

颗粒体系中力分布的标量力网系综模型*

张兴刚† 隆正文 胡 林

(贵州省光电子技术与应用重点实验室, 贵州大学理学院, 贵阳 550025)

(2008 年 5 月 13 日收到, 2008 年 7 月 12 日收到修改稿)

建立了便于解析计算的标量力网系综模型研究颗粒体系中的力分布问题, 所提出的 Laplace 变换法有效地解决了复杂约束条件下概率密度函数的积分问题, 并给出体系中层数较少时极限分布的表达式. 发现一般情况下极限分布为多项式与指数函数的乘积, 力分布在接近平均力处取最大值, 大于平均力时呈指数减小.

关键词: 静态颗粒体系, 力空间, 力网系综

PACC: 0520, 4610, 0200

1. 引 言

静态颗粒体系的性质是颗粒物质研究领域中的一个非常基本而重要的部分. 目前主要从静态颗粒体系中力网的结构、应力分布、力的概率分布、响应与关联等方面进行实验、理论研究和计算机模拟^[1-4]. 其中, 力的概率分布(简称为力分布)是描述静态颗粒体系中力的统计性质的一个重要问题, 已有许多研究者对其进行了研究. Mueth 等人的实验^[5]、光弹性实验^[6,7]以及接触动力学模拟^[8]都得到了大于平均力的分布按指数衰减的规律. 但小于平均值的力的分布没有统一的结论. 实验^[7]指出, 存在平均力附近的分布是一个峰而不是单调变化的情况, 且这种情况与颗粒体系由疏松态向阻塞态转变有关.

理论方面, 已经提出许多简化的模型来研究力分布的问题, 如 q 模型^[9,10]、 α 模型^[11]. 这些模型忽略掉实际颗粒体系中的堆积结构等许多复杂因素, 从而将其简化为格子系统. 近年来, 许多研究者用统计物理中系综的思想来研究颗粒体系^[12-19]. 著名的有 Edwards 等人提出的 Edwards 系综及热力学比拟的方法^[12,13], 但 Edwards 系综里同时考虑了平衡颗粒体系的力空间及位形空间. 这会涉及到堆积构型的描述、力平衡条件与堆积构型的关联等许多困难的问题. 因此, Snoeijer 等人提出了力网系综模型^[14-16], 在堆积结构固定的情况下考虑相应的力空间, 并假设体系在力空间中的态是等概率的. 这样,

就可以用类似于微正则系综的方法处理力分布、响应等问题^[14-19], 得到许多与实验和其他计算机模拟一致的结果. 由于体系受到许多约束, 力网系综的概率密度函数非常复杂. 另外, 即使是固定结构的堆积, 体系的平衡条件也不易写出. 所以前面的文献中主要对一些规则小系统的力分布(如台球状堆积、六角堆积)进行了解析计算, 而较大的系统则采用 Monte Carlo 的方法进行数值模拟. 从理论上对力网系综进行研究, 给出有效的理论方法处理力网系综的概率密度函数以及极限情况下力分布的形式, 这对于深入理解静态颗粒体系的性质非常重要.

本文只考虑实际颗粒体系在一个方向上的力平衡条件, 将实际的堆积结构简化为具有周期性边界条件的网格, 提出标量力网系综模型研究力的概率分布问题. 文中提出 Laplace 变换法计算关于 δ 函数、 θ 函数的积分, 给出了 $1 \times N$, $2 \times N$, $3 \times N$ 体系中力分布的严格解, 并且用退关联近似的办法计算了任意 $M \times N$ 体系的力分布. 从计算的结果得到: 体系层数大于 1 时力分布都是非单调变化的, 原因是体系中层与层之间的关联; 极限分布一般为多项式与指数函数的乘积, 力分布在小于平均力时呈多项式增加, 大于平均力时呈指数减小, 接近平均力处取最大值.

2. 标量力网系综模型

力网系综模型的提出基于超静态(hyperstatic)

* 国家自然科学基金(批准号: 10374021), 贵州省研究生创新基金(批准号: 2006010)和贵州省科技厅基金(批准号: 20072003)资助的课题.

