

二维颗粒气体在堆积过程中的能量耗散*

胡国琦^{1)†} 涂洪恩¹⁾ 厚美瑛¹⁾

1) 中国科学院物理研究所北京凝聚态物理国家实验室, 北京 100190)

2) 宁波工程学院理学院, 宁波 315016)

(2008 年 3 月 17 日收到, 2008 年 4 月 20 日收到修改稿)

通过高速摄像的方法观测了玻璃颗粒组成的准二维气态颗粒流的冷凝耗散过程, 并和理想情况下的均匀耗散的颗粒流体理论作了比较, 实验发现气态颗粒部分在耗散堆积过程中近似地满足高斯分布, 从动能的结果来看, 实际耗散过程和流体理论所预测的不同. 实验发现冷凝分为两个阶段: 当动能的贡献以气体颗粒为主时, 发现颗粒以恒定的速度堆积, 动能耗散主要由其中以气态分布的颗粒的沉积速率 α , 颗粒温度 T 和气态部分的平动速度 v_g 决定; 当气态颗粒数目趋向于 0, 能量耗散主要来自于密堆颗粒的表面层部分, 耗散速度和表面层的“黏性”有关, 堆积速率和能量耗散速度都会随着时间呈指数的衰减.

关键词: 离散体系, 耗散性

PACC: 4610, 6240

1. 引 言

颗粒体系的强耗散性是颗粒物质区别于其他流体体系的一项重要特性, 关于气态颗粒流体在各种条件下的能量耗散规律是科学家们关心的重要问题^[1-4]. 对于一个理想的均匀颗粒气体体系, 假设没有其他外力驱动, 体系的耗散规律可以用 Haff 理论^[5]来描述, 即颗粒体系温度 $T = T_0(1 + t/t_0)^{-2}$, 其中 $T = (\overline{v^2} - \overline{v}^2)$ 代表速度的涨落, T_0 是系统初始温度, 在二维的体系中 $t_0 = \sqrt{\pi}/\alpha(1 - r^2)d\rho T_0^{1/2}$, 其中 d 是颗粒直径, ρ 是颗粒数密度, 而 r 是颗粒的弹性恢复系数. Haff 理论是一种理想的情况, 一般条件下颗粒系统会在耗散的过程中在局部产生颗粒团簇, 这时颗粒体系就会达到一种非均匀状态, 实验发现这时颗粒系统耗散的速度会减慢, 在团簇存在的阶段, 其冷却规律为 $T \propto t^{-2/3}$ ^[6,7], 同时颗粒体系的速率分布也开始偏离高斯分布^[8,9].

通过玻尔兹曼方程, 颗粒流体的行为可以由质量、动量和能量守恒方程描述, 即

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0,$$
$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) = \nabla \cdot \mathbf{P} - \rho \mathbf{g},$$

$$\rho \left(\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) T \right) = -\nabla \cdot \mathbf{Q} + P \nabla \cdot \mathbf{v} - \Gamma,$$

其中 \mathbf{P} 是压力张量, \mathbf{Q} 是热流量, 而 $\Gamma \propto (1 - r^2)\rho^2 T^{3/2}$ 代表能量耗散项. 最近 Meerson 等^[10]假设颗粒体系可以保持均匀耗散, 从流体方程出发, 理论研究了重力场内固定数量颗粒在二维堆积中耗散的问题, 认为如果颗粒弹性系数 $r \rightarrow 1$, 即弹性很好的情况下, 系统趋于稳定时 $t \rightarrow t_c$. 基于质量、动量和能量守恒的流体方程可以转化为一个简单的 ω 方程 $\omega \partial_t \omega = \partial_m [(1 - m) \partial_m \omega] - \Lambda^2 (1 - m) \omega$, 其中 $\omega = T^{1/2}$, $m = \int_0^{y_0} \rho(y', t) dy'$ 代表高度 $y = 0$ 到 $y = y_0$ 内颗粒总质量, ρ 是密度, 而 $\Lambda^2 = \frac{\pi}{4}(1 - r^2)\epsilon^2$, 其中 ϵ 是系统内颗粒的总层数. 通过 ω 方程含 t 部分可以得到, 系统温度和动能的衰减规律为存在 $\mathcal{T}(t) \propto (t - t_c)^3 \propto E(t)$ ^[10], 其中 t_c 是系统完全冷却的时间, 这是一种基于颗粒系统均匀耗散的结果. 而事实上, 颗粒物质的弹性情况往往较差, 颗粒团簇在堆积底部会出现. 在这项工作中, 我们实验观测了弹性系数 $r = 0.92$ 的玻璃颗粒组成的准二维颗粒气体在一个封闭容器内堆积的全过程, 研究了期间系统能量耗散的情况, 并和理论结果 $E(t) \propto \mathcal{T}(t) \propto (t - t_c)^3$ 作了比较, 结果显示颗

