

大 N 近似下旋量玻色 - 爱因斯坦凝聚 的基态能级分裂*

徐 岩¹⁾ 贾多杰²⁾ 李照鑫¹⁾ 侯风超¹⁾ 谭 磊³⁾ 张鲁殷¹⁾

1) 山东科技大学理学院, 青岛 266510)

2) 西北师范大学理论物理研究所, 兰州 730030)

3) 兰州大学理论物理研究所, 兰州 730000)

(2008 年 5 月 3 日收到, 2008 年 6 月 19 日收到修改稿)

采用超越单模近似, 研究了纯光学势阱中自旋 $s = 1$ 的旋量 BEC 对单模的模式偏离效应. 通过对有效哈密顿量的能量泛函变分, 给出了模式偏离修正因子 ϵ , 并计算了模式偏离修正因子和分裂能随凝聚体粒子数 N 的变化关系.

关键词: 玻色-爱因斯坦凝聚, GP 泛函, 单模近似

PACC: 0365, 0570

1. 引 言

自从实验上实现了利用纯光学势阱^[1-3]冷却和俘获原子, 旋量玻色-爱因斯坦凝聚(BEC)成为理论和实验工作者的研究热点. 这种冷却方法可以把凝聚原子的内部自旋自由度充分释放开来, 以便于研究旋量 BEC 的性质. 旋量 BEC 是一种新形式的宏观相干物质, 它所呈现出的丰富量子结构, 可以更细致地研究量子多体关联理论. 旋量 BEC 的一个重要的特征是两个或多个超精细自旋态具有几乎相同的能量, 自旋自由度也成为了一个相关的动力学变量. Ho^[4]和 Ohmi^[5]最先给出了多分量 BEC 的量子理论. 基于他们的理论框架, 利用平均场理论, 大量在标量 BEC 中所不具有的新现象^[6-8]被预言出来. 为了理解旋量 BEC 的主要特征, Law 等人^[9]采用超越平均场近似, 给出了旋量 BEC 自旋相互作用的有效模型, 发现自旋交换散射导致凝聚体的动力学行为十分复杂. 尽管系统仍然处于基态, 强的自旋交换作用通常使旋量 BEC 不同的超精细自旋分量处于混合状态.

单模近似^[10]是一种简单的超越平均场近似, 经常被用来描述内部的自旋动力学问题^[9], 如自旋 S

$= 1$ 或 $S = 2$ ^[11]的精确本征态及磁响应等. 但 Yi 等^[12]指出, 单模近似对原子间的铁磁相互作用是一个有效的近似, 而对于反铁磁相互作用却是不正确的.

本文采用简单的超越单模近似, 研究了自旋 $S = 1$ 的三分量旋量 BEC 的基态性质. 由于上下两个超精细自旋态($f = \pm 1$)与中间的自旋态($f = 0$)之间的差别极小, 这种模式偏离会引起原来的集体自旋态的哈密顿量发生细小的分裂. 分裂能隙的大小正比于赝磁量子数的平方, 且随着凝聚体粒子数的增多而减小.

2. 大 N 近似下旋量 BEC 的基态性质

2.1. 二体关联作用

低温下, 两个碱金属原子之间的相互作用主要依赖于它们自旋(包括自旋单重态和自旋三重态)之间的交换作用. 原子的超精细自旋态在相互碰撞散射后可以改变. 当体系的温度非常低时, 两个处于低自旋态的原子碰撞后仍保留在低自旋态, 而两个处于高自旋态的原子碰撞后有可能进入低自旋态. 因此在光学势阱中, 所有原子都处于低自旋态的基态

* 国家自然科学基金(批注号: 10704031)和甘肃省自然科学基金(3ZS061-A25-035)资助的课题.