† 通讯联系人. E-mail: sci_xgzhang@gzu.edu.cn

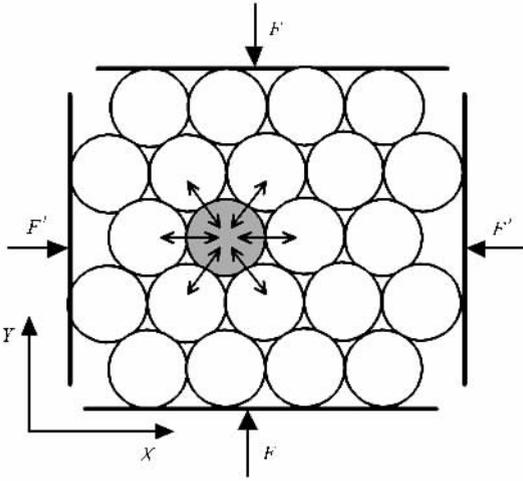


图1 光滑、无黏性颗粒的六角堆积(5×4的体系)

颗粒体系中平衡约束条件的个数少于未知力的个数,因而颗粒体系中的相互作用力在宏观上一般是不确定的^[1,14,15].在图1中,考虑由完全相同的无黏性、光滑的圆盘状(或圆柱状)颗粒结成的六角堆积体系,其周围受到四块板的挤压,每个颗粒与其周围六个颗粒接触(边界处除外).设与左板接触的颗粒数为 M ,与下板接触的颗粒数为 N ,这就构成了一个 $(2M+1) \times N$ 的体系.系统中总颗粒数 $t_1 = 2MN + M + N$,总接触点数(包括内部与边界) $t_2 = 6MN + M + 3N - 1$,体系的力平衡条件共给出 $t_3 = 2t_1 + 2$ 个约束,于是体系中力的自由度 $t_4 = t_2 - t_3 = 2MN + N - M - 3$.以每个接触点处力的大小的集合 $\{f_i\}$ 构成 t_2 维的力空间 Γ ,空间中每一点 f 代表

体系的一个力状态.由于 f_i 要满足线性的平衡约束以及非负约束,因而实际的力状态构成 Γ 空间的子集 Ω ,它是一个 t_4 维的凸多面体^[15].力网系综的基本假定是 Ω 空间中各点的概率密度相等.给出 f 的概率密度 $\rho(f)$ 后便可计算某一个力 f_k 的分布^[20]:

$$\rho(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} df \delta(f - f_k) \rho(f), \quad (1)$$

积分式中 $\int_{-\infty}^{+\infty} df = \prod_{i=1}^{t_2} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} df_i \right)$.

对于较大规模的体系(1)式的积分过程及结果都很复杂,只能用计算机作数值模拟或符号计算,不便于理论分析.为了进行理论分析,需要研究(1)式的近似积分或者给出可作解析计算的模型.对于类似于图1所示的二维或三维的堆积,可以只考虑体系在一个方向上的作用力及平衡条件.与标量 q 模型^[9,10]类似,这里只考虑图1中体系在 Y 方向上的作用力,并在 X 方向上采用周期性边界条件,简化后得到图2所示的接触网.接触网中每条竖线代表一个颗粒,由斜线相连的两条竖线表示这两个颗粒相接触.按图中所示的方式对每条竖线及斜线进行编号,周期性条件要求偶数层采用循环编号.用 g_m^n 表示第 m 层第 n 列的颗粒,同时也表示该颗粒在 Y 方向上所受压力的大小.用 c_i^j 表示第 i 层第 j 列的斜线,同时也表示该斜线所对应的接触点上的力在 Y 方向上的大小.考虑由 $\{g_m^n\} \otimes \{c_i^j\}$ 构成的力空间 Γ ,对于一个 $(2M+1) \times N$ 的体系, Γ 空间的维数 $d_1 = 6MN + N$, Ω 空间中的点 (g, c) 受到以下独立的约束:

$$\begin{aligned} \text{平衡约束: } & \begin{cases} g_{2k-1}^n - c_{2k-1}^{2n-1} - c_{2k-1}^{2n} = 0, \\ g_{2k+1}^n - c_{2k}^{2n-1} - c_{2k}^{2n} = 0, & 0 < k < M+1, \\ g_{2k}^n - c_{2k-1}^{2n-1} - c_{2k-1}^{[2n+1]} = 0, \\ g_{2k}^n - c_{2k}^{2n} - c_{2k}^{[2n+1]} = 0, & 1 \leq n \leq N, \end{cases} \\ \text{压力约束: } & F - \sum_{n=1}^N g_{2M+1}^n = 0, \\ \text{非负约束: } & \begin{cases} g_m^n \geq 0, & 1 \leq m \leq 2M+1, 1 \leq n \leq N, \\ c_i^j \geq 0, & 1 \leq i \leq 2M, 1 \leq j \leq 2N. \end{cases} \end{aligned} \quad (2)$$

上面的约束中每个指标均为正整数. $[2n+1]$ 表示关于 $2N$ 的循环指标,即 $[2n+1]$ 的值随着 n 的递增从1开始以 $2N$ 为周期交变.用分析力学中关于约束的术语,平衡约束及压力约束是不可解约束,共有

