t)\\
&=k\alpha\frac{\cosh k(d+y)}{\cosh kd}\sin(kx-\sigma_w t)\\
&\quad+k^2\alpha^2\Big[\frac{3}{8}(\omega_0^{-2}-\omega_0^2)\frac{\cosh 2k(d+y)}{\cosh 2kd}\\
&\quad\times\sin 2(kx-\sigma_w t)-\frac{1}{4}(1-\omega_0^2)\sigma_0 t\Big]\\
&\quad+k^3\alpha^3\Big[\frac{1}{4}(1-\omega_0^2)\frac{\cosh k(d+y)}{\cosh kd}\\
&\quad\times\sin(kx-\sigma_w t)\\
&\quad+\frac{1}{64}(9\omega_0^{-4}+5\omega_0^{-2}-53+39\omega_0^2)\\
&\quad\times\frac{\cosh 3k(d+y)}{\cosh 3kd}\sin 3(kx-\sigma_w t)\Big]
\end{aligned}$$

$$= \frac{k^2}{\sigma_0} \Phi(x, y, t), \tag{32c}$$

$$\sigma_w = \sigma_0 + \frac{1}{16} \sigma_0 k^2 \alpha^2 (9\omega_0^{-2} - 10 + 9\omega_0^2), \tag{32d}$$

$$\begin{aligned} k\eta(x,t) = & k\alpha\omega_0 \cos(kx - \sigma_w t) \\ & + \frac{1}{4} k^2 \alpha^2 (3\omega_0^{-1} - \omega_0) \cos 2(kx - \sigma_w t) \\ & + k^3 \alpha^3 \Big[ \frac{1}{16} (3\omega_0^{-1} + 12\omega_0 - 13\omega_0^3) \\ & \times \cos(kx - \sigma_w t) \\ & + \frac{1}{64} (27\omega_0^{-3} - 9\omega_0^{-1} + 9\omega_0 - 3\omega_0^3) \\ & \times \cos 3(kx - \sigma_w t) \Big]. \end{aligned} \tag{32e}$$

至此所考虑的前进重力波波动场的 Lagrange 形式的流场解,转换成为对应完整的 Euler 形式表示所必需呈现出的流场中流速势函数、流速与分散关系及水位等物理量.在 Euler 形式表示下的时空函数关系展开至第三阶次量皆已被求出如(32a)—(32e)式所示,其结果与单纯由 Euler 形式描述下的流场解(1)—(3)式完全相同.

## 5. 结 论

本文对具非旋转性运动的理想流体中,其前进重力波波动场在 Euler 与 Lagrange 两种不同的方式描述下,由展开至第三阶的流场解析解,按照质量守衡性、同一流体质点在同一时空流速唯一、在自由表面水位处 Euler 形式解与 Lagrange 形式解应该相同,而且考虑到流体质点运动频率 $\sigma_L$ 与波浪波形频率 $\sigma_w$ 不同的特性,来推导它们之间可以相互转换,并且论述它们各自描述波动场的整体特性.按照所得结果,有几点明确的结论如下.

1. 单纯以完整的 Euler 或 Lagrange 形式描述下,解析所得到的前进重力波波动的 Euler 或 Lagrange 形式的两种流场解,在考虑到流体质点的运动轨迹与运动周期下,对它们各自进行连续的 Taylor 级数展开下是一致的,且可完全相互转换..

2. 在上述的转换关系下,Euler 形式的波动流场解析解可以描述出波动场中的流体质点的运动轨迹与其运动的周期,及前进波动场中衍生出的质量传输.

3. 对流场中具有非旋转者的流体质点运动,以 Lagrange 形式描述下解析所得的结果,是可转换成以 Euler 形式描述下的 ;用这两种不同方式描述与解析的流体非旋转性运动,结果一致.

[1] Stokes G G 1847 *Trans. Camb. Phil. Soc.* **8** 441
[2] Korteweg D J, de Vries G 1895 *Phil. Mag.* **39** 422
[3] Boussinesq J 1871 *Comptes Rendus* **72** 755
[4] Fenton J D 1985 *J. Water., Port, Coast. Ocean Engine.*, ASCE, **3** 216
[5] Cokelet E D 1977 *Phil. Trans. R. Soc. Lond.* A **286** 183
[6] Williams J M 1981 *Phil. Trans. R. Soc. Lond.* A **302** 139
[7] Gerstner F J 1802 *Abh. d. K. bohm. Ges. Wiss.* reprinted in *Ann. der Physik* 1809 **32** 412
[8] Rankine W J M 1863 *Phil. Trans. Roy. Soc.* A **153** 127
[9] Miche A 1944 *Annales des ponts et chausses* 25
[10] Pierson W J 1962 *J. Geophy, Res.* **67**(8) 3151
[11] Pao H F 1967 *Fluid Dynamics*, Merrill Books, Inc., Columbus, p133 – 134
[12] Lamb H 1932 *Hydrodynamics* (6th ed.) (Cambridge University Press.) pp31 – 35
[13] Chen Y Y, Hsu H C (in preparation)
[14] Chen Y Y, Hsu H C (in preparation)
[15] Wiegel R L 1964 *Oceanographical Engineering* Prentice-Hall, New Jersey.
[16] Chen Y Y, Hsu H C, Chen G Y and Hwung H H 2006 *Wave Motion* **43** 356
[17] Longuet-Higgins M S 1986 *J. Fluid Mech.* **173** 683
[18] Longuet-Higgins M S 1987 *J. Fluid Mech.* **179** 547
[19] Chen Y Y 1990 *Habour Technology* **5** 1 (in Chinese) [陈阳益 1990 港湾技术 **5** 1]

# The transformation between the third-order Eulerian and Lagrangian solutions for irrotational progressive gravity waves

Chen Yang-Yih[1)†] Hsu Hung-Chu[2)]

1)（Department of Marine Environment and Engineering，National Sun Yat-Sen University，Kaohsiung 807，China）

2)（Tainan Hydraulics Laboratory，National Cheng Kung University，Tainan 701，China）

（Received 14 December 2007；revised manuscript received 2 April 2008）

Abstract

This study reports the transformation between the third-order Eulerian and Lagrangian solutions for the progressive water gravity waves propagating on water of uniform depth. Regarding to the motion of a marked fluid particle，the instantaneous velocity，mass conservation and free surface must be the same for solufions of either Eulerian or Lagrangian method. Using a successive Taylor series expansion to the path and the period of particle motion，the given conventional Eulerian solutions can be transformed into the completely unknown Lagrangian solutions and the reversible process is also identified. In the asymptotic solution，the explicit parametric equation of water particles can be obtained. In particular，the Lagrangian mean level and the Lagrangian wave frequency which differ from those in the Eulerian approach are found as part of the solutions. It shows that the present technique provides a modified method to obtain the third-order Lagrangian solution from the known Eulerian solutions.

**Keywords**：irrotational progressive gravity waves，Euler-Lagrange transformation，particle trajectory，Lagrangian wave frequency

**PACC**：0340，4735，9210F

† E-mail：yichen@mail.nsysu.edu.tw