

部分相干厄米-双曲正弦-高斯光束通过湍流大气传输的平均光强分布演化和角扩展*

李晋红 杨爱林 吕百达†

(四川大学激光物理与化学研究所, 成都 610064)

(2008 年 5 月 25 日收到, 2008 年 7 月 2 日收到修改稿)

推导出部分相干厄米-双曲正弦-高斯(H-ShG)光束通过湍流大气的平均光强和角扩展的解析表示式,并用以研究了部分相干 H-ShG 光束在湍流中的平均光强分布演化和角扩展. 结果表明, 折射率结构常数 C_n^2 的增加和空间相关长度 σ_0 的减小都会加速演化过程. 引入相对角扩展来定量描述光束抗拒湍流的能力. 空间相关长度 σ_0 , 束腰宽度 w_0 和双曲正弦部分参数 Ω_0 越小, 光束阶数 m, n 越大, 部分相干 H-ShG 光束的角扩展受湍流的影响越小.

关键词: 平均光强分布演化, 角扩展, 湍流大气, 部分相干厄米-双曲正弦-高斯(H-ShG)光束

PACC: 9265, 4200

1. 引言

激光大气传输因与光通信、航空测绘、卫星遥感、光学雷达等方面的应用有关而引起长期的研究兴趣. 这是一个相当复杂的随机过程, 难于找到普适性理论, 常需在一定的物理简化条件下进行繁冗的数值模拟, 力求在统计意义上得到与实验相符的结果^[1,2]. 另一方面, 因广义惠更斯-菲涅耳原理的应用, Rytov 位相结构函数平方近似和折射率起伏空间谱密度函数等的引入, 近年来, 用解析或半解析方法对湍流大气中光传输的研究也取得不少进展^[2,3]. 文献中对完全相干高斯、厄米-高斯、拉盖尔-高斯、厄米-双曲余弦-高斯光束等通过湍流大气的传输特性已做了广泛的研究^[4-9]. Wu 和 Boardman 指出以高斯-谢尔模型(GSM)光束为代表的部分相干光较完全相干光受湍流大气的影响要小^[10,11]. Wolf 及其合作者对这一问题做了进一步研究^[12-14], 理论结果得到实验定性证实^[15]. 此外, 对部分相干双曲余弦和余弦高斯光束等在湍流大气中的透过率^[16], 部分相干双曲余弦-高斯通过湍流大气的光束扩展^[17], GSM 光束和部分相干厄米-高斯光束在湍流大气中的扩展和方向性等问题也已进行了研究^[18,19].

本文以部分相干厄米-双曲正弦-高斯(H-ShG)光束作为有代表性的一类部分相干光束, 对部分相干光在湍流大气中传输时平均光强分布演化和角扩展进行深入研究, 重点分析湍流大气折射率结构常数 C_n^2 和光束的空间相关长度 σ_0 对演化过程的影响. 引入相对角扩展用以定量描述光束抗拒湍流的能力, 研究了角扩展与光束阶数 m, n , 空间相关长度 σ_0 , 束腰宽度 w_0 和双曲正弦(Sh)部分参数 Ω_0 的关系, 并对结果的正确性做了物理解释.

2. 理论模型

H-ShG 光束在入射面 $z = 0$ 处的场分布为^[20]

$$U(\boldsymbol{\rho}, z = 0) = H_m\left(\frac{\sqrt{2}}{w_0}\rho_x\right)H_n\left(\frac{\sqrt{2}}{w_0}\rho_y\right) \times \exp\left(-\frac{\rho_x^2 + \rho_y^2}{w_0^2}\right) \times \sinh(\Omega_0\rho_x + \Omega_0\rho_y), \quad (1)$$

w_0 为高斯部分的束腰宽度, Ω_0 为双曲正弦(Sh)部分参数, (ρ_x, ρ_y) 为二维平面矢量 $\boldsymbol{\rho}$ 在 x, y 方向的分量, $H_j(\cdot)$ 为 j 阶厄米多项式 ($j = m, n$).

引入谢尔相关项^[16,21], 在 $z = 0$ 面上部分相干 H-ShG 光束的交叉谱密度函数为

* 国家自然科学基金(批准号:10574097, 10874125)资助的课题.

† 通讯联系人. E-mail: sculjh@yahoo.cn (J. Li), baidalu0@tom.com (B. Li)

$$\begin{aligned}
& W^{(0)}(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2, z=0) \\
&= H_m\left(\frac{\sqrt{2}}{w_0}\rho_{1x}\right)H_n\left(\frac{\sqrt{2}}{w_0}\rho_{1y}\right) \\
&\quad \times \exp\left(-\frac{\rho_{1x}^2 + \rho_{1y}^2}{w_0^2}\right)\text{sinh}(\Omega_0\rho_{1x} + \Omega_0\rho_{1y}) \\
&\quad \times H_m\left(\frac{\sqrt{2}}{w_0}\rho_{2x}\right)H_n\left(\frac{\sqrt{2}}{w_0}\rho_{2y}\right) \\
&\quad \times \exp\left(-\frac{\rho_{2x}^2 + \rho_{2y}^2}{w_0^2}\right)\text{sinh}(\Omega_0\rho_{2x} + \Omega_0\rho_{2y}) \\
&\quad \times \exp\left[-\frac{(\rho_{1x} - \rho_{2x})^2}{2\sigma_0^2}\right] \\
&\quad \times \exp\left[-\frac{(\rho_{1y} - \rho_{2y})^2}{2\sigma_0^2}\right], \quad (2)
\end{aligned}$$

其中 σ_0 为在 $z=0$ 面部分相干 H-ShG 光束空间相关长度, $\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2$ 分别为 $z=0$ 面二点坐标矢量.

由广义惠更斯-菲涅耳原理^[3], 部分相干 H-ShG 光束通过湍流大气传输的交叉谱密度函数为

$$\begin{aligned}
& W(\boldsymbol{\rho}'_1, \boldsymbol{\rho}'_2, z) \\
&= \left(\frac{k}{2\pi z}\right)^2 \iint d^2\rho_1 \iint d^2\rho_2 W(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2, z=0) \\
&\quad \times \exp\left\{\frac{ik}{2z}[(\boldsymbol{\rho}'_1 - \boldsymbol{\rho}_1)^2 - (\boldsymbol{\rho}'_2 - \boldsymbol{\rho}_2)^2]\right\} \\
&\quad \times \exp[i\psi(\boldsymbol{\rho}'_1, \boldsymbol{\rho}_1) + \psi^*(\boldsymbol{\rho}'_2, \boldsymbol{\rho}_2)]_m, \quad (3)
\end{aligned}$$

式中 $*$ 为复共轭, \cdot_m 表示系综统计平均, 可用 Rytov 位相结构函数的二次近似表示为^[22]

$$\begin{aligned}
& \exp[i\psi(\boldsymbol{\rho}'_1, \boldsymbol{\rho}_2) + \psi^*(\boldsymbol{\rho}'_2, \boldsymbol{\rho}_2)]_m \\
&\cong \exp\left\{-\frac{1}{\rho_0^2}[(\boldsymbol{\rho}_1 - \boldsymbol{\rho}_2)^2 + (\boldsymbol{\rho}_1 - \boldsymbol{\rho}_2)(\boldsymbol{\rho}'_1 - \boldsymbol{\rho}'_2) \right. \\
&\quad \left. + (\boldsymbol{\rho}'_1 - \boldsymbol{\rho}'_2)^2]\right\}, \quad (4)
\end{aligned}$$