$d_2 = 4MN + 1$ 个,非负约束是可解约束,共有 d_1 个.因此, Ω 空间的维数 $r = d_1 - d_2 = 2MN + N - 1$. 定义

$$\begin{aligned}
 q_M^N(\mathbf{g}, \mathbf{c}) &= \delta(F - \sum_{n=1}^N g_{2M+1}^n) \\
 &\times [\prod_{k,m=1}^{M,N} (\delta(g_{2k-1}^n - c_{2k-1}^{2n-1} - c_{2k-1}^{2n}) \\
 &\times \delta(g_{2k+1}^n - c_{2k}^{2n-1} - c_{2k}^{2n}) \\
 &\times \delta(g_{2k}^n - c_{2k-1}^{2n} - c_{2k}^{[2n+1]}) \\
 &\times \delta(g_{2k}^n - c_{2k}^{2n} - c_{2k}^{[2n+1]}))] \\
 &\times [(\prod_{m,n=1}^{2M+1,N} \theta(g_m^n)) \theta(\prod_{i,j=1}^{2M,2N} \theta(c_i^j))], \quad (3)
 \end{aligned}$$

其中 $\delta(x)$ 是 Dirac- δ 函数, $\theta(x)$ 是 Heaviside 函数 (阶跃函数)^[21]. 那么, 力网系综的概率密度为

$$p_M^N(\mathbf{g}, \mathbf{c}) = \frac{1}{\Omega_M^N(F)} q_M^N(\mathbf{g}, \mathbf{c}), \quad (4)$$

其中 结构函数

$$\Omega_M^N(F) = \int_{-\infty}^{\infty} dg dc q_M^N(\mathbf{g}, \mathbf{c}). \quad (5)$$

由(1)(4)两式便可以计算力分布问题. 尽管不同的参数选取及约束形式的选取会使(3)(4)(5)式形式上发生变化, 但可以证明, 任何等价于(2)式的线性独立约束对于讨论系统的统计性质来说是等同的. 所以(2)式中的压力约束可以加在任何一层颗粒上. 这很重要, 因为通过选择适当的 $q_M^N(\mathbf{g}, \mathbf{c})$ 的形式以及积分顺序, 可以使得(1)(5)两式的积分简化.

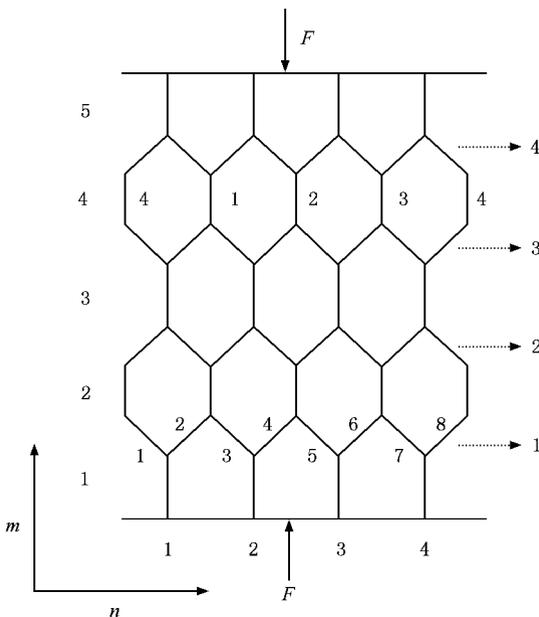


图2 简化的颗粒体系接触网(竖线代表颗粒,斜线表示颗粒间有接触)

从后面的讨论中可以看到, N 反映了每层颗粒的规模, M 反映了层与层之间相关联的复杂程度, 因此可用 N 来讨论体系规模趋于无穷时的性质. 类似于热力极限的概念, 将接触网的极限条件定义为 $N \rightarrow \infty$, 外力 $F \rightarrow \infty$, 但平均力 $f = \frac{F}{N}$ 为有限定值, 并把极限条件下力的概率分布称为极限分布.

3. 力分布的理论计算

上面对标量力网系综模型及相关概念进行了定义, 但直接用 δ 函数、 θ 函数的基本性质^[21]进行计算十分繁杂. 本文用 Laplace 变换^[21]的方法来进行关于 δ 函数、 θ 函数的积分, 其基本思想通过以下两个后面常用到的积分来说明. 考虑下面两个积分:

$$\begin{aligned}
 A_n^k(F) &= \int_{-\infty}^{\infty} df \delta(F - \sum_{i=1}^n f_i) \\
 &\times \prod_{i=1}^n ((f_i)^k \cdot \theta(f_i)), \\
 B_n^k(f, F) &= \int_{-\infty}^{\infty} df \delta(f - f_m) \\
 &\times \delta(F - \sum_{i=1}^n f_i) \prod_{i=1}^n ((f_i)^k \cdot \theta(f_i)), \\
 &k \geq 0, n > 1. \quad (6)
 \end{aligned}$$

