四个部分相干点源的完全相消干涉特性*

程 科 吕百达[†] (四川大学激光物理与化学研究所,成都 610064) (2007年9月19日收到 2008年6月24日收到修改稿)

使用部分相干光的干涉定律,对部分相干光照明呈正方形对称四孔干涉仪的干涉场做了研究.结果表明,一定 条件下,可出现完全相消干涉,并存在光强和光谱相干度的相位奇点.与二个、三个部分相干点源的干涉做了比较. 对所得结果物理上可解释为:虽然四个点源是部分相干的,但从两个点源出射场之和与从另外两个点源出射场之 和却可能是完全相关的.

关键词:相关奇点光学,完全相消干涉,部分相干光,刃型位错线 PACC:4225,4225K

1.引 言

部分相干光的奇点光学效应因具有重要理论研 究意义和在光信息处理 原子俘获和操纵等方面诱 人的应用前景 已成为奇点光学的一个研究热点 即 相关奇点光学^{1-7]}.最近,Wolf及其合作者发现用部 分相干光照明杨氏双孔干涉仪时,在观察面上会出 现光谱相干度的相位奇点(简称相关奇点)^{8]},并证 明不存在光强的相位奇点(简称光强奇点),然而,当 用部分相干光照明三孔干涉仪时,会出现完全相消 干涉 即此时存在光强奇点, 文献 8 对这一奇点光 学新效应做了详细理论研究,并对三个部分相干点 源的完全相消干涉做了物理解释,对部分相干点源 干涉的新效应已设计了相关的实验^{9]},并在声频段 得到实验证实[10],本文的目的是将三孔干涉仪的结 果推广到四孔干涉仪,研究四个部分相干点源的干 涉场特性,在文献 8.9.11 和本文研究基础上,可将 结果推广用于研究部分相于光照明 N 孔干涉仪时 干涉场的一般特性.

四个部分相干点源干涉产生的光强 奇点

图1给出四孔干涉仪的基本几何构形.在不透

明屏 *M* 上有呈正方形 边长为 *a* 对称的四个孔,分 别为 Q_1 , Q_2 , Q_3 , Q_4 , 位置矢量分别为 ρ_1 , ρ_2 的点 P_1 , P_2 在观察屏 *F* 上, *L* 为两屏之间的距离, 孔面 积足够小可以认为是点源, 且 $a \ll L$.



图 1 四孔干涉仪的示意图

设频率为 ω 的单色部分相干光照明四孔,入射 角和衍射都很小,干涉场为各个孔的出射场的叠 加^[12].若点 *P*。的坐标为**ρ**。则干涉场为

$$U(\boldsymbol{\rho}_n, \omega) = \sum_{j=1}^{4} U_j(\boldsymbol{\rho}_n, \omega), \quad (1)$$

其中

$$U_{j}(\boldsymbol{\rho}_{n} \omega) = -i \frac{kA}{2\pi} U_{0}(Q_{j} \omega) \frac{e^{ikR_{jn}}}{R_{jn}}$$

(j = 1 2 3 A; n = 1 2) (2)

是第 j 个孔在点 P_n 处的场 , $U_0(Q_j,\omega)$ 是第 j 个孔的入射场 , R_j 是第 j 个孔与点 P_n 的距离 ,A 是孔的面积 ,设 j 孔面积相等.

^{*} 国家自然科学基金(批准号:10574097,10874125)资助的课题.

[†] E-mail:baidalu0@tom.com

干涉场的交叉谱密度为

 $W(\boldsymbol{\rho}_1,\boldsymbol{\rho}_2,\boldsymbol{\omega}) = U^*(\boldsymbol{\rho}_1,\boldsymbol{\omega})U(\boldsymbol{\rho}_2,\boldsymbol{\omega}). (3)$ 若 $\boldsymbol{\rho}_1 = \boldsymbol{\rho}_2 = \boldsymbol{\rho}$,点 P 处的光强(谱密度)为