$\rho_0 = (0.545 C_n^2 k^2 z)^{-3/5}$ 为球面波在湍流大气中传输的相关长度, C_n^2 为大气折射率结构常数. (4) 式对弱湍流和强湍流情况都适用^[6-8, 23]. 为了方便计算, 作坐标变换

$$\boldsymbol{u} = \frac{\boldsymbol{\rho}_1 + \boldsymbol{\rho}_2}{2}, \boldsymbol{v} = \boldsymbol{\rho}_1 - \boldsymbol{\rho}_2, \quad (5)$$

令 (3) 式中 $\boldsymbol{\rho}'_1 = \boldsymbol{\rho}'_2 = \boldsymbol{\rho}'$, 将 (2) 和 (4) 式代入 (3) 式, 部分相干 H-ShG 光束通过湍流大气在 z 处的平均光强为

$$\begin{aligned}
& I(\boldsymbol{\rho}', z) = W(\boldsymbol{\rho}', \boldsymbol{\rho}', z) \\
&= \frac{1}{4} \left(\frac{k}{2\pi z}\right)^2 \iint d^2u \iint d^2v \\
&\quad \times H_m\left[\frac{\sqrt{2}}{w_0}\left(u_x + \frac{v_x}{2}\right)\right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times H_n\left[\frac{\sqrt{2}}{w_0}\left(u_y + \frac{v_y}{2}\right)\right] \\
& \times H_m\left[\frac{\sqrt{2}}{w_0}\left(u_x - \frac{v_x}{2}\right)\right] \\
& \times H_n\left[\frac{\sqrt{2}}{w_0}\left(u_y - \frac{v_y}{2}\right)\right] \\
& \times \exp\left(-\frac{2u^2}{w_0^2}\right)\exp\left(-\frac{v^2}{\epsilon^2}\right) \\
& \times \exp\left(-\frac{ik}{z}\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}\right)\exp\left(\frac{ik}{z}\boldsymbol{\rho}' \cdot \boldsymbol{v}\right) \\
& \times \left\{\exp[2\Omega_0(u_x + u_y)] - \exp[\Omega_0(v_x + v_y)] \right. \\
& \quad \left. - \exp[-\Omega_0(v_x + v_y)] + \exp[-2\Omega_0(u_x + u_y)]\right\}, \quad (6)
\end{aligned}$$

其中

$$\frac{1}{\epsilon^2} = \frac{1}{2w_0^2} + \frac{1}{2\sigma_0^2} + \frac{1}{\rho_0^2}. \quad (7)$$

3. 平均光强分布的演化特性

对 (6) 式作复杂的积分运算(附录 A) 结果可整理为

$$\begin{aligned}
& I(\boldsymbol{\rho}', z) = \left(\frac{k}{4z}\right)^2 \frac{w_0^2}{2A} \Gamma \exp(w_0^2\Omega_0^2) \{S_{1x}S_{1y} + S_{4x}S_{4y} \\
& \quad - (S_{2x}S_{2y} + S_{3x}S_{3y})\}, \quad (8)
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
& S_{1x} = 2^m m! \exp\left(\frac{B_{1x}^2}{A}\right) \sum_{l=0}^m L_{m-l}^{-1}(-w_0^2\Omega_0^2 - a\zeta^2) \\
& \quad \times \sum_{h=0}^l (-1)^h \binom{l}{l-h} \frac{a^h}{h!} (2h)! \left(\frac{B_{1x} - A\zeta}{A}\right)^{2h} \\
& \quad \times \sum_{j=0}^h \frac{1}{(2h-2j)! j!} \left[\frac{A}{4(B_{1x} - A\zeta)^2}\right]^j, \quad (9)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& S_{2x} = 2^m m! \exp\left(\frac{B_{2x}^2}{A}\right) \sum_{g=0}^m (-1)^g \binom{m}{m-g} \frac{a^g}{g!} (2g)! \\
& \quad \times \left(\frac{B_{2x}}{A}\right)^{2g} \sum_{j=0}^g \frac{1}{(2g-2j)! j!} \left(\frac{A}{4B_{2x}^2}\right)^j, \quad (10)
\end{aligned}$$

$$A = \frac{w_0^2 k^2}{8z^2} + \frac{1}{2w_0^2} + \frac{1}{2\sigma_0^2} + \frac{1}{\rho_0^2}, \quad (11)$$

$$a = \frac{1}{w_0^2} + \frac{k^2 w_0^2}{4z^2},$$

$$\zeta = -\frac{iw_0^2 k \Omega_0}{2za} B_{1x} = \frac{1}{2} \left(\frac{ik\rho'_x}{z} + a\zeta\right),$$

$$B_{2x} = \frac{1}{2} \left(\frac{ik\rho'_x}{z} + \Omega_0\right). \quad (12)$$

由对称性知, 将 S_{1x} 中 m 换为 n , B_{1x} 中的 ρ'_x 换为 ρ'_y ,

就得到 S_{1y} 将 S_{2x} 中 m 换为 n , B_{2x} 中的 ρ'_x 换为 ρ'_y 就得到 S_{2y} 将 S_{1x} 和 S_{1y} 中的 Ω_0 换为 $-\Omega_0$ 得到 S_{4x} 和 S_{4y} 将 S_{2x} 和 S_{2y} 中的 Ω_0 换为 $-\Omega_0$ 得到 S_{3x} 和 S_{3y} .

(8) 式为部分相干 H-ShG 光束通过湍流大气传输平均光强的解析公式, 描述平均光强分布的演化特征. (8) 式表明, 部分相干 H-ShG 光束在湍流大气中传输的平均光强分布与光束的空间相关长度 σ_0 , 光束阶数 m, n , 束腰宽度 w_0 , Sh 部分参数 Ω_0 , 大气折射率结构常数 C_n^2 和传输距离 z 有关. 这是一个有较为普遍意义的结果, 其典型特例有

1) 当 $m = n = 0$ 时 (8) 式退化为部分相干 ShG 光束通过湍流大气的平均光强公式

$$K(\rho', z) = \frac{w_0^2}{A} \left(\frac{k}{4z}\right)^2 \exp\left(-\frac{k^2 \rho'^2}{4Az^2}\right) \times \left\{ \exp(\omega_0^2 \Omega_0^2) \exp\left(-\frac{k^2 w_0^4 \Omega_0^2}{8Az^2}\right) \times \cosh\left[\frac{w_0^2 \Omega_0 k^2 (\rho'_x + \rho'_y)}{4Az^2}\right] - \exp\left(\frac{\Omega_0^2}{2A}\right) \cos\left[\frac{k\Omega_0(\rho'_x + \rho'_y)}{2Az}\right] \right\}. \quad (13)$$

2) 当 $\sigma_0 \rightarrow \infty$ 时 (8) 式退化为完全相干 H-ShG 光束通过湍流大气的平均光强公式

$$K(\rho', z) = \left(\frac{k}{4z}\right)^2 \frac{w_0^2}{2A} \left[\exp(\omega_0^2 \Omega_0^2) (S'_{1x} S'_{1y} + S'_{4x} S'_{4y}) - S'_{2x} S'_{2y} - S'_{3x} S'_{3y} \right], \quad (14)$$