对 $A_n^k(F)$ 中的 F 作 Laplace 变换得

$$\begin{aligned}
 \tilde{A}_n^k(s) &= \mathcal{L}(A_n^k(F)) \\
 &= \int_0^{\infty} dF \prod_{i=1}^n (f_i)^k \mathbf{I} \int_0^{\infty} dF e^{-sF} \delta(F - \sum_{i=1}^n f_i)] \\
 &= (\int_0^{\infty} df \cdot f^k e^{-sf})^n = \left(\frac{k!}{s^{k+1}} \right)^n, \quad (7)
 \end{aligned}$$

对 $\tilde{A}_n^k(s)$ 作 Laplace 逆变换就得到

$$\begin{aligned}
 A_n^k(F) &= \mathcal{L}^{-1}(\tilde{A}_n^k(s)) \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} ds \left(\frac{k!}{s^{k+1}} \right)^n e^{sF} \\
 &= \frac{(k!)^n}{(n!(k+1)-1)!} F^{n(k+1)-1}. \quad (8)
 \end{aligned}$$

同理, 对 $B_n^k(f, F)$ 作关于 f 和 F 的 Laplace 变换后得

$$\begin{aligned}
 \tilde{B}_n^k(\lambda, s) &= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} df dF \cdot B_n^k(f, F) e^{-\lambda f - sF} \\
 &= \frac{(k!)^{n-1}}{s^{(k+1)(n-1)}} \cdot \frac{k!}{(\lambda + s)^{k+1}}, \quad (9)
 \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}
 B_n^k(f, F) &= \mathcal{L}^{-1}(\tilde{B}_n^k(\lambda, s)) \\
 &= \frac{(k!)^{n-1} f^k (F-f)^{(k+1)(n-1)-1}}{((k+1)(n-1)-1)!} \theta(F-f) \quad (10)
 \end{aligned}$$

直接把这种积分的办法称为 Laplace 变换法. 积分过程中用到了 δ 函数、 θ 函数的性质, Euler 积分以及复变函数中的留数定理^[21], 由于篇幅关系省掉了一些计算的细节. 下面对一些层数较少的系统进行计算和分析, 主要讨论 $\{g_{2M+1}^n\}$ 中某个力的分布, 因为其他层中力分布的计算方法及函数形式与之相似甚至相同.

3.1. $1 \times N$ 的体系

在 (3) 式中, 当 $M = 0$ 时,

$$q_0^N(\mathbf{g}_1) = \delta(F - \sum_{n=1}^N g_1^n) \prod_{n=1}^N \theta(g_1^n). \quad (11)$$

由 (5) (8) 两式 (在 (8) 式中取 $k = 0$) 有

$$\Omega_0^N(F) = \frac{F^{N-1}}{N-1}. \quad (12)$$

由 (1) (4) (10) (12) 式可得到 g_1^k 的力分布

$$\begin{aligned} p_0^N(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dg \delta(f - g_1^k) p_0^N(\mathbf{g}) \\ &= \frac{N-1}{F^{N-1}} (F-f)^{N-2} \theta(F-f). \end{aligned} \quad (13)$$

显然, 同一层上每个力的概率分布形式是一样的. 在极限条件下, 力分布为

$$\begin{aligned} p_0^\infty(f) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(\frac{F}{N-1}\right)} \left(1 - \frac{f}{F}\right)^{\frac{F}{f}-2} \\ &= \frac{1}{f} e^{-f/f}. \end{aligned} \quad (14)$$

这时, 力分布与简单热力学系统相似, 在整个区间上服从玻尔兹曼型分布, 呈指数的单调减小. 对于 (3) 式所示的 $(2M+1) \times N$ 的系统, 如果去掉 $\{c_i^j\}$ 的非负条件, 则可将 $q_M^N(\mathbf{g})$ 写为

$$\begin{aligned} q_M^N(\mathbf{g}) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dc q_M^N(\mathbf{g}, \mathbf{c}) \\ &\Rightarrow \prod_{m=1}^{2M+1} \left(\delta(F - \sum_{n=1}^N g_m^n) \prod_{n=1}^N \theta(g_m^n) \right). \end{aligned} \quad (15)$$

这种情况可粗略地看成是颗粒间存在有黏结力的情形. 由 (15) 式可看出去掉 $\{c_i^j\}$ 的非负条件后相当于 $\{g_m^n\}$ 的各层之间没有关联, 每一个颗粒上力的极限分布都是 (14) 式的指数分布. 当然这种情形不对应模型中真实的物理状态, 但从后面的讨论中可以看到非负条件以及层与层之间关联能导致非单调的极限分布.