 $S(\boldsymbol{\rho},\omega) = U^*(\boldsymbol{\rho},\omega)U(\boldsymbol{\rho},\omega)$. (4) 将(1)(2)式代入(4)式,并设 $R_1 \approx R_2 \approx R_3 \approx R_4 \approx R^{[11]}$ 经推导(见附录 A)得

$$S(\boldsymbol{\rho}) = \sum_{j=1}^{4} U_{j}^{*}(\boldsymbol{\rho}) \sum_{j=1}^{4} \mu_{j}(\boldsymbol{\rho})$$
$$= S_{1} + S_{2} + S_{3} + S_{4}$$
$$+ 2Re[\mu_{12}\sqrt{S_{1}S_{2}} + \mu_{23}\sqrt{S_{2}S_{3}} + \mu_{34}\sqrt{S_{3}S_{4}}]$$

+ $\mu_{14} \sqrt{S_1 S_4}$ + $\mu_{13} \sqrt{S_1 S_2}$ + $\mu_{24} \sqrt{S_2 S_4}$],(5) 其中 Re 表示实部 , $S_j = |U_j(\rho)|^2$ 是第 *j* 孔在 ρ 处 的光强 , μ_{ij} (*i*, *j* = 1, 2, 3, 4)表示部分相干光第 *i*, *j* 两孔间的光谱相干度.由 *S*(ρ) = 0 即 $\sum_{j=1}^{4} U_j(\rho)$ = 0^{111} 得到存在光强奇点的必要条件是

$$S_{1} = |U_{2} + U_{3} + U_{4}|^{2}$$

$$= S_{2} + S_{3} + S_{4} + 2r_{23}\sqrt{S_{2}S_{3}}$$

$$+ 2r_{24}\sqrt{S_{2}S_{4}} + 2r_{34}\sqrt{S_{3}S_{4}}, \quad (6a)$$

$$S_{2} = |U_{1} + U_{3} + U_{4}|^{2}$$

$$= S_{1} + S_{3} + S_{4} + 2r_{13}\sqrt{S_{1}S_{3}}$$

$$+ 2r_{14}\sqrt{S_{1}S_{4}} + 2r_{34}\sqrt{S_{3}S_{4}}, \quad (6b)$$

$$S_{3} = |U_{1} + U_{2} + U_{4}|^{2}$$

$$= S_{1} + S_{2} + S_{4} + 2r_{12}\sqrt{S_{1}S_{2}}$$

$$+ 2r_{14}\sqrt{S_{1}S_{4}} + 2r_{24}\sqrt{S_{2}S_{4}}, \quad (6c)$$

$$S_{4} = |U_{1} + U_{2} + U_{3}|^{2}$$

= $S_{1} + S_{2} + S_{3} + 2r_{12}\sqrt{S_{1}S_{2}}$
+ $2r_{23}\sqrt{S_{2}S_{3}} + 2r_{13}\sqrt{S_{1}S_{3}}$, (6d)

其中 $r_{ij} = \operatorname{Re}\{\mu_{ij}\}$ (i, j = 1, 2, 3, 4), $-1 \leq r_{ij} \leq 1$.

设四孔在 ρ 处光强相等 , $S_1 = S_2 = S_3 = S_4 = S_0^{[11]}$,方程组(6a)—(6d)简化为

 $1 + r_{23} + r_{24} + r_{34} = 0, \quad (7a)$ $1 + r_{13} + r_{14} + r_{34} = 0, \quad (7b)$ $1 + r_{12} + r_{14} + r_{24} = 0, \quad (7c)$ $1 + r_{12} + r_{23} + r_{13} = 0. \quad (7d)$ $(7a) - (7d) \operatorname{cd} \operatorname{cd}$

满足该方程组 在此我们仅给出三组解:

$$r_{13} = r_{24} = r_{14} = r_{23} = -\frac{1}{2}$$
, $r_{12} = r_{34} = 0.$ (8a)
 $r_{13} = r_{24} = r_{14} = r_{23} = r_{12} = r_{34} = -\frac{1}{3}$. (8b)



图 2 四个部分相干点源干涉产生的光强分布(*L* = 2000 mm, *a* = 1 mm) (a)满足条件(8a);(b)满足条件(8b);(c)满足条件(8c)

x/mm

$$r_{13} = r_{24} = r_{14} = r_{23} = -\frac{1}{6}$$
,
 $r_{12} = r_{34} = -\frac{2}{3}$. (8c)