其中

$$S'_{1x} = 2^m m! \exp\left(\frac{B_{1x}^2}{A'}\right) \sum_{l=0}^m L_{m-l}^{-1}(-w_0^2 \Omega_0^2 - a\zeta^2) \times \sum_{h=0}^l (-1)^h \binom{l}{l-h} \frac{a^h}{h!} (2h)! \left(\frac{B_{1x} - A'\zeta}{A'}\right)^{2h} \times \sum_{j=0}^h \frac{1}{(2h-2j)! j!} \left[\frac{A'}{B_{1x} - A'\zeta}\right]^j, \quad (15)$$

$$S'_{2x} = 2^m m! \exp\left(\frac{B_{2x}^2}{A'}\right) \sum_{g=0}^m (-1)^g \binom{m}{m-g} \frac{a^g}{g!} (2g)! \times \left(\frac{B_{2x}}{A'}\right)^{2g} \sum_{j=0}^g \frac{1}{(2g-2j)! j!} \left[\frac{A'}{4B_{2x}^2}\right]^j, \quad (16)$$

$$A' = \frac{w_0^2 k^2}{8z^2} + \frac{1}{2w_0^2} + \frac{1}{\rho_0^2}. \quad (17)$$

显然, 令 $C_n^2 = 0$ (8) 式退化为部分相干 H-ShG 光束在自由空间传输中的光强公式.

图 1 为部分相干 H-ShG 光束在自由空间光强分布和在湍流大气平均光强分布随传输距离的变化, 计算参数为 $m = 1, n = 1, \lambda = 1.06 \mu\text{m}, w_0 = 3 \text{ cm}, \Omega_0$

$= 30 \text{ m}^{-1}, \sigma_0 = 2.5 \text{ cm}$. 从图 1 可以看出, 当部分相干 H-ShG 光束在自由空间 ($C_n^2 = 0$) 中传输时, 光强由最初 $z = 0$ 处的 H-ShG 分布随传输距离增加变成类正弦分布, 出现中心凹陷 (取中心凹陷平均光强极小值为最大光强值的一半), 然后变成平顶分布, 最后当传输距离足够远时变成类高斯分布. 图 1(b), (c) 为部分相干 H-ShG 光束在湍流大气 (C_n^2 分别为 10^{-15} 和 $10^{-14} \text{ m}^{-2/3}$) 中传输时平均光强分布随传输距离 z 的变化. 由图知部分相干 H-ShG 光束在湍流大气传输中平均光强演化规律与自由空间光强分布情况相似, 不同的是在湍流大气中平均光强变为类正弦、中心凹陷、平顶和类高斯分布的传输距离变短. 例如部分相干 H-ShG 光束光强 (图 1(a)) 和平均光强 (图 1(b) (c)) 剖面演化为类正弦、中心凹陷、平顶和类高斯分布的传输距离图 1(a) 为 0.8, 2.8, 5.4 和 6.8 km, 图 1(b) 为 0.75, 2.7, 4.95 和 5.8 km, 图 1(c) 为 0.7, 1.99, 3.1 和 3.6 km. 由此可见, 与自由空间中相比较, 湍流大气加速了部分相干 H-ShG 光束平均光强剖面的演化. 折射率结构常数 C_n^2 越大, 即湍流越强, 演化越快. 此外, 由 (3) (6) 式知, 在湍流大气中的光强分布是统计平均结果 (故称为平均光强^[6-9]), 这与自由空间中实际光强分布物理意义是不同的.

图 2 为当 σ_0 取不同值时部分相干 H-ShG 光束平均光强分布随传输距离的变化, 计算参数为 $m = 1, n = 1, \lambda = 1.06 \mu\text{m}, w_0 = 3 \text{ cm}, \Omega_0 = 30 \text{ m}^{-1}, C_n^2 = 10^{-14} \text{ m}^{-2/3}$. 由图 2 可以看出, 完全相干 ($\sigma_0 = \infty$) 和部分相干 ($\sigma_0 = 3.5$ 和 1.5 cm) H-ShG 光束在湍流大气中传输时, 平均光强都由最初 $z = 0$ 处的 H-ShG 分布随传输距离增加变成类正弦分布, 出现中心凹陷, 然后变成平顶分布, 最后当传输距离足够远时变成类高斯分布. 比较图 2(a) (b) (c) 可以看出, 空间相关长度 σ_0 越大, 光束在湍流大气中传输时平均光强变为类正弦、中心凹陷、平顶和类高斯分布的传输距离越长. 例如平均光强剖面演化为类正弦、中心凹陷、平顶和类高斯分布的传输距离图 2(a) 为 0.9, 2.28, 3.4 和 3.8 km, 图 2(b) 为 0.8, 2.11, 3.2 和 3.6 km, 图 2(c) 为 0.55, 1.64, 2.7 和 3 km. 由此可见, 与完全相干光相比, 光场的部分相干性加速了光束在湍流大气传输中平均光强分布的演化. 并且, 空间相关长度 σ_0 越小, 即光场的空间相干性越差, 演化越快.