3.2. $2 \times N$ 的体系

对于 $2 \times N$ 体系 相当于 (3) 式中 $M = \frac{1}{2}$ 的情

况, 但平衡约束只有两组而不是四组. 这时

$$\begin{aligned} & q_{1/2}^N(\mathbf{g}_1, \mathbf{c}_1, \mathbf{g}_2) \\ &= \delta(F - \sum_{n=1}^N g_2^n) \cdot \left[\prod_{n=1}^N (\delta(g_1^n - c_1^{2n-1} - c_1^{2n}) \right. \\ &\quad \times \delta(g_2^n - c_1^{2n} - c_1^{[2n+1]}) \\ &\quad \left. \times \theta(g_1^n) \theta(g_2^n) \right] \prod_{j=1}^{2N} \theta(c_1^j). \end{aligned} \quad (16)$$

利用 δ 函数、 θ 函数的定义, 先对 (16) 式中的 g_1 积分, 再对 c_1 的偶数项 $c_{1\text{ev}}$ 积分, 最后对 c_1 的奇数项 $c_{1\text{od}}$ 积分, 可得到

$$\begin{aligned} q_{1/2}^N(\mathbf{g}_2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dc_{1\text{od}} dc_{1\text{ev}} d\mathbf{g}_1 \cdot q_{1/2}^N(\mathbf{g}_1, \mathbf{c}_1, \mathbf{g}_2) \\ &= \delta(F - \sum_{n=1}^N g_2^n) \prod_{n=1}^N (\delta(g_2^n) \theta(g_2^n)). \end{aligned} \quad (17)$$

上面的积分次序很重要, 如果先对 c_1 积分再对 g_1 积分则问题将会十分复杂. 从后面对 $3 \times N$ 体系的计算可以看出, 连续地利用这种积分次序后就能把顶层力的 $q_M^N(\mathbf{g}_{\text{top}})$ 函数表示出来, 为了表述方便将这种积分次序称为正规顺序. 同样可由 (8) (10), (17) 式计算 g_2^k 的力分布, 得到

$$p_{1/2}^N(f) = \frac{(2N-1)(2N-2)}{F^{2N-1}} f(F-f)^{2N-3} \theta(F-f), \quad (18)$$

其极限分布

$$p_{1/2}^\infty(f) = \frac{4}{f} \left(\frac{f}{f}\right) e^{-\frac{2f}{f}}. \quad (19)$$

这是一个非单调变化的分布, 在平均力 f 附近是一个峰. 由 (17) 式计算过程可知这是由于 c_1 的非负约束条件将 g_1, g_2 关联起来所得到的结果. 在 $2 \times N$ 系统中, g_1, g_2 中力的分布形式一样, 但可以计算出 c_1 中力的极限分布仍然是 (14) 式的形式, 原因是 $\{c_i^j\}$ 在此时只有一层. 要得到关于 $\{c_i^j\}$ 的非平凡分布, 必须要考虑更多层的体系, 使 $\{c_i^j\}$ 的每一层被 $\{g_m^n\}$ 中各层的非负约束关联起来.

3.3. $3 \times N$ 的系统

对 3 层以上的系统进行计算难度要大得多, 从后面的计算可以看出困难在于同一层上的力是交错关联的. 在 (3) 式中取 $M = 1$ 得到 $q_1^N(\mathbf{g}_1, \mathbf{c}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{c}_2, \mathbf{g}_3)$, 用正规顺序将 g_1, c_1 积分掉得到

$$\begin{aligned} & q_1^N(\mathbf{g}_2, \mathbf{c}_2, \mathbf{g}_3) \\ &= \delta(F - \sum_{n=1}^N g_3^n) \cdot \left[\prod_{n=1}^N (\delta(g_3^n - c_2^{2n-1} - c_2^{2n}) \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \delta(g_2^n - c_2^{2n} - c_2^{[2n+1]}) \\ & \times g_2^n \delta(g_2^n) \delta(g_3^n) \prod_{j=1}^{2N} \delta(c_2^j). \end{aligned} \quad (20)$$

这与(16)式相似,只是多了 g_2^n 这一项.同样地,用正规顺序对 g_2, c_2 积分,得到

$$q_1^N(g_3) = \delta(F - \sum_{n=1}^N g_3^n \prod_{n=1}^N \delta(g_3^n)) \cdot \psi(g_3), \quad (21)$$

其中

$$\begin{aligned} \psi(g_3) &= \int_0^{+\infty} d\mathbf{c}_{2\text{od}} \prod_{n=1}^N ((g_3^n - c_2^{2n-1} + c_2^{[2n+1]}) \\ & \times \delta(g_3^n - c_2^{2n-1})). \end{aligned} \quad (22)$$

这个积分要用前面介绍的 Laplace 变换法计算,考虑对 g_3 的 N 维 Laplace 变换,有

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}(s) &= \int_0^{+\infty} d\mathbf{c}_{2\text{od}} \prod_{n=1}^N \left\{ \int_0^{+\infty} dg_3 (g_3^n - c_2^{2n-1} + c_2^{[2n+1]}) \right. \\ & \times \delta(g_3^n - c_2^{2n-1}) e^{-s_n c_3^n} \left. \right\} \\ &= \int_0^{+\infty} d\mathbf{c}_{2\text{od}} \prod_{n=1}^N \frac{e^{-s_n c_2^{2n-1}}}{s_n^2} (s_n c_2^{[2n+1]} + 1) \\ &= \prod_{n=1}^N \frac{(s_{[n-1]} + s_n)}{s_n^4}, \end{aligned} \quad (23)$$