之上.系统的低能散射动力学由二体相互作用的对关联作用模型来描述.它在超精细自旋空间具有旋转对称性,并保持了单个原子的超精细自旋.对关联作用的一般形式为

$$U(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \sum_{F=0}^{2f} g_F P_F, \quad (1)$$

其中 $g_F = 4\pi\hbar^2 a_F/m$ 为 F 通道原子间的相互作用强度, a_F 为 F 通道原子的 s 波散射长度; $P_F =$

$\sum_{M_F=-F}^F |F, M_F\rangle \langle F, M_F|$ 是对 1 和对 2 在总超精细自

旋 F 态上的投影算符, 满足 $\sum_{F=0}^{2f} P_F = 1$. 当 $f = 1$ 时,

$$P_0 + P_2 = 1, \quad (2)$$

则有

$$U = \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) (g_0 P_0 + g_2 P_2), \quad (3)$$

为描述 $S = 1$ 的旋量 BEC 的原子间的相互作用强度. 当 $f = 0$ 时, $P_0 = 1$, $U = \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) g_0 P_0 = U_0$, 即为标量 BEC 原子间的相互作用强度.

自旋之间的相互作用满足 Heisenberg 交换作用模型, 其矩阵形式为

$$\begin{aligned} F_1 \cdot F_2 &= [(F_1 + F_2)^2 - F_1^2 - F_2^2]/2 \\ &= \sum_{F=0}^{2f} \lambda_F P_F, \end{aligned} \quad (4)$$

这是因为其矩阵元表示如下:

$$\begin{aligned} &l |F_1 \cdot F_2| m \\ &= l |(F_1 + F_2)^2 - F_1^2 - F_2^2| m / 2 \\ &= \sum_F l |F \quad F| (F_1 + F_2)^2 - F_1^2 - F_2^2 | m, \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} &l |F_1 \cdot F_2| m \\ &= \sum_F [F(F+1) \\ &\quad - 2f(f+1)]/2 \quad l |F \quad F| m \\ &= \sum_F \lambda_F (P_F)_{lm}, \end{aligned}$$

其中总自旋量子数 F 可以取 0 或 2,

$$\lambda_F = [F(F+1) - 2f(f+1)]/2, \quad (5)$$

所以有

$$F_1 \cdot F_2 = P_2 - 2P_0, \quad (6)$$

联立(2)和(6)式可得 $P_0 = (1 - F_1 \cdot F_2)/3$, $P_2 = (2 + F_1 \cdot F_2)/3$, 所以自旋为 1 的粒子之间相互作用强度为

$$\begin{aligned} U &= g_0 P_0 + g_2 P_2 \\ &= (g_0 + 2g_2)/3 + (g_2 - g_0)/3 F_1 \cdot F_2 \end{aligned}$$

$$= \lambda_s + \lambda_a F_1 \cdot F_2, \quad (7)$$

其中 $\lambda_s = g_0 + 2g_2 = 4\pi\hbar^2(a_0 + 2a_2)/3m$, $\lambda_a = g_2 - g_0 = 4\pi\hbar^2(a_2 - a_0)/3m$.

2.2. 系统的有效哈密顿量

考虑到自旋 $S = 1$ 的粒子之间相互作用强度为(7)式, 旋量 BEC 二次量子化的哈密顿量的矩阵形式为

$$\begin{aligned} H &= \int d^3x \left(\frac{\hbar^2}{2m} \nabla \psi_\alpha^\dagger \cdot \nabla \psi_\alpha + V_{\text{ext}} \psi_\alpha^\dagger \psi_\alpha \right. \\ &\quad \left. + \frac{\lambda_s}{2} \psi_\alpha^\dagger \psi_\beta^\dagger \psi_\beta \psi_\alpha \right. \\ &\quad \left. + \frac{\lambda_a}{2} \psi_\alpha^\dagger \psi_\beta^\dagger F_{\alpha\beta} F_{\beta\alpha} \psi_\mu \psi_\nu \right) \end{aligned}$$

其中 $\psi_\alpha(r)$ 为 r 处原子自旋态 $|f, m_f\rangle$ ($m_f = 0, \pm 1$) 的湮没算符. 通常将两个自旋为 1 的原子所形成的总超精细自旋态 $|F, M_F\rangle$ 在各粒子自旋态的基矢 $|f = 1, m_f = \alpha\rangle \otimes |f = 1, m_f = \beta\rangle$ 的直积空间展开, 利用 $S = 1$ 的自旋矩阵的表示形式,

$$\begin{aligned} S_x &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \\ S_y &= \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{bmatrix}, \\ S_z &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