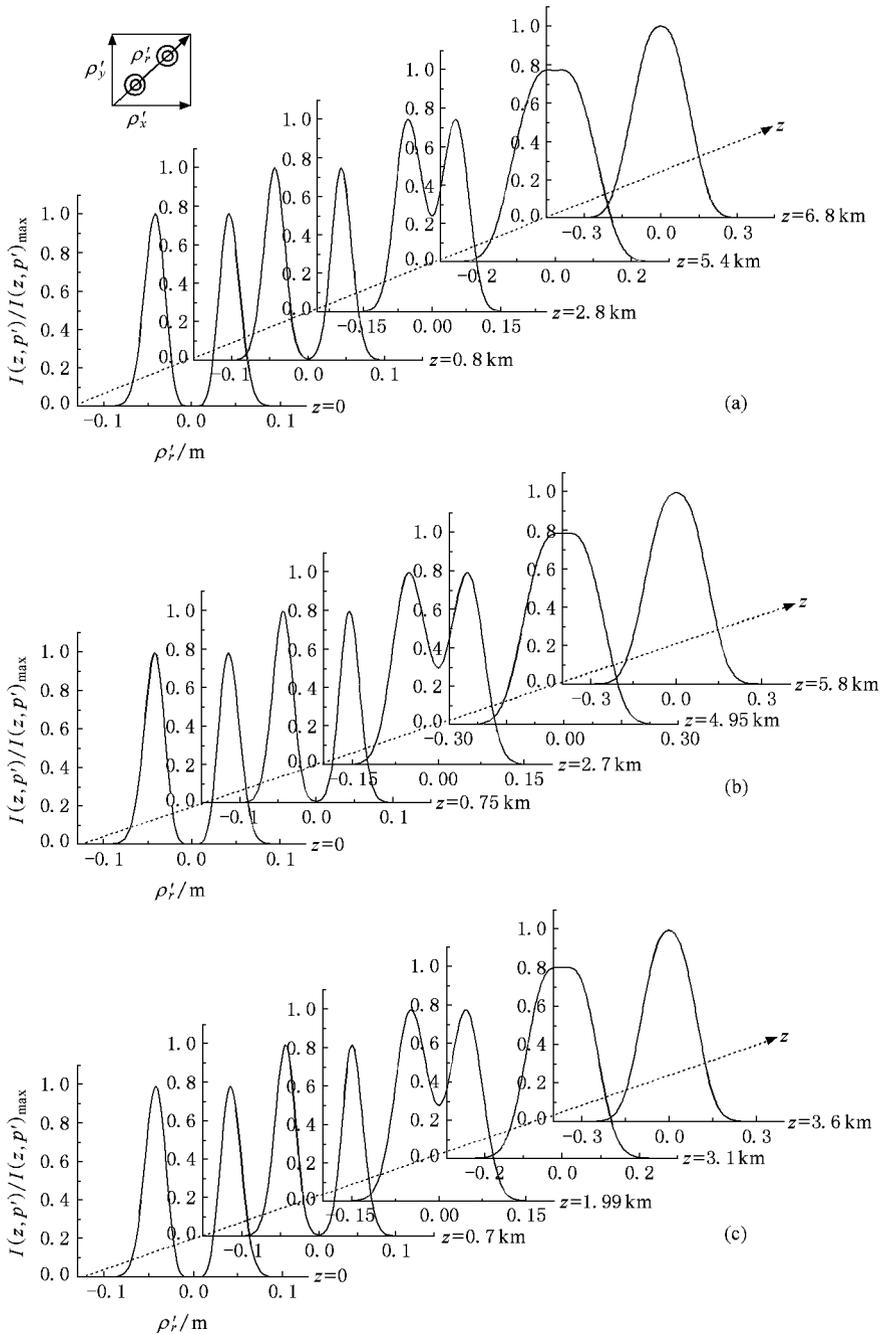


图1 部分相干 H-SHG 光束通过自由空间光强分布和通过湍流大气平均光强分布的演化 (a) $C_n^2 = 0$; (b) $C_n^2 = 10^{-15} \text{ m}^{-2/3}$; (c) $C_n^2 = 10^{-14} \text{ m}^{-2/3}$

其中 F_0 不随 z 的变化而变化, 可表示为

$$\begin{aligned}
 F_0 &= \int \mathcal{K}(z=0) d^2 \rho \\
 &= \frac{1}{2} 2^{m+n-1} m \ln w_0^2 \pi \exp(w_0^2 \Omega_0^2) L_m^0 \\
 &\quad \times (-w_0^2 \Omega_0^2) L_n^0(-w_0^2 \Omega_0^2) - 1]. \quad (19)
 \end{aligned}$$

式中 $L_n^0(\cdot)$ 表示指数为 0, n 的拉盖尔多项式.

4. 角扩展

根据均方根束宽定义^[12]有

$$u(z) = \sqrt{\frac{\int I \rho'^2 d^2 \rho'}{\int I d^2 \rho'}} = \sqrt{\frac{F}{F_0}}. \quad (18)$$

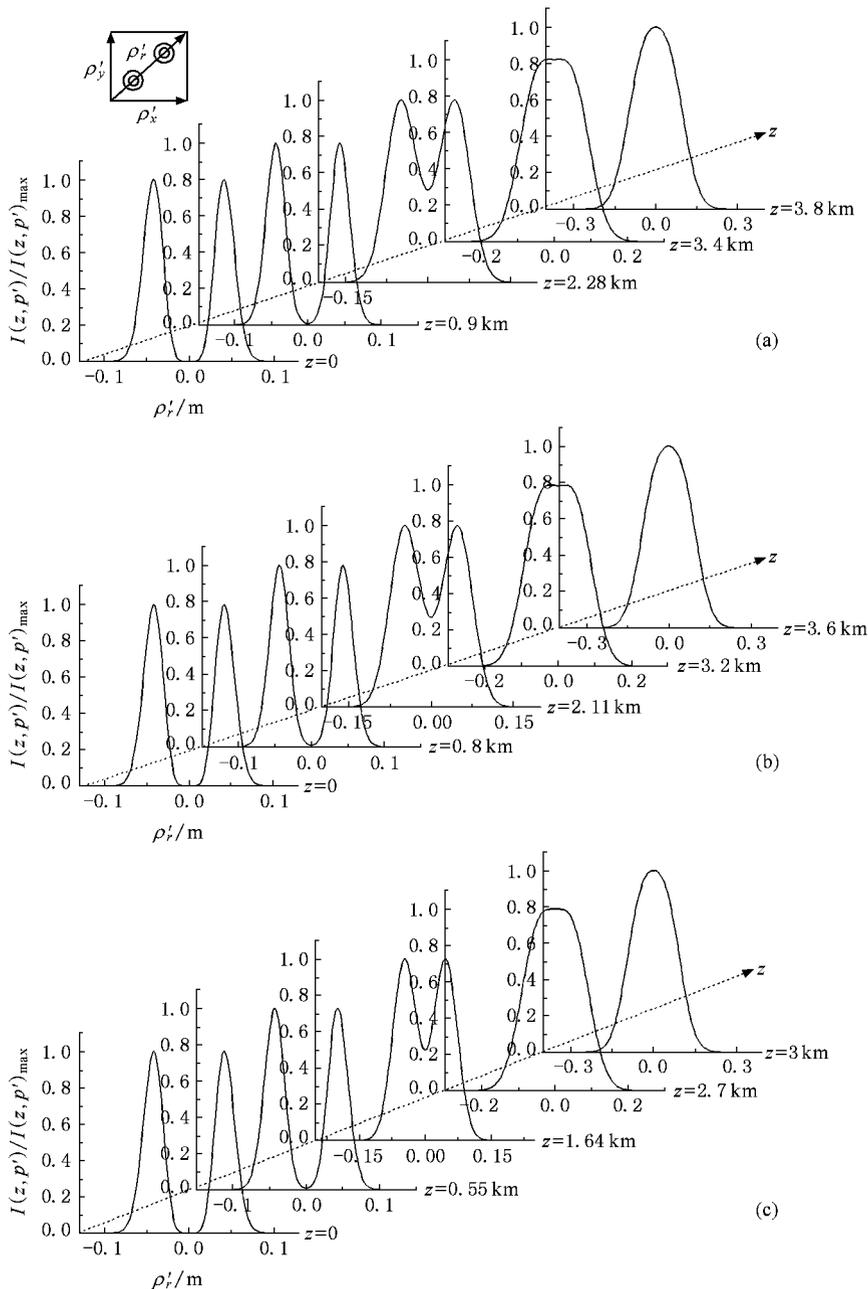


图 2 部分相干和完全相干 H-ShG 光束通过湍流大气平均光强分布的演化 (a) $\sigma_0 = \infty$; (b) $\sigma_0 = 3.5 \text{ cm}$; (c) $\sigma_0 = 1.5 \text{ cm}$

$$F = \int I \rho'^2 d^2 \rho'. \quad (20)$$

将 (6) 式代入 (23) 式, 利用积分公式^[24]

$$\int \exp[-(x-y)^2] H_m(x) H_n(x) dx = 2^n \sqrt{\pi} m! y^{n-m} L_n^{n-m}(-2y^2), \quad (21)$$

$$\int \exp(-x^2) H_m(x+y) H_n(x+z) dx = 2^n \sqrt{\pi} m! z^{n-m} L_n^{n-m}(-2yz), \quad (22)$$