* 国家自然科学基金(批准号: 10720101074)资助课题.

† E-mail: hu_guoqi@yahoo.com

颗粒体系的沉积速率也是需要考虑的一个重要因素。

2. 实验装置和实验方法

实验用颗粒是通过筛选的 1.10—1.25 mm 玻璃珠(尺寸差异主要来自颗粒圆度稍微的不规则),装置采用一个直立的两层玻璃板组成的容器,内部空间大小为高 20.00 cm,宽 6.50 cm 和内壁间隙 1.45 mm,这样可以限制颗粒在容器内 20.00 cm × 6.50 cm 的垂直空间内准二维运动.容器的上沿并不封闭,下底面封闭但打有一排 0.8 mm 的小孔.这样可以保证气流通过玻璃容器,同时又不妨碍没有气流时颗粒在底部堆积.颗粒的运动情况由一台帧率为 955 Hz 的高速摄像机拍摄记录.拍摄的结果可以通过计算机

图像处理算法取得每个颗粒的运动轨迹和速度.

为了激发颗粒体系,我们在实验前对容器通以恒定气压 5 MPa,可控流量的纯氮气,这样容器内的颗粒可以被吹起来,形成类似气态的颗粒体系.通过这样的制备,颗粒体系可以得到一个高斯型速度分布.加大气流量可以提高颗粒运动速度,颗粒体系初始温度和颗粒扬起的高度.然后,切断气流,气态颗粒就会受恒定重力作用逐渐堆积到容器底部,同时在这个过程中因为非弹性碰撞而快速耗散能量.在实验中我们实际采用了 18—24 L/min 的气体流量,气流在这个范围内可以保证颗粒被吹起,同时又不吹出容器之外.如图 1 显示的是经 22 L/min 的气流制备后,总颗粒数为 835 的体系耗散并且堆积的过程.

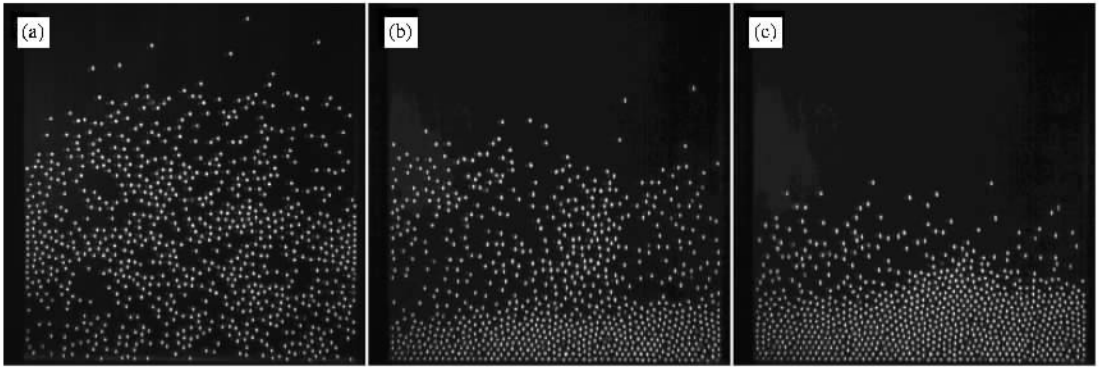


图 1 高速摄像得到的颗粒气体受恒定重力作用逐渐向下堆积能量耗散的过程 (a)气流作用下的初始状态 (b)堆积过程中 $t = 0.04$ s; (c)耗散的末期,耗散将开始转为黏性为主 $t = 0.07$ s