值得指出的是 (7a)-(7d)式只是给出了四孔位置 呈正方形几何对称 ,且 $S_1 = S_2 = S_3 = S_4 = S_0$ 时 , r_{ii} 之间满足的关系.对于完全相消干涉,文献 11 论出 了 N 孔干涉的必要条件 即 def $M^{(N)}$]= 0 $M^{(N)}$ 是 含有 μ_{ij} 的 N × N 矩阵 ,其中 $M_{ij}^{(N)} = \begin{cases} \mu_{ij} & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$, $\mu_{ij}^{*} =$ μ_i. 显然,本文的三组解(8a)--(8c)也满足 det $[M^{(N)}] = 0.$

图 2(a)-(c)分别给出了当条件(8a)-(8c)式 满足时 四个部分相干点源产生完全相消干涉的光 强分布.其中 L = 2000 mm, a = 1 mm.从图 2 可以看 到,当r;,取不同的值时,虽然光强分布不同,但均存 在光强奇点.

图 3 以满足条件 r₁₃ = r₂₄ = r₁₄ = r₂₃ = -1/2, r₁₂ $= r_{34} = 0$ 为例,说明距离 L 和边长 a 变化对四孔干 涉产生的光强奇点分布的影响,由图 3 知,当距离 L 逐渐增大和边长 a 逐渐减小时,单位坐标平面内的

-1

0

x/mm

1

2

I

0

-1

-2

w/mm

光强奇点数目变少:光强奇点的暗区范围增大。

3. 四个部分相干点源干涉产生的相关 奇占

把(1)-(4)式代入光谱相干度定义式

 $\mu(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2) = W(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2) / \sqrt{S(\boldsymbol{\rho}_1)S(\boldsymbol{\rho}_2)}, (9)$ 即可得出在观察屏 F 上二点 P_1 , P_2 的光谱相干度 $\mu(\boldsymbol{\rho}_1,\boldsymbol{\rho}_2).$

图 4 给出了满足条件(8a)-(8c),L = 2000 mm, a = 1 mm 时的光谱相干度的模 | μ | 和等相位图,其 中参考点 $\rho_1(x_1 = -1 \text{ mm }, y_1 = 1 \text{ mm })$. 由图 4(a)知, 存在数条 $|_{\mu}| = 0$ 的线,在点 A—I 处光强 S = 0.在 图 4(d)中,也可以明显看到存在 π 突变的刃型位错 线 即为 $|_{\mu}|=0$ 的相关奇点.和图 4(a)对应 点 A— I处光强S = 0这些点同时也为光强奇点,由此可以 看到,光强奇点位于 $|\mu|=0$ 的刃型位错线上.当



(c)

I

0

-1

-2

-2

-1

0

x/mm

1

mm / K

= 1.5 mm; L = 3000 mm; (c) a = 0.8 mm; (d) a = 1.5 mm.



图 4 不同 r_{ij} 时,光谱相干度的模 | μ | (a)-(c)和等相位图(d)-(f),参考点 $\rho_1(x_1 = -1 \text{ mm}, y_1 = 1 \text{ mm}), a = 1 \text{ mm}, L = 2000 \text{ mm}. (a), (d)满足条件(8a); (b), (e)满足条件(8b); (c), (f)满足条件(8c)$

(8b)和(8c)式满足时,类似结果分别见图4(b)(e) 和(c)(f).

图 5 给出了满足条件(8a)时,不同参考点位置 上的光谱相干度 μ 的等相位图, L = 2000 mm, a = 1 mm.从图 5 可以看到,相关奇点的分布与参考点的选取有关.图 6 给出了满足条件(8a)时,不同距离 *L* 和边长 *a* 对相关奇点的影响,参考点选取与图 4 相同.从图 6 可以看到,当距离 *L* 增加和边长 *a* 减小



时,刃型位错线,即相关奇点)分布的密度变小.