代入上式, 并将哈密顿量写成两部分 $H = H_s + H_a$ 的形式有

$$\begin{aligned} H_s &= \sum_\alpha \int d^3x \psi_\alpha^\dagger \left(-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V_{\text{ext}} \right) \psi_\alpha \\ &\quad + \frac{\lambda_s}{2} \sum_{\alpha\beta} \int d^3x \psi_\alpha^\dagger \psi_\beta^\dagger \psi_\beta \psi_\alpha, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} H_a &= \lambda_a/2 \int d^3x \left(\psi_1^\dagger \psi_1^\dagger \psi_1 \psi_1 + \psi_{-1}^\dagger \psi_{-1}^\dagger \psi_{-1} \psi_{-1} \right. \\ &\quad \left. + 2\psi_1^\dagger \psi_0^\dagger \psi_1 \psi_0 + 2\psi_{-1}^\dagger \psi_0^\dagger \psi_{-1} \psi_0 \right. \\ &\quad \left. - 2\psi_1^\dagger \psi_{-1}^\dagger \psi_1 \psi_{-1} + 2\psi_0^\dagger \psi_0^\dagger \psi_1 \psi_{-1} \right. \\ &\quad \left. + 2\psi_1^\dagger \psi_{-1}^\dagger \psi_0 \psi_0 \right). \end{aligned} \quad (9)$$

当 $|\lambda_s| \gg |\lambda_a|$ 时, 哈密顿量中的对称部分 H_s 占主导地位^[16], 每个自旋分量的凝聚体波函数可以近似地看成用同一个波函数描述, 即单模近似 $\phi_\kappa(\mathbf{x}) = \phi(\mathbf{x}) \chi_{\kappa = 0, \pm 1}$. 其中 $\phi(\mathbf{x})$ 由 Gross-

Pitaevskii (GP) 方程给出,

$$(-\hbar^2 \nabla^2 / 2m + V_{\text{ext}} + \lambda_s N |\phi|^2) \phi = \mu \phi, \quad (10)$$

其中 V_{ext} 为外加谐振子势, μ 为系统的化学势. 文献

[9] 取场算符形式为

$$\begin{aligned} \psi_\kappa &= \sqrt{N_\kappa} \phi_\kappa(x) \approx a_\kappa \phi_\kappa(x) \\ (\kappa &= 0, \pm 1). \end{aligned} \quad (11)$$

三个自旋分量的波函数一样(单模), 只是各分量上的粒子数布居稍有不同, 其中 a_κ 为玻色子的湮没算符. 我们取了最简单的超越单模近似, 认为三个分量上不仅粒子数布居不同, 且波函数的形式对单模也稍有偏离, 即 $\phi_\kappa = (1 + \varepsilon_\kappa) \phi$, $\varepsilon_\kappa = 0, \pm \varepsilon$. 因此取如下形式的尝试波函数:

$$\psi_\kappa = a_\kappa \phi_\kappa \approx a_\kappa (1 + \varepsilon_\kappa) \phi. \quad (12)$$

利用(10)和(12)式, 可以将 H_s, H_a 改写为

$$\begin{aligned} H_s &= \mu_s^\varepsilon \hat{N} - \lambda_s (N-1) \hat{N} \int |\phi|^4 d^3x \\ &+ \lambda_s (\hat{N}-1) \hat{N} / 2 \int |\phi|^4 d^3x \\ &- 2\varepsilon (a_{-1}^\dagger a_{-1} - a_1^\dagger a_1) \left(\mu_s^\varepsilon - \lambda_s N \int |\phi|^4 d^3x \right) \\ &+ 2\varepsilon \lambda_s \int |\phi|^4 d^3x a_0^\dagger a_1^\dagger a_0 a_1 \\ &- a_0^\dagger a_{-1}^\dagger a_0 a_{-1} + a_1^\dagger a_1^\dagger a_1 a_1 \\ &- a_{-1}^\dagger a_{-1}^\dagger a_{-1} a_{-1}), \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} H_a &= \lambda_a / 2 \int |\phi|^4 d^3x (a_1^\dagger a_1^\dagger a_1 a_1 + a_{-1}^\dagger a_{-1}^\dagger a_{-1} a_{-1} \\ &- 2a_1^\dagger a_{-1}^\dagger a_1 a_{-1} + 2a_1^\dagger a_0^\dagger a_1 a_0 \\ &+ 2a_{-1}^\dagger a_0^\dagger a_{-1} a_0 + 2a_0^\dagger a_0^\dagger a_1 a_{-1} + 2a_1^\dagger a_{-1}^\dagger a_0 a_0) \\ &+ 2\varepsilon \lambda_a \int |\phi|^4 d^3x (a_1^\dagger a_1^\dagger a_1 a_1 - a_{-1}^\dagger a_{-1}^\dagger a_{-1} a_{-1} \\ &+ a_1^\dagger a_0^\dagger a_1 a_0 - a_{-1}^\dagger a_0^\dagger a_{-1} a_0), \end{aligned} \quad (14)$$