上式中 s 的指标 $[n-1]$ 表示关于 N 的循环指标.将 $\tilde{\psi}(s)$ 中分子部分的循环乘积展开后再作 N 维 Laplace 逆变换就可得到 $\psi(g_3)$,但展开形式比较复杂,不便于分析问题.因此,在后面直接用 $\tilde{\psi}(s)$ 进行计算.由(21)式,为了求某个 g_3^k 的力分布,需计算以下两个积分:

$$\begin{aligned} \Omega_1^N(F) &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\mathbf{g}_3 \delta(F - \sum_{n=1}^N g_3^n) \\ & \times \left[\prod_{n=1}^N \delta(g_3^n) \right] \cdot L^{-1}(\tilde{\psi}(s)) \\ q_1^N(f, F) &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\mathbf{g}_3 \delta(f - g_3^k) \\ & \times \delta(F - \sum_{n=1}^N g_3^n \prod_{n=1}^N \delta(g_3^n)) \\ & \times L^{-1}(\tilde{\psi}(s)). \end{aligned} \quad (24)$$

对 $\Omega_1^N(F)$ 中的 F 作 Laplace 变换,将(23)代入(24)式可得

$$\begin{aligned} \tilde{\Omega}_1^N(\lambda) &= \frac{1}{(2\pi i)^N} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} ds \left[\prod_{n=1}^N \frac{(s_{[n-1]} + s_n)}{s_n^4} \right] \\ & \times \left[\prod_{n=1}^N \int_0^{+\infty} dg_3^n e^{-(\lambda-s_n)g_3^n} \right] \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^N} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} ds \left[\prod_{n=1}^N \frac{(s_{[n-1]} + s_n)}{s_n^4 (\lambda - s_n)} \right]. \quad (25)$$

上面的积分可通过约当引理及留数定理来计算.由于被积式的分子部分是循环乘积,因此对每个 s_n 进行积分都会涉及到形如下式的积分:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} ds_n \frac{(s_{[n-1]} + s_n) \delta(s_n + s_{[n+1]})}{s_n^4 (\lambda - s_n)} \\ &= \frac{2}{\lambda^4} (s_{[n-1]} + \lambda) \delta(\lambda + s_{[n+1]}). \end{aligned} \quad (26)$$

由上式的特征可看出(25)式中每个 s_n 的积分产生一个 $\frac{2}{\lambda^4}$,对所有 s_n 积分后会产生 N 项 $(\lambda + \lambda)$,因此

$$\tilde{\Omega}_1^N(\lambda) = \frac{4^N}{\lambda^{3N}}. \quad (27)$$

对 $\tilde{\Omega}_1^N(\lambda)$ 作 Laplace 逆变换就得

$$\Omega_1^N(F) = L^{-1}(\tilde{\Omega}_1^N(\lambda)) = \frac{4^N F^{3N-1}}{(3N-1)!}. \quad (28)$$

同样地,对 $q_1^N(f, F)$ 中的 f 及 F 作 Laplace 变换并运用(26)式可得到

$$\begin{aligned} \tilde{q}_1^N(\eta, \lambda) &= \frac{1}{(2\pi i)^N} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} ds \frac{(s_{[k-1]} + s_k) \delta(s_k + s_{[k+1]})}{s_k^4 (\eta + \lambda - s_k)} \\ & \times \left[\prod_{s_k}^* \frac{(s_{[n-1]} + s_n)}{s_n^4 (\lambda - s_n)} \right] \\ &= \frac{4^{N-1} (\eta + 2\lambda)^2}{(\eta + \lambda)^2 \lambda^{3N-2}}, \end{aligned} \quad (29)$$

其中 $\prod_{s_k}^*$ 表示不含 s_k 的所有项的乘积.对上式中的 η, λ 作 Laplace 逆变换,由反演公式及复函数在极点处留数的计算^[21]可得出

$$\begin{aligned} q_1^N(f, F) &= 4^{N-1} \left(\frac{1}{6} f^3 \frac{(F-f)^{3N-5}}{(3N-5)!} \right. \\ & \quad \left. + f^2 \frac{(F-f)^{3N-4}}{(3N-4)!} \right. \\ & \quad \left. + f \frac{(F-f)^{3N-3}}{(3N-3)!} \right) \delta(F-f). \end{aligned} \quad (30)$$

由(28)(30)式就可以给出 $3 \times N$ 系统中力的极限分布

$$\begin{aligned} p_1^\infty(f) &= \frac{9}{8 \langle f \rangle} \left[3 \left(\frac{f}{\langle f \rangle} \right)^3 \right. \\ & \quad \left. + 6 \left(\frac{f}{\langle f \rangle} \right)^2 + 2 \left(\frac{f}{\langle f \rangle} \right) \right] e^{-3\frac{f}{\langle f \rangle}}. \end{aligned} \quad (31)$$

这同样是一个非单调的分布,但比 $2 \times N$ 的情形复杂许多,主要的原因在于(22)式中被积函数是关于 $c_{2\text{od}}$ 的循环乘积,这是 $c_{2\text{od}}$ 中各个力交错关联的结果.