是完全相关的 ,即 | $\mu_{\alpha\beta}$ | = 1($\mu_{\alpha\beta}$ 是 α , β 间的光谱相 干度) 就可实现完全相消干涉

由
$$\mu_{\alpha\beta} = W_{\alpha\beta} / \sqrt{S_{\alpha} S_{\beta}}$$
 得到
 $|W_{\alpha\beta}|^2 = S_{\alpha} S_{\beta}.$ (10)

设 Q_1 , Q_2 间, Q_3 , Q_4 间的距离均比波长小得多, 使 得它们的总的场分布近似等于各个场分布之和, 即

$$U_{\alpha} = U_{Q_1} + U_{Q_2}$$
, (11a)

$$U_{\beta} = U_{Q_3} + U_{Q_4}$$
 , (11b)

把(11)式代入 $W_{\alpha\beta} = U_{\alpha}^{*} U_{\beta}$ 得

 $W_{a\beta} = W_{13} + W_{14} + W_{23} + W_{24}$, (12) 其中 W_{13} , W_{14} , W_{23} , W_{24} 分别为 Q_1 , Q_3 ; Q_1 , Q_4 ; Q_2 , Q_3 和 Q_2 , Q_4 间的交叉谱密度. 并且

$$S_{\alpha} = S_1 + S_2 + 2\sqrt{S_1 S_2} \operatorname{Re}\{\mu_{12}\}, \quad (13)$$

 $S_{\beta} = S_3 + S_4 + 2\sqrt{S_3S_4}\operatorname{Re}\{\mu_{34}\}.$ (14) 假设各个点源间光谱相干度为实数且相等¹¹¹, $\mu_{12} = \mu_{24} = \mu_{14} = \mu_{23} = \mu_{12} = \mu_{34} = \mu_0$,且 $S_1 = S_2 = S_3 = S_4 = S_0$.将(12)—(14)式代入(10)式得到

$$3\mu_0^2 - 2\mu_0 - 1 = 0.$$
 (15)

(15)式的两个解为 μ₀ = 1(完全相干)和 μ₀ = -1/3,
即(8b)式.若各个点源间光谱相干度不相等时,将
(12)-(14)式代入(10)式可化为

$$(\mu_{13} + \mu_{14} + \mu_{23} + \mu_{24})^{*}$$

= (2 + 2\mu_{12})(2 + 2\mu_{34}). (16)

易证(8a) 式和(8c) 式满足(16) 式.

将 α , β 内的点源分别相互远离 ,在 Q_1 , Q_2 和 Q_3 , Q_4 中垂线上的总的场分布等于各个场分布之 和^[11].我们移动 Q_1 , Q_2 , Q_3 , Q_4 保持对称性(如正 方形),就可以让 α , β 间保持完全相关. 对(8a), (8c)式可对 μ_{ij} 做相应假设得出.

4.结 论

本文对部分相干光照明呈正方形对称四孔干涉 (仪的干涉场特性做了详细研究.当满足条件(8)时, 会出现完全相消干涉,并存在光强奇点和相关奇点. 随观察面距离增加和孔间距离的减小,光强奇点和 刃型位错线(相关奇点)分布的密度变小.尽管此时 对任一对部分相干点源没有完全相关性,但从二个 点源构成的'黑匣子"与另二个点源构成的'黑匣子" 的出射场却可能是完全相关的,这即四束(N=4)部



图 5 满足条件(8a)时 改变参考点坐标时光谱相干度的等相位 图 (a) $x_1 = -1 \text{ mm}$, $y_1 = 1 \text{ mm}$; (b) $x_1 = -1 \text{ mm}$, $y_1 = 0$; (c) $x_1 = 1 \text{ mm}$, $y_1 = -1 \text{ mm}$

对上述结果的物理解释见图 7.其中点源 Q_1 , Q_2 和 Q_3 , Q_4 分别在 α , β 两个"黑匣子"内.若 α , β



图 6 当条件(8a)满足时,改变距离 L 和边长 a 时四个部分相干光点源干涉的光谱相干度的等相位图(参考点选取 与图 4 相同. L = 2000 mm) (a) a = 0.8 mm, (b) a = 1.5 mm; L = 3000 mm, (c) a = 0.8 mm, (d) a = 1.5 mm