其中 μ_s^ε 为修正后系统的化学势, 具体形式见后面

(26) 式, $\hat{N} = \sum a_\kappa^\dagger a_\kappa$ 为粒子数算符,

$$\hat{N} = \hat{N}_1 + \hat{N}_0 + \hat{N}_{-1} = a_1^\dagger a_1 + a_0^\dagger a_0 + a_{-1}^\dagger a_{-1}. \quad (15)$$

定义如下算符,

$$\begin{aligned} \hat{L}_+ &\equiv \sqrt{2} (a_0^\dagger a_1 + a_{-1}^\dagger a_0), \\ \hat{L}_- &\equiv \sqrt{2} (a_1^\dagger a_0 + a_0^\dagger a_{-1}), \\ \hat{L}_z &\equiv a_{-1}^\dagger a_{-1} - a_1^\dagger a_1, \end{aligned} \quad (16)$$

它们满足 $SU(2)$ 代数,

$$[\hat{L}_+, \hat{L}_-] = 2\hat{L}_z, \quad [\hat{L}_z, \hat{L}_\pm] = \pm \hat{L}_\pm, \quad (17)$$

令

$$\begin{aligned} \lambda'_s &= \frac{\lambda_s}{2} \int |\phi|^4 d^3x, \\ \lambda'_a &= \frac{\lambda_a}{2} \int |\phi|^4 d^3x, \end{aligned} \quad (18)$$

利用(16)和(18)式, 可以把(13)和(14)式化简为

$$\begin{aligned} H_s &= \mu_s^\varepsilon N - \lambda'_s \hat{N} (2N - \hat{N} - 1) \\ &- 2\varepsilon (\mu_s^\varepsilon - 2\lambda'_s N) \hat{L}_z + 4\varepsilon \lambda'_s (1 - \hat{N}) \hat{L}_z, \\ H_a &= \lambda'_a (\hat{L}^2 - 2\hat{N}) + 4\varepsilon \lambda'_a (1 - \hat{N}) \hat{L}_z, \end{aligned} \quad (19)$$

这样自旋 $S=1$ 的旋量 BEC 系统总的哈密顿量可以写成如下形式:

$$\begin{aligned} H &= \mu_s^\varepsilon N - \lambda'_s \hat{N} (2N - \hat{N} - 1) \\ &+ \lambda'_a (\hat{L}^2 - 2\hat{N}) + H_{\text{sp}}, \\ H_{\text{sp}} &= 4\varepsilon [\lambda'_s (1 + N - \hat{N}) \\ &+ \lambda'_a (1 - \hat{N}) - \mu_s^\varepsilon / 2] \hat{L}_z, \end{aligned} \quad (20)$$

其中 H_{sp} 为分裂部分的哈密顿量.

设 $S=1$ 的旋量 BEC 系统处于一系列 Fock 态 $|N, l, m_l\rangle$ 上, 考虑到(17)和(18)式, 满足,

$$\begin{aligned} \hat{L}^2 |N, l, m_l\rangle &= l(l+1) |N, l, m_l\rangle, \\ \hat{L}_z |N, l, m_l\rangle &= m_l |N, l, m_l\rangle. \end{aligned} \quad (21)$$

当 N 为偶数时, $l = 0, 2, 4, \dots, N$; 当 N 为奇数时, $l = 1, 3, 5, \dots, N$. 所以系统的总能量为

$$\begin{aligned} E_{lm} &= \mu_s^\varepsilon N - \lambda'_s N(N-1) \\ &+ \lambda'_a [l(l+1) - 2N] + E_{lm}^{\text{sp}}, \\ E_{lm}^{\text{sp}} &= 4\varepsilon [\lambda'_s + \lambda'_a (1 - N) - \mu_s^\varepsilon / 2] m_l, \end{aligned} \quad (22)$$

其中 E_{lm}^{sp} 为分裂能. 当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时(22)式回到单模近似情况的结果.