和 δ 函数的基本性质, 经积分得到 F 的表示式为

$$F = \frac{1}{2} \left(\frac{z}{k} \right)^2 2^{m+n-1} m! n! w_0^2 \pi \times [\exp(w_0^2 \Omega_0^2) (F_{11} + F_{12}) + (F_{21} + F_{22})], \quad (23)$$

其中

$$F_{11} = L_n^0(-\Omega_0^2 w_0^2) \left[\left(\frac{k^2 w_0^2}{4z^2} + \frac{2}{\epsilon^2} \right) L_m^0(-\Omega_0^2 w_0^2) + \frac{k^2 w_0^4 \Omega_0^2}{z^2} \left(\frac{1}{4} L_m^0(-\Omega_0^2 w_0^2) \right) \right]$$

$$+ L_{m-1}^1(-\Omega_0^2 w_0^2) + L_{m-2}^2(-\Omega_0^2 w_0^2) + \left(\frac{2}{w_0^2} + \frac{k^2 w_0^2}{2z^2} \right) L_{m-1}^1(-\Omega_0^2 w_0^2) \Big], \quad (24)$$

$$F_{21} = \left[-\frac{k^2 w_0^2}{4z^2} - \frac{2}{\varepsilon^2} + \Omega_0^2 - m \left(\frac{2}{w_0^2} + \frac{k^2 w_0^2}{2z^2} \right) \right]. \quad (25)$$

同理,将 F_{11} 中 m 与 n 互换可得到 F_{12} ; 将 F_{21} 中 m 换成 n 得到 F_{22} .

将 (19)(23) 式代入 (18) 式,得到部分相干 H-ShG 光束在湍流大气中均方根束宽表达式为

$$u(z) = [A + Bz^2 + 4(0.545 C_n^2)^{6/5} k^{2/5} z^{16/5}]^{1/2}, \quad (26)$$

式中

$$A = \frac{R_1}{R_0}, \quad (27)$$

$$B = \frac{R_2}{R_0 k^2}, \quad (28)$$

$$R_0 = \exp(\Omega_0^2 w_0^2) L_m^0(-\Omega_0^2 w_0^2) L_n^0(-\Omega_0^2 w_0^2) - 1, \quad (29)$$

$$R_1 = \exp(\Omega_0^2 w_0^2) \left\{ \frac{w_0^2}{2} \left[L_n^0(-\Omega_0^2 w_0^2) L_n^0(-\Omega_0^2 w_0^2) + L_{m-1}^1(-\Omega_0^2 w_0^2) L_n^0(-\Omega_0^2 w_0^2) + L_m^0(-\Omega_0^2 w_0^2) L_{n-1}^1(-\Omega_0^2 w_0^2) \right] + \Omega_0^2 w_0^4 \left[\frac{1}{2} L_m^0(-\Omega_0^2 w_0^2) L_n^0(-\Omega_0^2 w_0^2) + L_{m-1}^1(-\Omega_0^2 w_0^2) L_n^0(-\Omega_0^2 w_0^2) + L_{m-2}^2(-\Omega_0^2 w_0^2) L_n^0(-\Omega_0^2 w_0^2) + L_m^0(-\Omega_0^2 w_0^2) L_{n-1}^1(-\Omega_0^2 w_0^2) + L_m^0(-\Omega_0^2 w_0^2) L_{n-2}^2(-\Omega_0^2 w_0^2) \right] \right\} - \frac{w_0^2}{2} (m+n+1), \quad (30)$$

$$R_2 = \exp(\Omega_0^2 w_0^2) \left\{ \frac{2}{\sigma_0} L_m^0(-\Omega_0^2 w_0^2) L_n^0(-\Omega_0^2 w_0^2) + \frac{2}{w_0^2} \left[L_m^0(-\Omega_0^2 w_0^2) L_n^0(-\Omega_0^2 w_0^2) + L_{m-1}^1(-\Omega_0^2 w_0^2) L_n^0(-\Omega_0^2 w_0^2) + L_m^0(-\Omega_0^2 w_0^2) L_{n-1}^1(-\Omega_0^2 w_0^2) \right] \right\} - \frac{2}{\sigma_0^2} + 2\Omega_0^2 - \frac{2}{w_0^2} (m+n+1). \quad (31)$$

(26) 式右边根号内的前两项与湍流参数无关,表征束宽在自由空间中衍射引起的扩展,第一项 A 与传

输距离无关,而第二项 Bz^2 随 z^2 增加而增加. 右边根号内的第三项 $4(0.545 C_n^2)^{6/5} k^{2/5} z^{16/5}$ 表征湍流引起的束宽扩展,随 $z^{16/5}$ 增加而增加.

由 (26) 式得到部分相干 H-ShG 光束通过湍流大气传输的角扩展^[15] 公式为

$$\theta_{sp} = \frac{u(z)}{z} \Big|_{z \rightarrow \infty} = \sqrt{B + 4(0.545 C_n^2)^{6/5} k^{2/5} z^{6/5}}, \quad (32)$$

(32) 式右边的第一项表示部分相干 H-ShG 光束在自由空间中的角扩展,与空间相关长度 σ_0 , 光束阶数 m, n , 束腰宽度 w_0 和 Sh 部分参数 Ω_0 有关,但不随传输距离 z 变化. 第二项表示大气湍流而引起的角扩展,与折射率结构常数 C_n^2 和传输距离 z 有关,这是与自由空间中的光束的角扩展(远场发散角)不同的. 当传输距离足够长时,第二项即湍流引起的角扩展将起主要作用.

当 $C_n^2 = 0$ 时,由 (32) 式可得到部分相干 H-ShG 光束在自由空间的角扩展为

$$\theta_{sp, free} = \sqrt{B}, \quad (33)$$

为了便于直观和定量描述光束抗拒湍流的能力,引入相对角扩展,定义为部分相干 H-ShG 光束在湍流大气中传输的角扩展与同一部分相干 H-ShG 光束在自由空间传输的角扩展之比,即

$$\frac{\theta_{sp, turb}}{\theta_{sp, free}} = \sqrt{1 + \frac{4(0.545 C_n^2)^{6/5} k^{2/5} z^{6/5}}{B}}. \quad (34)$$

显然, $\theta_{sp, turb} / \theta_{sp, free}$ 越小,湍流引起光束的角扩展越小. 因此,用 $\theta_{sp, turb} / \theta_{sp, free}$ 可定量比较光束参数,例如空间相关长度 σ_0 , 光束阶数 m, n , 束腰宽度 w_0 和 Sh 部分参数 Ω_0 变化时,与自由空间比较在湍流大气中部分相干光束角扩展受湍流影响的大小.

(32) 式的典型特例有:

1) 当 $m = n = 0$ (32) 式化简为

$$\theta_{sp} = \sqrt{B_1 + 4(0.545 C_n^2)^{6/5} k^{2/5} z^{6/5}}, \quad (35)$$

$$B_1 = 2k^{-2} \left[\frac{1}{\sigma_0^2} + \frac{1}{w_0^2} + \frac{\Omega_0^2}{\exp(\Omega_0^2 w_0^2) - 1} \right]. \quad (36)$$

(35) 式为部分相干 ShG 光束在湍流大气传输中角扩展表达式.