分相干光干涉场区别于两束(N = 2)部分相干干涉 场可出现完全相消干涉的物理机理.值得指出的是, 对 N = 3的部分相干点源的干涉^[11],光强奇点和相 关奇点的位置是分离的,而当 N = 4时,光强奇点却 位于 $|\mu| = 0$ 的刃型位错线上.进一步,可将文献 [8 9,11 和本文的结果用于研究 N = 奇数和 N = 偶 数时部分相干光照明 N 孔干涉仪时干涉场的一般 特性,有推广应用意义.对在光频段部分相干点源完 全相消干涉的实验证实尚需做深入研究.

附录 A

从部分相干光的干涉定律^[13]出发,由(1),(2),(4)式 得

$$S(\boldsymbol{\rho}) = \sum_{j=1}^{4} U_{j}^{*}(\boldsymbol{\rho}) \sum_{j=1}^{4} U_{j}(\boldsymbol{\rho})$$

$$= |U_{1}(\boldsymbol{\rho})|^{2} + |U_{2}(\boldsymbol{\rho})|^{2} + |U_{3}(\boldsymbol{\rho})|^{2} + |U_{4}(\boldsymbol{\rho})|^{2}$$

$$+ 2R\{ U_{1}^{*}(\boldsymbol{\rho})U_{2}(\boldsymbol{\rho}) + U_{2}^{*}(\boldsymbol{\rho})U_{3}(\boldsymbol{\rho})$$

$$+ U_{3}^{*}(\boldsymbol{\rho})U_{4}(\boldsymbol{\rho}) + U_{1}^{*}(\boldsymbol{\rho})U_{4}(\boldsymbol{\rho})$$

$$+ U_{1}^{*}(\boldsymbol{\rho})U_{3}(\boldsymbol{\rho}) + U_{2}^{*}(\boldsymbol{\rho})U_{4}(\boldsymbol{\rho})], \quad (A1)$$

$$U_{1}^{*}(\boldsymbol{\rho})U_{2}(\boldsymbol{\rho})$$

$$= U_{0}^{*}(Q_{1})U_{0}(Q_{2}) \left(\frac{kA}{2\pi}\right)^{2} e^{ik(R_{2}-R_{1})}/R_{1}R_{2}$$

$$= \mu_{12} \sqrt{I(Q_{1})I(Q_{2})} \left(\frac{kA}{2\pi}\right)^{2} e^{ik(R_{2}-R_{1})}/R_{1}R_{2}$$

$$= \mu_{12} \frac{kA}{2\pi} \frac{\sqrt{I(Q_1)}}{R_1} \frac{kA}{2\pi} \frac{\sqrt{I(Q_2)}}{R_2} e^{iK(R_2 - R_1)} , \quad (A2)$$

其中 $(Q_1) = |U_0(Q_1)|^2$ $(Q_2) = |U_0(Q_2)|^2$ 分别表示孔 Q_1 , Q_2 处的光强.

因为

$$\sqrt{S_1} = |U_1(\boldsymbol{\rho})| = \frac{kA}{2\pi} \frac{\sqrt{KQ_1}}{R_1},$$
$$\sqrt{S_2} = |U_2(\boldsymbol{\rho})| = \frac{kA}{2\pi} \frac{\sqrt{KQ_2}}{R_2},$$

且 $R_1 \approx R_2$ (A2)式可写为

$$U_1^*(\rho)U_2(\rho) = \mu_{12}\sqrt{S_1S_2}$$
. (A3)

同理,

$$U_2^*(\rho)U_3(\rho) = \mu_{23}\sqrt{S_2S_3}$$
, (A4)

$$U_3^*(\rho)U_4(\rho) = \mu_{34}\sqrt{S_3S_4}$$
, (A5)

$$U_1^*(\ {\pmb \rho}\)U_4(\ {\pmb \rho}\)\ =\mu_{14}\ \sqrt{S_1\,S_4}$$
 , (A6)

$$U_1^*(\rho)U_3(\rho) = \mu_{13}\sqrt{S_1S_3}$$
, (A7)

$$U_2^*(\rho)U_4(\rho) = \mu_{24}\sqrt{S_2S_4}$$
. (A8)