2.3. 大 N 近似下 BEC 自旋态的能级分裂

对于大 N 情况($N > 10^5$), 略去 GP 方程中系统的动能项, 采用 Thomas-Fermi (TF) 近似, 取各向同性谐振子势具有球对称的形式 $V_{\text{ext}}(r) = m\omega_0^2 r^2 / 2$, 其中 ω_0 为谐振子势阱频率. 由(11)式得

$$\phi = \left[\frac{\mu}{\lambda_s N} \left(1 - \frac{r^2}{R} \right) \right]^{1/2}, \quad (23)$$

其中, $R = \sqrt{\frac{2\mu}{m\omega_0^2}}$ 为 TF 近似下 BEC 凝聚体的半径,

当 $r > R$ 时, $\phi = 0$. 由粒子数守恒条件 $\sum_\kappa \phi_\kappa^\dagger \phi_\kappa = N$, 即 $\sum_\kappa N_\kappa \int |\phi_\kappa|^2 d^3x = N$, 及 $N_\kappa / N \approx 1/3 e^{-2\varepsilon_\kappa}$, 给出 $[(1 + \varepsilon)^2 e^{-2\varepsilon} + 1 + (1 - \varepsilon)^2 e^{2\varepsilon}] \int |\phi|^2 d^3x = 3$, 因此, 可以得到

$$\int |\phi|^2 d^3x = \int \frac{\mu}{\lambda_s N} \left(1 - \frac{r^2}{R}\right) d^3x = 1 + \frac{4}{3} \epsilon^2. \quad (24)$$

选取球坐标系积分上式得到修正后的化学势为

$$\mu_s^\epsilon = \left(1 + \frac{4}{3} \epsilon^2\right) \frac{15\lambda_s N}{8\pi R_{TF}^3}, \quad (25)$$

其中凝聚体的 TF 半径 $R_{TF} = \sqrt{\frac{2\mu_s^\epsilon}{m\omega_0}}$ 又是化学势 μ_s^ϵ 的函数. 最后得到化学势的表达式为

$$\mu_s^\epsilon = \left(1 + \frac{8}{15} \epsilon^2\right) \frac{\hbar\omega_0}{2} \left(\frac{15Na_s}{a_{ho}}\right)^{2/5}, \quad (26)$$

其中 $a_s = (a_0 + 2a_2)/3$ 为旋量 BEC 的平均 s 波散射长度, $a_{ho} = \sqrt{\hbar/m\omega_0}$ 为谐振子的长度. 由(23)和(26)式可得

$$\begin{aligned} \lambda'_s &= \frac{\lambda_s}{2} \int |\phi|^4 d^3x \\ &= \left(1 + \frac{28}{15} \epsilon^2\right) \frac{15a_s}{7a_{ho}} \left(\frac{15Na_s}{a_{ho}}\right)^{-3/5} \hbar\omega_0. \end{aligned} \quad (27)$$

定义

$$\begin{aligned} a_{ra} &= \lambda_a/\lambda_s = \lambda'_a/\lambda'_s \\ &= (g_2 - g_0)(g_0 + 2g_2) \\ &= (a_2 - a_0)(a_0 + 2a_2), \end{aligned} \quad (28)$$