3.4. $M \times N$ 体系的退关联近似

从 (20)(21) 式的计算过程可以看到, 在计算出 $q(g_3)$ 后, 就可以利用 (21) 式的结果以及正规顺序的积分步骤来研究 $4 \times N$ 的体系, 对于任意层的体系也可以运用相似的步骤. 但由于交错关联的原因, 使得积分的过程及结果的复杂程度会随着层数的增加而急剧增加. 但可以用近似的办法来讨论任意的 $M \times N$ 体系, 从理论上了解一般情况下分布的特征, 这里采用消去同一层中交错关联的办法.

在 (22) 式中将 $c_2^{[2n+1]}$ 改成 $c_2^{[2n-1]}$, 这时每一项 $c_2^{[2n-1]}$ 间没有交错关联, 是独立的. 把这种方法称为退关联近似. 由 (22) 式很容易得到

$$\hat{q}_1^N(g_3) = \delta(F - \sum_{n=1}^N g_3^n \prod_{n=1}^N (g_3^n) \alpha(g_3^n)). \quad (32)$$

将以上方法用于讨论 $M \times N$ 体系 ($M \geq 3$) 中的 $q_{(M-1)2}^N(g_M)$ 需要进行 $M-2$ 次关于 $\{c_i^j\}$ 的退关联近似. 用数学归纳法容易证明

$$\hat{q}_{(M-1)2}^N(g_M) = \delta(F - \sum_{n=1}^N g_M^n \prod_{n=1}^N (g_M^n)^{M-1} \alpha(g_M^n)), \quad (33)$$

这时, 直接运用 (8)(10) 两式就可给出力 g_M^k 的分布

$$\begin{aligned} \hat{p}_{(M-1)2}^N(f) &= \frac{B_N^{M-1}(f, F)}{A_N^{M-1}(F)} \\ &= \frac{(NM-1)! f^{M-1} (1 - \frac{f}{F})^{M(N-1)-1}}{(M-1)!(M(N-1)-1)! F^M} \\ &\quad \times \theta\left(1 - \frac{f}{F}\right). \end{aligned} \quad (34)$$

因此退关联近似下的极限分布

$$\hat{p}_{(M-1)2}^\infty(f) = \frac{M^M}{(M-1)!} \left(\frac{f}{F}\right)^{M-1} e^{-M\frac{f}{F}}, \quad (35)$$

这也是非单调的分布形式, 比 (31) 式简单许多. 可以证明, 当 $M \rightarrow \infty$ 时 $\hat{p}_{(M-1)2}^\infty(f)$ 是关于 f 的 Dirac- δ 函数, 因此只能用它来近似地处理 M 值较小时的力分布问题.

4. 结 论

综合以上计算过程以及 (31)(35) 两式的结果,

得到以下结论: 标量力网系综模型给出的极限分布一般是多项式与指数函数的乘积, 同一层中力的交错关联使得极限分布的多项式部分既有高次项也有低次项; 层数 M 越大体系中层与层之间的关联就越复杂, 而且分布非单调变化就来源于体系中力的非负约束及层与层之间的关联.

如图 3 所示, $M > 1$ 时体系的力分布都不是单调变化的, $f < 1$ 时多项式部分起主要作用, $f > 1$ 时指数部分起主要作用, 在接近于平均力处取最大值. 这可以定性地说说明实验^[7]中的结果. 可以看到, 退关联近似的结果与精确解之间在平均力附近存大较大差异, 同一层间的交错关联抑制了峰的高度的增加. 这说明交错关联有可能导致 $M \rightarrow \infty$ 时力的极限分布不是 δ 函数, 而是一个光滑的函数.