2) 当 $\sigma_0 \rightarrow \infty$ (32) 式化简为

$$\theta_{sp} = \sqrt{B_2 + 4(0.545 C_n^2)^{6/5} k^{2/5} z^{6/5}}, \quad (37)$$

$$B_2 = \frac{R_2'}{R_0 k^2}, \quad (38)$$

$$R'_2 = \exp\left\{ \Omega_0^2 w_0^2 \left[\frac{2}{w_0^2} \left[L_m^0(-\Omega_0^2 w_0^2) L_n^0(-\Omega_0^2 w_0^2) + L_{m-1}^1(-\Omega_0^2 w_0^2) L_n^0(-\Omega_0^2 w_0^2) + L_m^0(\Omega_0^2 w_0^2) L_{n-1}^1(\Omega_0^2 w_0^2) \right] \right] + 2\Omega_0^2 - \frac{2}{w_0^2}(m+n+1) \right\} \quad (39)$$

(37) 式为完全相干 H-ShG 光束在湍流大气传输中角扩展表达式。

图 3 (a)–(d) 分别为 $z = 25 \text{ km}$ 处, $C_n^2 = 10^{-14} \text{ m}^{-2/3}$ 部分相干 H-ShG 光束的角扩展和相对角扩展随空间相关长度 σ_0 , 光束阶数 m, n , 束腰宽度 w_0 和 Sh 部分参数 Ω_0 的变化。由图知, 随空间相关长度 σ_0 的增大, 部分相干 H-ShG 光束的角扩展减小, 相对角扩展增大, 部分相干 H-ShG 光束的角扩展受湍流大气的影响增大, 部分相干 H-ShG 光束的角扩展随光束阶数 m, n 的增大而增大, 而相对角扩展随光束阶数 m, n 的增大而减小, 即部分相干 H-ShG 光束的角扩展受湍流大气的影响随光束阶数 m, n 的增大而减小, 束腰宽度 w_0 越大, 部分相干 H-ShG 光

束的角扩展越小, 相对角扩展越大, 即束腰宽度越大, 部分相干 H-ShG 光束角扩展受湍流大气的影响越大。随 Sh 部分参数 Ω_0 的增大, 部分相干 H-ShG 光束的角扩展减小, 相对角扩展增大, 部分相干 H-ShG 光束的角扩展受到湍流大气的影响增大。例如图 3 (a) 中当 $\sigma_0 = 1$ 和 4 cm 时, $\theta_{\text{sp turb}} / \theta_{\text{sp free}}$ 分别为 2.20 和 3.66; 图 3 (b) 中当 $m = n = 1$ 和 13 时, $\theta_{\text{sp turb}} / \theta_{\text{sp free}}$ 分别为 2.05 和 1.46; 图 3 (c) 中当 $w_0 = 1$ 和 5 cm 时, $\theta_{\text{sp turb}} / \theta_{\text{sp free}}$ 分别为 1.45 和 1.86; 图 3 (d) 中当 $\Omega_0 = 10$ 和 130 m^{-1} 时, $\theta_{\text{sp turb}} / \theta_{\text{sp free}}$ 分别为 2.04 和 2.23。

对所得结果可作如下物理解释: 任何初始存在的光束角扩展都会减小大气湍流对光束角扩展的影响。由图 3 知, 空间相关长度 σ_0 越小, 光束阶数 m, n 越大, 束腰宽度 w_0 越小和 Sh 部分参数 Ω_0 越小, 部分相干 H-ShG 光束在自由空间角扩展越大, 因此减小了大气湍流对扩展的影响。即光束在自由空间的角扩展越大, 或者说初始存在的随机性^[11]越大, 受到湍流的影响就越小。

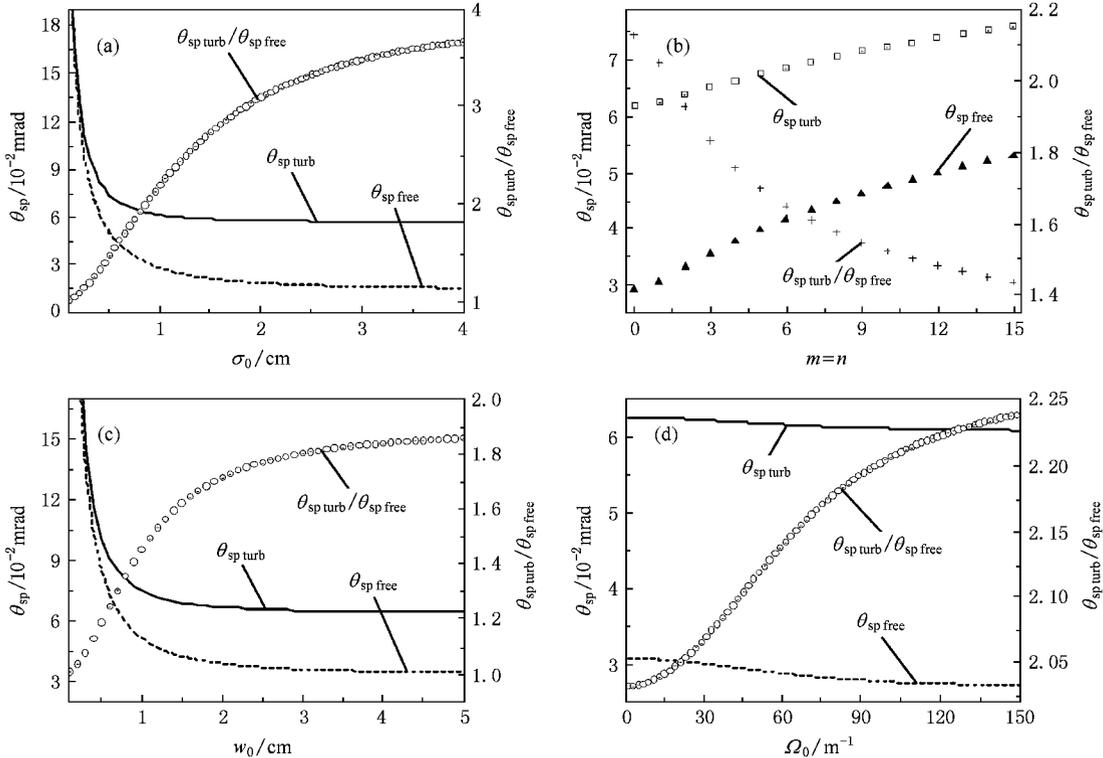


图 3 部分相干 H-ShG 光束在 $z = 25 \text{ km}$ 处角扩展和相对角扩展随 (a) 空间相关长度 σ_0 (b) 光束阶数 m, n (c) 束腰宽度 w_0 和 (d) Sh 部分参数 Ω_0 的变化, (a) $m = 1, n = 1, w_0 = 2.5 \text{ cm}, \Omega_0 = 30 \text{ m}^{-1}$. (b) $\sigma_0 = 1 \text{ cm}, w_0 = 2 \text{ cm}, \Omega_0 = 20 \text{ m}^{-1}$. (c) $m = 1, n = 1, \sigma_0 = 0.7 \text{ cm}, \Omega_0 = 15 \text{ m}^{-1}$. (d) $m = 1, n = 1, \sigma_0 = 1 \text{ cm}, w_0 = 2 \text{ cm}$