系统处于稳定状态时, 能量取极小, 将(22)式对 ϵ 变分, 并利用(28)式得到,

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_{lm}}{\partial \epsilon} &= \frac{\partial \mu_s^\epsilon}{\partial \epsilon} N - \frac{\partial \lambda'_s}{\partial \epsilon} N(N-1) \\ &+ a_{ra} \frac{\partial \lambda'_s}{\partial \epsilon} [K(l+1) - 2N] + \frac{\partial E_{lm}^{sp}}{\partial \epsilon} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_{lm}^{sp}}{\partial \epsilon} &= 4[\lambda'_s + \lambda'_a(1-N) - \mu_s^\epsilon/2] m_l \\ &+ 4\epsilon \left\{ \frac{\partial \lambda'_s}{\partial \epsilon} [1 + a_{ra}(1-N)] - \frac{\partial \mu_s^\epsilon}{2\partial \epsilon} \right\} m_l. \end{aligned} \quad (29)$$

由(26)和(27)式知

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mu_s^\epsilon}{\partial \epsilon} &= \frac{8\epsilon}{15} \hbar\omega_0 \left(\frac{15Na_s}{a_{ho}}\right)^{2/5}, \\ \frac{\partial \lambda'_s}{\partial \epsilon} &= 8\epsilon \hbar\omega_0 \frac{a_s}{a_{ho}} \left(\frac{15Na_s}{a_{ho}}\right)^{-3/5}, \end{aligned} \quad (30)$$

代入到(29)式得到

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_{lm}}{\partial \epsilon} &= \frac{8\epsilon}{15} \hbar\omega_0 \left(\frac{15Na_s}{a_{ho}}\right)^{2/5} N \\ &- 8\epsilon \hbar\omega_0 \frac{a_s}{a_{ho}} \left(\frac{15Na_s}{a_{ho}}\right)^{-3/5} \\ &\times \{N(N-1) - a_{ra} [K(l+1) - 2N]\} \\ &+ \frac{\partial E_{lm}^{sp}}{\partial \epsilon} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_{lm}^{sp}}{\partial \epsilon} &= 4[\lambda'_s + \lambda'_a(1-N) - \mu_s^\epsilon/2] m_l \\ &+ 4\epsilon \left\{ 8\epsilon \hbar\omega_0 \frac{a_s}{a_{ho}} \left(\frac{15Na_s}{a_{ho}}\right)^{-3/5} \right. \\ &\times [1 + a_{ra}(1-N)] \\ &\left. - \frac{4\epsilon}{15} \hbar\omega_0 \left(\frac{15Na_s}{a_{ho}}\right)^{2/5} \right\} m_l. \end{aligned}$$

由于 ϵ 为小量, 略去 ϵ^2 项, 利用(25)和(27)式, 并两边同时除以 $\hbar\omega_0 \left(\frac{15Na_s}{a_{ho}}\right)^{-3/5}$, 上式变为

$$\begin{aligned} 4\epsilon [(l^2 + l - 2N)a_{ra} + N] \\ = 15m_l \{ 2[a_{ra}(N-1) - 1]/7 + N/2 \}, \end{aligned}$$

即

$$\epsilon \approx \frac{5}{8} m_l \frac{3 + 12[a_{ra} - 1/N]/7}{1 - 2a_{ra} + a_{ra}(l^2 + l)/N}. \quad (31)$$

可见, 超越单模近似的修正量 ϵ 正比于磁量子数 m_l , 且随着粒子数 N 的增大而减小. 显然, 我们的近似要求 $|m_l| \ll N$, $l \rightarrow N$, 以保证 ϵ 为小量. 将(31)式代入到(22)式, 并略去 ϵ 的二次项, 化简得总能及分裂能为

$$\begin{aligned} \frac{E_{lm}}{N\hbar\omega_0} &= \frac{15a_s/a_{ho}}{(15Na_s/a_{ho})^{3/5}} \\ &\times \left[\frac{5N}{14} + \frac{1}{7} + \frac{a_{ra}(l^2 + l - 2N)}{7N} \right] \\ &+ \frac{E_{lm}^{sp}}{N\hbar\omega_0}, \\ \frac{E_{lm}^{sp}}{N\hbar\omega_0} &= \frac{-30\epsilon m_l a_s/a_{ho}}{(15Na_s/a_{ho})^{3/5}} \\ &\times \left\{ \frac{2}{7} \left[a_{ra} \left(1 - \frac{1}{N}\right) - \frac{1}{N} \right] + \frac{1}{2} \right\}. \end{aligned} \quad (32)$$

分裂能占总能的比重为

$$\frac{E_{lm}^{sp}}{E_{lm}} = -2\epsilon m_l \frac{7 + 4(a_{ra} - 1/N)}{5N + 16 + 2a_{ra}[(l^2 + l)/N - 2]}. \quad (33)$$

从(33)和(34)式可以看出, 分裂能部分和分裂比重都正比于 ϵ , m_l , 且随着粒子数 N 的增大而减小.