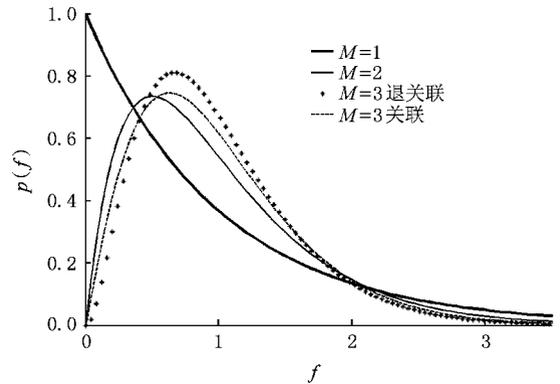


图 3 $M=1, 2, 3$ 时的极限分布以及 $M=3$ 时在退关联近似下的极限分布, 取平均力 $f=1$

尽管文中提出的标量系综模型忽略掉实际颗粒体系中的许多复杂的因素, 但仍然得出了很好的结果, 关键在于该模型集中反映了力的不确定性及约束条件这两个重要的因素. 本文中提出的 Laplace 变换法可以用于严格计算任意层时的力分布, 但由于交错关联的原因使得层数较多时计算变得非常复杂, 对任意 $M \times N$ 体系的严格计算以及 $M \rightarrow \infty$ 时的极限分布还有待进一步研究. 另外, 标量力网系综模型可以用于讨论力的关联、响应等问题, 这些工作正在进行中.



- [1] Jacques Duran 2000 *Sands , Powders , and Grains* (New York : Springer)
- [2] de Gennes P G 1999 *Rev. Mod. Phys.* **71** 374
- [3] Lu K Q , Liu J X 2004 *Physics* . **33** 629 [in Chinese] 陆坤权、刘寄星 2004 *物理* **33** 629]
- [4] Yi C H , Mu Q S , Miao T D 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 3636 [in Chinese] 宜晨虹、慕青松、苗天德 2008 *物理学报* **57** 3636]
- [5] Mueth D M , Jaeger H M , Nagel S R 1998 *Phys. Rev. E* **57** 3164
- [6] Howell D , Behringer R P , Veje C 1999 *Phys. Rev. Lett.* **82** 5241
- [7] Majumdar T S , Behringer R P 2005 *Nature* **435** 1079
- [8] Radjai F , Jean M , Moreau J J , Roux S 1996 *Phys. Rev. Lett.* **77** 274
- [9] Liu C H , Nagel S R , Schecter D A , Coppersmith S N , Majumdar S , Narayan O , Witten T A 1995 *Science* . **269** 513
- [10] Coppersmith S N , Liu C H , Majumdar S , Narayan O , Witten T A 1996 *Phys. Rev. E* **53** 4673
- [11] Socolar J E S 1998 *Phys. Rev. E* **57** 3204
- [12] Edwards S F , Oakeshott R B S 1989 *Physica A* **157** 1080
- [13] Edwards S F , Grinev D V 2001 *Physica A* **302** 162
- [14] Snoeijer J H , Vlugt T J H , van Hecke M , van Saarloos W 2004 *Phys. Rev. Lett.* **92** 054302
- [15] Snoeijer J H , Vlugt T J H , Ellenbroek W G , van Hecke M , van Leeuwen J M J 2004 *Phys. Rev. E* **70** 061306
- [16] Snoeijer J H , Ellenbroek W G , Vlugt T J H , van Hecke M 2006 *Phys. Rev. Lett.* **96** 098001
- [17] Tighe B P , Socolar J E S 2005 *Phys. Rev. E* **72** 031306
- [18] Ostojic S , Panja D 2006 *Phys. Rev. Lett.* **97** 208001
- [19] van Eerd A R T , Ellenbroek W G , van Hecke M , Snoeijer J H , Vlugt T J H 2007 *Phys. Rev. E* **75** 060302
- [20] Reichl L E 1980 *A Modern Course in Statistical Physics* (Austin : Univ. Texas Press)
- [21] Xu Z L 2000 *Modern Mathematics Handbook · Classical Mathematics* (Wuhan : HUST Press) [in Chinese] 徐利志主编 2000 *现代数学手册·经典数学卷* (武汉 : 华中科技大学出版社)]

The scalar force network ensemble model for force distribution in granular system^{*}

Zhang Xing-Gang[†] Long Zheng-Wen Hu Lin

(Lab for Photoelectric Technology and Application , College of Science , Guizhou University , Guiyang 550025 , China)

(Received 13 May 2008 ; revised manuscript received 12 July 2008)

Abstract

A scalar model of force network ensemble is proposed to investigate the force distribution in static granular system. The Laplace transform method is found as an effective method to solve the integral issue of probability density under complex constraints. On the condition that the system has few layers , the analytical expression for the limit distribution is accounted for which is the product of the polynomial function and the exponential function. When the force is near the average force , the distribution has its maximum value , when it 's above the average force , the distribution decreases exponentially.

Keywords : static granular system , force phase space , ensemble of force networks

PACC : 0520 , 4610 , 0200

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10374021) , Guizhou Province Innovation Foundation for Graduate Students , China (Grant No. 2006010) , Research Foundation of Science and Technology Bureau of Guizhou Province , China (Grant No. 20072003) .

[†] Corresponding author. E-mail : sci_xgzhang@gzu.edu.cn