3. 实验结果和分析

实验采用 $N_0 = 835$ 颗玻璃珠,在气流量分别为 18, 20, 22 和 26 L/min 所制备的颗粒气体体系中,观测了颗粒体系在上述实验过程中能量耗散的情况.实验同时也验证了在同样的装置中,颗粒数目在 200 到 900 的范围内耗散的规律不变.我们通过实验观测体系中每个颗粒的高度和速度随时间的变化情况,计算了各个时间系统的总动能 $E_k(t) =$

$\sum_i^{835} \frac{1}{2} m_i v_i^2$, m_i 为单个颗粒的质量, v_i 为第 i 颗粒的

速度,和势能 $E_p(t) = \sum_i^{835} m_i g (h_i - h_0)$, h_i 为 i 颗粒的高度,我们选取了最后完全静止时刻的状态为势能的零点, h_0 即为静止时平均高度.实验中由于颗粒小的尺寸差异带来的颗粒质量的差异对速度分布

的影响,我们对不同颗粒大小和材料进行的实验显示速度分布和耗散规律有同样的分布,所以颗粒质量分布 $P(m_i)$ 和速度分布 $P(v_i)$ 是相对独立的,因而实际上可以简化 $E_k(t)/m = \sum_i^{835} \frac{1}{2} v_i^2$, $E_p(t)/m = \sum_i^{835} g (h_i - h_0)$, 其中 $m = \sum_i^{835} m_i$ 为系统颗粒总质量.如图 2 所示,是在 22 L/min 气流量所制备的 835 颗颗粒体系中,系统动能 E_k/m 和势能 E_p/m 随时间的变化情况, m 为 835 个颗粒的总质量,其中实线部分是结合后面的分析得到的理论拟合结果.

在整个过程中,颗粒体系主要分为三个区域,一个区域是沿重力方向加速的气态颗粒部分,一个是容器底部静止的颗粒密堆区,另外一部分是密堆颗粒表面的耗散区,这个区域是气态颗粒流体向密堆颗粒转变的过渡区,区域内的颗粒速度很小.因为在颗粒流中气态颗粒的速度远大于其他部分的颗粒,

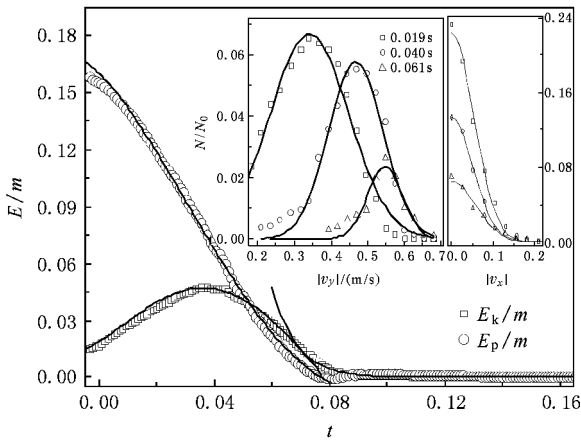


图2 系统动能 E_k/m 和势能 E_p/m 随时间的变化情况(其中实线是根据方程(1)得到的理论上的结果.发现在 $t < 0.074$ s 动能部分符合方程(1)的结果,在 $t > 0.074$ s 动能则随时间成指数衰减,势能部分则符合方程(2)的结果.插图是在 $t = 0.019$ s, 0.040 s 和 0.061 s 时,气态颗粒部分颗粒在 x, y 方向速率的统计分布)

所以是整个系统动能的主要贡献来源,气态颗粒的速度分布是决定理论上可以采用何种体系处理动能问题的关键.图2插图是 $t = 0.019$ s, 0.040 s 和 0.061 s 时,我们考察的气态颗粒部分的 x 和 y 方向速率分布及其相应的高斯分布拟合结果,两者近似符合,但颗粒数量随着时间而减少.从结果上看,气态颗粒受重力加速,且在底部和密堆部分碰撞而损失气态颗粒的数量,但是并没有完全破坏颗粒气体 y 方向的速率分布.气态颗粒通过碰撞仍然可以保持一个接近高斯型的分布,区别仅在于高速的颗粒数量稍少,而分布中左侧慢速的颗粒稍多,这是由于高速颗粒往往处在气体颗粒的底部作用区,会和堆积部分碰撞而造成数量上的损失;但是实际上这部分颗粒在分布的两侧,数量较少,对体系影响不大.另外,结果显示 x 方向的速度分布是高斯的.上述的结果说明当前基于玻尔兹曼分布的颗粒流体理论来处理重力驱动的气态颗粒流体的方法是一种可行的近似方法.