2.4. 对⁸⁷Rb 和²³Na 的应用

对于⁸⁷Rb 原子两个散射通道 ($F = 0$ 和 $F = 2$) 的实验数据估值^[14]为 $a_0 = 101.8a_B$, $a_2 = 100.4a_B$, 其中 a_B 为原子的玻尔半径, 则相互作用强度之比 $\lambda_a/\lambda_s \approx -1/216$. 对于²³Na 原子实验数据估计^[15]为 $a_0 = (50.0 \pm 1.6)a_B$, $a_2 = (55.0 \pm 1.7)a_B$, 则 $\lambda_a/\lambda_s \approx 1/32$. 我们选取实验中所采用的典型的谐振子长度

$a_{ho} = 1.2 \mu\text{m}$ 取磁量子数 $m_l = 5$, 轨道量子数 $l = N/3$, 对 ^{87}Rb 和 ^{23}Na 原子计算了模式偏离修正因子 ϵ 随着粒子数 N ($10^5 \leq N \leq 10^7$) 的变化关系 (见图 1).

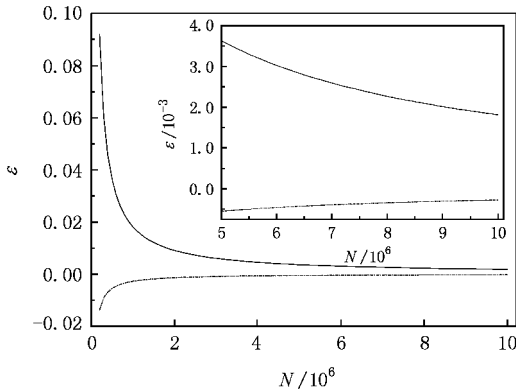


图 1 模式偏离修正因子 ϵ 随粒子数 N 的变化曲线 (实线对应 ^{87}Rb , 虚线对应 ^{23}Na). 参数取值 $a_{ho} = 1.2 \mu\text{m}$, $m_l = 10$, $l = N/3$, $10^5 \leq N \leq 10^7$. 图中的小插图为相同参数下模式偏离修正因子 ϵ 在 $N: 5 \times 10^6 - 1 \times 10^7$ 范围内的变化曲线 (实线对应 ^{87}Rb , 虚线对应 ^{23}Na)

图 2 给出了同样参数情况下分裂能 E_{lm}^{sp} 随着粒子数 N ($10^5 \leq N \leq 10^7$) 的变化关系. 由图可以看出模式偏离修正因子 ϵ 和分裂能 E_{lm}^{sp} 随着粒子数 N 的增大而迅速减小, 对于 ^{87}Rb 和 ^{23}Na , 分裂能典型的取值范围为 $(10^{-7} - 10^{-3})\hbar\omega_0$.

旋量 BEC 的单粒子总能随粒子数 N 的变化关系与 TF 近似下的总能 $5\mu/7$ 随粒子数的变化关系几乎完全相同, 在图中无法区分, 因此我们没有给出具体关系曲线, 其数量级约为几十 $\hbar\omega_0$, 且随着粒子数 N 的增大而增大.

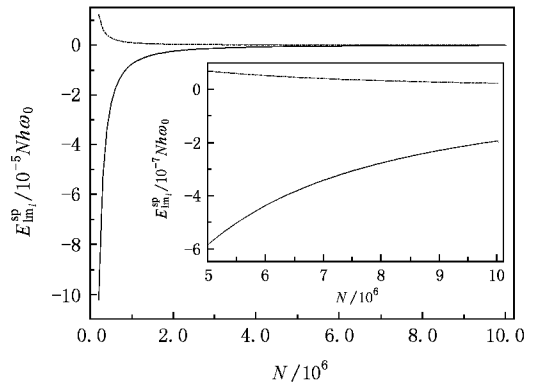


图 2 分裂能 E_{lm}^{sp} 随着粒子数 N ($10^5 \leq N \leq 10^7$) 的变化曲线 (实线对应 ^{87}Rb , 虚线对应 ^{23}Na). 参数取值同图 1. 图中的小插图为相同参数下分裂能 E_{lm}^{sp} 在 $N: 5 \times 10^6 - 1 \times 10^7$ 范围内的变化曲线 (实线对应 ^{87}Rb , 虚线对应 ^{23}Na)