5. 结 论

本文从广义惠更斯-菲涅耳原理出发,利用 Rytov 位相结构函数平方近似和积分变换技巧,推导出部分相干 H-ShG 光束通过湍流大气的平均光强和角扩展的解析公式,用以研究了部分相干 H-ShG 光束在大气湍流中的平均光强演化和角扩展.部分相干 H-ShG 光束在湍流大气中传输时平均光强分布历经 H-ShG,类正弦,中心凹陷,平顶和类高斯分布几个阶段.与自由空间中相比较,湍流大气加速了部分相干 H-ShG 光束的演化,湍流越强,演化越快.与完全相干光相比较,光场的部分相干性加速了光束的演化,光场空间相干性越差,演化越快.引入了相对角扩展用以定量描述光束抗拒湍流的能

力.空间相关长度 σ_0 越小,光束阶数 m, n 越大,束腰宽度 w_0 越小和 Sh 部分参数 Ω_0 越小,初始存在的随机性就越大,因而部分相干 H-ShG 光束的角扩展受湍流影响就越小.文中用 Rytov 位相结构函数平方近似来进行理论推导,数值计算和分析.但容易证明,当用湍流介质的折射率起伏空间谱密度函数(例如 Tatarskii 谱和 Von Karman 谱^{3,12,13})等)尽管推导出公式和定量计算结果有不同,但所得的主要物理结论是相同的.值得指出的是,与文献中光束在湍流大气中的扩展一般是指束宽扩展不同^[12-14,17],本文研究的是光束的角扩展.正如束宽和发散角是两个不同的物理概念一样,束宽扩展和角扩展的物理含义及其在湍流大气中行为也有所不同.本文所得结果对部分相干光在湍流大气传输中平均光强剖面 and 角扩展的控制有实际意义.

附录 A

把(6)式分解成4部分, $I_1(\rho', z), I_2(\rho', z), I_3(\rho', z), I_4(\rho', z)$. $I_1(\rho', z)$ 为

$$\begin{aligned} I_1(\rho', z) &= \frac{1}{4} \left(\frac{k}{2\pi z} \right)^2 \iint du_x dv_x H_m \left[\frac{\sqrt{2}}{w_0} \left(u_x + \frac{v_x}{2} \right) \right] \\ &\times H_m \left[\frac{\sqrt{2}}{w_0} \left(u_x - \frac{v_x}{2} \right) \right] \exp \left(- \frac{2u_x^2}{w_0^2} \right) \\ &\times \exp \left(- \frac{v_x^2}{\epsilon^2} \right) \exp \left(- \frac{ik}{z} u_x v_x \right) \\ &\times \exp \left(\frac{ik}{z} \rho'_x v_x \right) \exp(2\Omega_0 u_x) \\ &\times \iint du_y dv_y H_n \left[\frac{\sqrt{2}}{w_0} \left(u_y + \frac{v_y}{2} \right) \right] \\ &\times H_n \left[\frac{\sqrt{2}}{w_0} \left(u_y - \frac{v_y}{2} \right) \right] \exp \left(- \frac{2u_y^2}{w_0^2} \right) \\ &\times \exp \left(- \frac{v_y^2}{\epsilon^2} \right) \exp \left(- \frac{ik}{z} u_y v_y \right) \\ &\times \exp \left(\frac{ik}{z} \rho'_y v_y \right) \exp(2\Omega_0 u_y). \end{aligned} \quad (A1)$$

显然

$$I_1(\rho', z) = \frac{1}{4} \left(\frac{k}{2\pi z} \right)^2 I_{11}(\rho', z) I_{12}(\rho', z). \quad (A2)$$

同理

$$I_2(\rho', z) = - \frac{1}{4} \left(\frac{k}{2\pi z} \right)^2 I_{21}(\rho', z) I_{22}(\rho', z), \quad (A3)$$

$$I_3(\rho', z) = - \frac{1}{4} \left(\frac{k}{2\pi z} \right)^2 I_{31}(\rho', z) I_{32}(\rho', z), \quad (A4)$$

$$I_4(\rho', z) = \frac{1}{4} \left(\frac{k}{2\pi z} \right)^2 I_{41}(\rho', z) I_{42}(\rho', z). \quad (A5)$$

$$\begin{aligned} I_{11}(\rho'_x, z) &= \iint du_x dv_x H_m \left[\frac{\sqrt{2}}{w_0} \left(u_x + \frac{v_x}{2} \right) \right] H_m \left[\frac{\sqrt{2}}{w_0} \left(u_x - \frac{v_x}{2} \right) \right] \\ &\times \exp \left(- \frac{2u_x^2}{w_0^2} \right) \exp \left(- \frac{v_x^2}{\epsilon^2} \right) \exp \left(- \frac{ik}{z} u_x v_x \right) \\ &\times \exp \left(\frac{ik}{z} \rho'_x v_x \right) \exp(2\Omega_0 u_x). \end{aligned} \quad (A6)$$

利用积分公式^[24]

$$\begin{aligned} &\int \exp(-x^2) H_m(x+y) H_n(x+z) dx \\ &= 2^n \sqrt{\pi} m! z^{n-m} L_m^{n-m}(-2yz). \end{aligned} \quad (A7)$$

经过积分变换和代数运算(A6)式可以表示为

$$\begin{aligned} I_{11}(\rho'_x, z) &= 2^m \sqrt{\pi} m! \frac{w_0}{\sqrt{2}} \int dv_x \\ &\times \exp \left(- \frac{v_x^2}{\epsilon^2} \right) \exp \left(\frac{ik}{z} \rho'_x v_x \right) \\ &\times L_m^0 \left[\frac{v_x^2}{w_0^2} + \frac{w_0^2}{4} \left(\frac{k^2 v_x^2}{z^2} - 4\Omega_0^2 + \frac{i4k\Omega_0 v_x}{z} \right) \right] \\ &\times \exp \left[- \frac{w_0^2 k^2 v_x^2}{8z^2} + \frac{w_0^2 \Omega_0^2}{2} - \frac{iw_0^2 k \Omega_0 v_x}{2z} \right]. \end{aligned} \quad (A8)$$

再利用拉盖尔多项式性质^[24]

$$L_m^0(x+y) = \sum_n^m L_n^0(x) L_{m-n}^{-1}(y), \quad (A9)$$

$$L_n^0(x) = \sum_{m=0}^n (-1)^m \binom{n}{n-m} \frac{x^m}{m!}, \quad (A10)$$

和积分公式^[24]

$$\int x^n \exp(-px^2 + 2qx) dx$$

$$= n \exp\left(\frac{q^2}{p}\right) \sqrt{\frac{\pi}{p}} \left(\frac{q}{p}\right)^n \sum_{k=0}^{E\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{1}{(n-2k)! k!} \left(\frac{p}{4q^2}\right)^k. \quad (\text{A11})$$