假设颗粒气体保持高斯型的分布 $P = e^{-(v_x - v_g)^2/T} / \sqrt{\pi T}$, 那么系统动能 E_k 可以表示为

$$E_k/m = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} P v^2 dv + \alpha(v)$$

$$= \frac{1}{2} n_g \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(v_x - v_g)^2/T} v^2 / \sqrt{\pi T} dv + \alpha(v)$$

$$= \frac{1}{2} n_g ((T_x + T_y)/2 + v_g^2) + \alpha(v)$$

$$\approx \frac{1}{2} n_g (T/2 + v_g^2), \quad (1)$$

其中 n_g 是保持气态颗粒的数目与总数之比, T 是代表速度涨落的系统温度, v_g 代表由于垂直方向气态颗粒的平动速度, $\alpha(v)$ 代表存在于过渡区颗粒的动能部分,仅仅是在气态颗粒较多时是相对小项, m 为颗粒总质量.而势能 E_p 的变化为

$$E_p/m = \int (1 - n_d) v_g g dt, \quad (2)$$

其中 n_d 是已密堆颗粒数占总颗粒数的比例, g 是重力加速度.

实验可以测到 n_g, n_d, T 和 v_g , 如图3所示是835颗粒的系统在准备气流分别为18, 20, 22和26 L/min 状态下得到的结果.比较图3(a)和(b)可以发现,对于22 L/min的情况,在 $t = 0.074$ s前,气体颗粒的比例 n_g 和密堆颗粒的比例 n_d 都随时间呈线性

变化,两者有相同的转换速率,即 $\frac{\partial n_g}{\partial t} \approx -\frac{\partial n_d}{\partial t} = \alpha$, 其中 α 为颗粒堆积速率,是一个定值;气态颗粒所占比例随时间可以写作 $n_g = 1 - n_{\text{surf}} - n_d = 1 - n_{\text{surf}} - \alpha t$, 其中 n_{surf} 代表了密堆颗粒表面的过渡区域的颗粒数目,实验中约有3—4层颗粒,占颗粒总数的10%.当 $t > 0.074$ s, $n_g \rightarrow 0$ 时, n_{surf} 部分则开始转变为密堆颗粒 n_d , 实验发现这时堆积速度随时间减慢, $1 - n_d \propto e^{-\beta t}$ 呈指数关系,如图3(b)小图所示.图3(d)显示的则是气态颗粒的整体平动速度 v_g , 当时间 t 变大时,比重力加速的线性结果略小,拟合显示 $v_g = v_0 + gt - \beta t^2$, 其中 βt^2 是修正项,主要因为随着时间演化,速度大的颗粒都在底部,就会首先和堆积部分发生碰撞,所以减小了颗粒的平动速度, v_0 是 $t = 0$ 时刻的平动速度,气流大的时候,容易把颗粒吹得更高,这一项会相对大些.图3(c)是温度的结果,发现除了流动初期有个调整,存在 $T(t) - T_e \propto (t - t_e)^2$, t_e 是气态颗粒部分趋向于0的时刻.这个结果接近颗粒流体理论^[10]的 $T(t) \propto (t - t_e)^2$, 但由于整个系统的耗散过程在 $t = t_e$ 并没有结束,所以仍存在一个较小的温度 T_e .图2的黑色实线部分是采用方程(1)(2)并结合上述结果对22 L/min情况的实际能量曲线做的比较,这里采用了 $\alpha = 11.40$, $n_{\text{surf}} = 0.12$, $v_0 = 0.156$, $\beta = 60.50$, $T = 0.0046 + 6.0(t - 0.074)^2$, 可以发现在 $t < 0.074$ s 时,可以很好地符

合. 这个结果说明均匀耗散的颗粒流体理论对动能的讨论 $E(t) \propto (t - t_c)^2$ 是不成立的, 因为流体理论建立在系统所有的颗粒满足玻尔兹曼分布的基础上

的, 而在这个体系中发现满足条件的气态颗粒会随着沉积而减少, 所以对于动能需要考虑颗粒堆积速率 α .