于是 (A1) 武可写为

$$\begin{split} S(\boldsymbol{\rho}) &= S_1 + S_2 + S_3 + S_4 \\ &+ 2 \operatorname{Rel} \mu_{12} \left| U_1(\boldsymbol{\rho}) U_2(\boldsymbol{\rho}) \right| + \mu_{23} \left| U_2(\boldsymbol{\rho}) U_3(\boldsymbol{\rho}) \right| \\ &+ \mu_{34} \left| U_3(\boldsymbol{\rho}) U_4(\boldsymbol{\rho}) \right| + \mu_{41} \left| U_4(\boldsymbol{\rho}) U_1(\boldsymbol{\rho}) \right| \\ &+ \mu_{13} \left| U_1(\boldsymbol{\rho}) U_3(\boldsymbol{\rho}) \right| + \mu_{24} \left| U_2(\boldsymbol{\rho}) U_4(\boldsymbol{\rho}) \right| \] \\ &= S_1 + S_2 + S_3 + S_4 \\ &+ 2 \operatorname{Rel} \mu_{12} \sqrt{S_1 S_2} + \mu_{23} \sqrt{S_2 S_3} \\ &+ \mu_{34} \sqrt{S_3 S_4} + \mu_{14} \sqrt{S_1 S_4} \\ &+ \mu_{13} \sqrt{S_1 S_3} + \mu_{24} \sqrt{S_2 S_4} \]. \end{split}$$

$$\dot{\Sigma} \mathbb{E}[1] (5) \vec{r} J. \end{split}$$

[1] Ponomarenko S A 2001 J. Opt. Soc. Am. A 18 150

- [2] Gbur G, Visser T D 2003 Opt. Commun. 222 117
- [3] Gbur G, Visser T D, Wolf E 2004 J. Opt. A : Pure Appl. Opt. 6 S239
- [4] Fischer D G , Visser T D 2004 J. Opt. Soc. Am. A 21 2097
- [5] Palacios D M, Maleev I D, Marathay A S, Swartzlander Jr G A 2004 Phys. Rev. Lett. 92 143905
- [6] Liu P S , Lü B D 2007 Chin . Phys. 16 411
- [7] Liu P S, Lii B D 2007 Acta Phys. Sin. 56 2623 (in Chinese) [刘 普生、吕百达 2007 物理学报 56 2623]

- [8] Schouten H F, Gbur G, Visser T D, Wolf E 2003 Opt. Lett. 28 968
- [9] Ambrosini A , Gori F , Paoletti D 2005 Opt. Commun. 254 30
- [10] Basano L , Ottonello P 2005 Phys. Rev. Lett. 94 173901
- [11] Gbur G , Visser T D , Wolf E 2004 Opt . Commun . 239 15
- [12] Born M, Wolf E 1999 Principles of Optics seventh ed. (Cambridge : Cambridge University Press) p288
- [13] Mandel L , Wolf E 1995 Optical Coherence and Quantum Optics (Cambridge : Cambridge University Press) p173

Complete destructive interference of four partially coherent point sources *

Cheng Ke Lü Bai-Da[†]

(Institute of Laser Physics and Chemistry, Sichuan University, Chengdu 610064, China)
 (Received 19 September 2007; revised manuscript received 24 June 2008)

Abstract

By using the interference law for partially coherent light, the interference in a four-pinhole interferometer with square symmetry illuminated by partially coherent light is studied. It is found that the complete destructive interference in the four-pinhole interferometer may appear, and there may exist phase singularities of intensity and spectral degree of coherence. A comparison with the interference of two and three partially coherent point sources is made and the results can be physically interpreted in such a way, that in spite of the partial coherence of four point sources, the sum of the fields emerging from two point sources may be fully correlated with the sum of the fields emerging from the other two point sources.

Keywords : correlation singular optics , complete destructive interference , partially coherent light , edge dislocation PACC : 4225 , 4225K

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 10574097, 10874125).

[†] E-mail:baidalu0@tom.com