3. 结果与讨论

本文采用简单的超越单模近似, 研究了纯光学势阱中自旋 $s = 1$ 的旋量 BEC 对单模的模式偏离效应. 通过对有效哈密顿量的能量泛函变分, 确定了模式偏离修正因子 ϵ , 并且计算了模式偏离修正因子和分裂能随凝聚体粒子数 N 的变化关系. 发现对于 ^{87}Rb 和 ^{23}Na , 分裂能典型的取值范围为 $(10^{-7} - 10^{-3})\hbar\omega_0$, 且随着粒子数 N 的增大而迅速减小, 这类似于晶体中原子的能级在晶体场的作用下分裂成能带, 处于玻色-爱因斯坦凝聚状态的粒子数越多, 能级交叠的就越厉害, 分裂能占总能的比值越小.

[1] Stamper-Kurn D M, Andrews M R 1998 *Phys. Rev. Lett.* **80** 2027
 [2] Myatt C J, Burt E A 1998 *Phys. Rev. Lett.* **78** 586
 [3] Stenger J, Inouye S 1998 *Nature* **396** 345
 [4] Ho T L 1998 *Phys. Rev. Lett.* **81** 742
 [5] Ohmi T, Machida K 1998 *J. Phys. Soc. Japan* **67** 1822
 [6] Wang D L, Yan X H, Tang Y 2004 *Chin. Phys.* **13** 2030
 [7] Khawaja U A, Stoof H 2001 *Nature* **411** 918
 [8] Ruostekoski J 2000 *Phys. Rev. A* **61** 41603
 [9] Law C K, Pu H, Bigelow N B 1998 *Phys. Rev. Lett.* **81** 5257

[10] Parkins A S, Walls D F 1998 *Phys. Reports* **303** 1
 [11] Koashi M, Ueda M 2000 *Phys. Rev. Lett.* **84** 1066
 [12] Yi S, Müstecaplıoğlu Ö E 2002 *Phys. Rev. A* **66** 011601
 [13] Jia D J, Xu Y, Li Z X et al 2008 *Int. J. Mod. Phys. B* **22** 189
 [14] Kempen E G M van 1999 *Phys. Rev. Lett.* **88** 093201
 [15] Crubellier A, Dulieu O 1999 *Eur. Phys. J. D* **6** 211
 [16] Zang X F, Li J P, Tan L 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 4348 (in Chinese) 臧小飞、李菊萍、谭磊 2007 物理学报 **56** 4348]

Energy level-splitting of ground state in spinor Bose-Einstein condensate with large number of atoms^{*}

Xu Yan¹⁾ Jia Duo-Je²⁾ Li Zhao-Xin¹⁾ Hou Feng-Chao¹⁾ Tan Lei³⁾ Zhang Lu-Yin¹⁾

1 *College of Nature Science , Shandong University of Science and Technology , Qingdao 266510 , China)*

2 *Institute of Theoretical Physics , Northwest Normal University , Lanzhou 730000 , China)*

3 *Institute of Theoretical Physics , Lanzhou University , Lanzhou 730000 , China)*

(Received 3 May 2008 ; revised manuscript received 19 June 2008)

Abstract

We study the mode deviation effect of a spin-1 Bose-Einstein condensate with large number of atoms in optical trap beyond the single-mode approximation. Based on the effective Hamiltonian with nondegenerate level of the collective spin states , we get the mode deviation factor and explicitly calculate the level splitting energy as function of the atom number N .

Keywords : Bose-Einstein condensate , Gross-Pitaevskii functional , single-mode approximation

PACC : 0365 , 0570

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10704031) and the Natural Science Foundation of Gansu (Grant No. 3ZS061-A25-035).