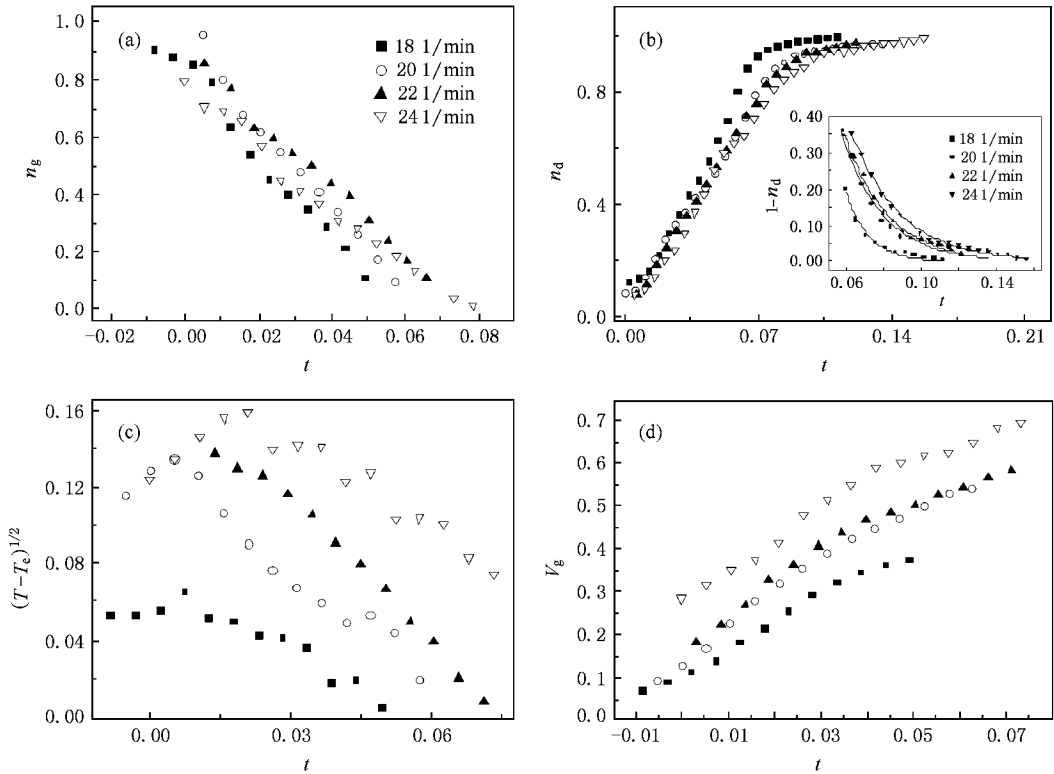


图 3 在准备气流强度分别为 18, 20, 22 和 26 L/min 状态下, 气态颗粒占总数的比例 n_g , 密堆颗粒比例 n_d , 温度 \sqrt{T} 和气态颗粒 y 方向的平动速度 v_g 随时间的变化情况 (b) 的插图是耗散末期 $t > 0.06$ s, 密堆颗粒数 n_d 和指数规律的关系)

另外从图 2 可以发现, 当 $t > 0.074$ s, 方程(1)的结果和实际动能曲线就会出现偏离, 原因是气态颗粒数量此时已经很少, 但是耗散过程并没有结束, 表面过渡层颗粒的动能仍需要耗散. 从动能曲线 E_k/m 来看, 系统动能随时间呈指数减少, 拟合结果如图 2 灰线部分所示. 根据对单个物体在颗粒床中运动的研究结果^[11-13], 在二维颗粒体系中, 静压力部分相对较小, 运动颗粒受到的阻力主要表现为和速度正比的类黏滞项, 即 $f \approx \gamma v$, 其中 γ 为类比于液体的黏性系数, 因此单个颗粒的动能变化规律为 $e^i \propto e_0^i \exp(-2\gamma t)$, 而总动能为 $E = \sum_i n_{\text{surf}}^i P e_0^i \exp(-2\gamma t)$. 作为检验, 我们在图 4 比较了表面耗散区域颗粒的速度分布随时间变化的情况. 从图中可以看出状态转变前后, 分布有很大的变化, 但是当 $t > 0.08$ s, 分布 $p \propto \exp(-bv)$, 指数 b 随时间变化并不大. 所以可以简略认为 $\sum_i P e_0^i \approx C$, 这一项和时间

t 的关系没有 n_{surf} 和 e^i 强, 因此可以得到和实际相近的指数衰减结果: $E \approx (\sum_i P e_0^i) n_{\text{surf}} \exp(-2\gamma t) \propto C \exp(-At) \exp(-2\gamma t)$.