(A8)式可以化成

$$I_{11}(\rho'_x, z) = 2^m \sqrt{\pi} m \frac{w_0}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\pi}{A}} \exp\left(\frac{w_0^2 \Omega_0^2}{2}\right) \times \exp\left(\frac{B_{1x}^2}{A}\right) \sum_{l=0}^m L_{m-l}^{-1}(-w_0^2 \Omega_0^2 - a \zeta^2) \times \sum_{h=0}^l (-1)^h \binom{l}{l-h} \frac{a^h}{h!} (2h)! \left(\frac{B_{1x} - A \zeta}{A}\right)^{2h} \times \sum_{j=0}^h \frac{1}{(2h-2j)! j!} \left(\frac{A}{4(B_{1x} - A \zeta)}\right)^j, \quad (\text{A12})$$

其中

$$a = \frac{1}{w_0^2} + \frac{k^2 w_0^2}{4z^2}, \quad \zeta = -\frac{i w_0^2 k \Omega_0}{2za}, \quad A = \frac{w_0^2 k^2}{8z^2} + \frac{1}{\epsilon^2}, \quad B_{1x} = \frac{1}{2} \left(\frac{i k \rho'_x}{z} + a \zeta \right). \quad (\text{A13})$$

用同样的步骤可以得到 I_{21} 为

$$I_{21}(\rho'_x, z) = 2^m \sqrt{\pi} m \frac{w_0}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\pi}{A}} \exp\left(\frac{B_{2x}^2}{A}\right) \sum_{g=0}^m (-1)^g \times \binom{m}{m-g} \frac{a^g}{g!} (2g)! \left(\frac{B_{2x}}{A}\right)^{2g} \times \sum_{j=0}^g \frac{1}{(2g-2j)! j!} \left(\frac{A}{4B_{2x}}\right)^j, \quad (\text{A14})$$

其中

$$B_{2x} = \frac{1}{2} \left(\frac{i k \rho'_x}{z} + \Omega_0 \right). \quad (\text{A15})$$

由对称性, 将 I_{11} 中 ρ'_x 换成 ρ'_y , m 换成 n 可以得到 I_{12} . 将 I_{21} 中 ρ'_x 换成 ρ'_y , m 换成 n 可以得到 I_{22} . I_3 为将 I_2 中 Ω_0 换成 $-\Omega_0$, I_4 为将 I_1 中 Ω_0 换成 $-\Omega_0$, 由此得

$$K(\rho', z) = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = \left(\frac{k}{4z}\right)^2 \frac{w_0^2}{2A} \left[\exp\left(w_0^2 \Omega_0^2\right) (S_{1x} S_{1y} + S_{4x} S_{4y}) - (S_{2x} S_{2y} + S_{3x} S_{3y}) \right]. \quad (\text{A16})$$

(A16)式即为文中(8)式, 式中 S_{1x} , S_{2x} 为文中(9)(10)式, 将 S_{1x} 中 m 换为 n , B_{1x} 中的 ρ'_x 换为 ρ'_y 就得到 S_{1y} , 将 S_{2x} 中 m 换为 n , B_{2x} 中的 ρ'_x 换为 ρ'_y 就得到 S_{2y} , 将 S_{1x} 和 S_{1y} 中的 Ω_0 换为 $-\Omega_0$ 得到 S_{4x} 和 S_{4y} , 将 S_{2x} 和 S_{2y} 中的 Ω_0 换为 $-\Omega_0$ 得到 S_{3x} 和 S_{3y} .

- [1] Tatarskii V I 1961 *Wave Propagation in a Turbulent Medium* (New York : McGraw-Hill)
- [2] Rao R Z 2005 *Light Propagation in the Turbulent Atmosphere* (Hefei : Anhui Science Technic Press) (in Chinese) [饶瑞中 2005 光在湍流大气中的传播 (合肥 : 安徽科学技术出版社)]
- [3] Andrews L C , Phillips R L 1998 *Laser Beam Propagation through Random Media* (Bellingham , Washington : SPIE Press)
- [4] Consortini A , Ronchi L 1970 *Appl. Opt.* **9** 125
- [5] Young C Y , Gilchrest Y V , Macon B R 2002 *Opt. Eng.* **41** 1097
- [6] Eyyuboglu H T 2005 *Opt. Commun.* **245** 37
- [7] Eyyuboglu H T , Baykal Y 2004 *Opt. Express* **12** 4659
- [8] Chu X , Ni Y , Zhou G 2007 *Appl. Phys.* **B** **87** 547
- [9] Cai Y J , He S L 2006 *Opt. Lett.* **31** 568
- [10] Wu J 1990 *J. Mod. Opt.* **37** 671
- [11] Wu J , Boardman A D 1991 *J. Mod. Opt.* **38** 1355
- [12] Gbur G , Wolf E 2002 *J. Opt. Soc. Am.* **A** **19** 1592

- [13] Salem M , Shirai T , Dogarin A , Wolf E 2003 *Opt. Commun.* **216** 261
- [14] Shirai T , Dogarin A , Wolf E 2003 *J. Opt. Soc. Am.* **A** **20** 1094
- [15] Dogariu A , Amaranse S 2003 *Opt. Lett.* **28** 10
- [16] Eyyuboglu H T , Baykal Y 2007 *Opt. Commun.* **278** 17
- [17] Ji X L , Huang T X , Lü B D 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 978 (in Chinese) [季小玲, 黄太星, 吕百达 2006 物理学报 **55** 978]
- [18] Shirai T , Dogariu A , Wolf E 2003 *Opt. Lett.* **28** 610
- [19] Ji X L , Chen X W , Lü B D 2008 *J. Opt. Soc. Am.* **A** **25** 21
- [20] Casperson L W , Tovar A A 1998 *J. Opt. Soc. Am.* **A** **15** 954
- [21] Zahid M , Zubairi M S 1989 *Opt. Commun.* **70** 361
- [22] Wang S. C. H , Plonus M A 1979 *J. Opt. Soc. Am.* **69** 1297
- [23] Ishimatu A 1977 *Appl. Opt.* **16** 3190
- [24] Gradysteyn I S , Ryzhik I M 1980 *Table of Integrals , Series and Products* (New York : Academic Press)

Evolution of average intensity distribution and angular spread of partially coherent Hermite-sinh-Gaussian beams propagating through turbulent atmosphere^{*}

Li Jin-Hong Yang Ai-Lin Lü Bai-Da[†]

(*Institute of Laser Physics and Chemistry , Sichuan University , Chengdu 610064 , China*)

(Received 25 May 2008 ; revised manuscript received 2 July 2008)

Abstract

The analytical expressions for the average intensity and angular spread of partially coherent Hermite-sinh-Gaussian (H-ShG) beams propagating through turbulent atmosphere are derived and used to study the evolution of average intensity distribution and angular spread of partially coherent H-ShG beams in turbulence. It is shown that an increase of the refraction index structure constant C_n^2 and a decrease of the spatial correlation length σ_0 accelerate the evolution process. The relative angular spread is introduced to quantitatively describe the resistance of a beam to turbulence. The smaller the spatial correlation length σ_0 , the waist width w_0 , the Sh-part parameter Ω_0 , and the larger the beam orders m, n , the less the angular spread of partially coherent H-ShG beams is affected by turbulence.

Keywords : evolution of average intensity distribution , angular spread , turbulent atmosphere , partially coherent Hermite-sinh-Gaussian (H-ShG) beam

PACC : 9265 , 4200

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 10574097 , 10874125).

[†] Corresponding author E-mail : sculijh@yahoo.cn (J. Li) , baidalu0@tom.com (B. Lü)