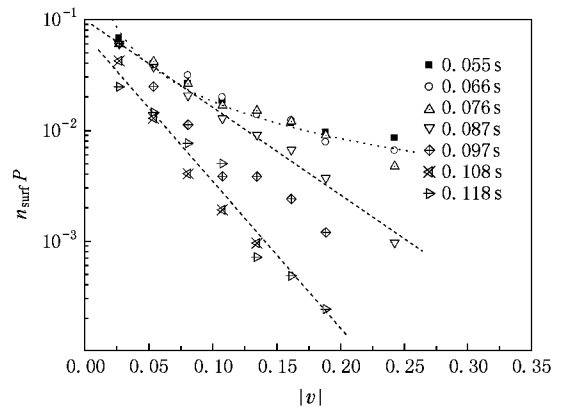


图 4 堆积部分上方耗散区内颗粒的速率分布 $n_{\text{surf}} P$ 随时间 0.055 s 到 0.118 s 的变化情况

4. 结 论

在这项工作中,我们通过高速摄像的方法实验观测了二维颗粒系统在堆积过程中由于颗粒之间非弹性碰撞和摩擦造成的能量耗散行为.实验发现耗散过程在临界时间 t_c 存在一个转变.发现当 $t < t_c$, 气态颗粒部分是系统动能和势能主要来源.在这里我们和均匀耗散颗粒流体理论结果作了比较,发现:在实际情况下,颗粒气体部分仍可以保持近似的高斯型分布,这说明对于气态颗粒流的行为可以采用流体方程来近似地描述.但是实验发现,由于现实体系中耗散速度要快于系统速度,一部分颗粒会因为堆积而从气态颗粒中分离出来,这使得满足方程的体系在不断减小,从均匀耗散和近弹性近似得到流体方程很难描述强耗散颗粒流体体系.实验结果显

示动能随时间的变化为 $E_k/m = \frac{1}{2} n_g (T/2 + v_g^2)$, 主要由气态颗粒数目 n_g , 颗粒温度 T 以及气体颗粒平均速度 v_g 决定,其中 n_g 和 v_g 近线性变化,而颗粒温度 $T(t) - T_c \propto (t - t_c)^2$, 仅这部分和颗粒流体理论相近,由于需要考虑系统堆积导致的体系变化,系统动能和流体理论的预测并不相符.另外当颗粒堆积末期 $t > t_c$, 气态颗粒数目趋向于 0, 我们发现系统的耗散行为又会进行一次转变,这时能量耗散主要处在密堆颗粒的表面过渡层,过渡层颗粒的速度分布会趋向指数分布,堆积速率和系统动能都会随着时间呈指数的衰减,造成动能指数衰减规律主要和二维颗粒体系的阻力形式有关.颗粒流体在不同条件下流动会发生稀疏态、密集态和堵塞态之间的转变^[14, 15], 研究颗粒流堆积过程中的动能耗散规律将有助于对颗粒流相变问题的了解.

- [1] Jaeger H M, Nagel S R, Behringer R P 1996 *Rev. Mod. Phys.* **68** 1259
- [2] Kadanoff L P 1999 *Rev. Mod. Phys.* **71** 435
de Gennes P G 1999 *Rev. Mod. Phys.* **71** S374
- [3] Aranson I S, Tsimring L S 2006 *Rev. Mod. Phys.* **78** 641
- [4] Hou M, Tu H, Liu R *et al* 2008 *Phys. Rev. Lett.* **100** 068001
- [5] Haff P K 1983 *J. Fluid Mech.* **134** 401
- [6] McNamara S, Young W R 1994 *Phys. Rev. E* **50** R28
- [7] Ben-Naim E, Chen S Y, Doolen G D, Redner S 1999 *Phys. Rev. Lett.* **83** 4069
- [8] Ichiki K, Hayakawa H 1995 *Phys. Rev. E* **52** 658
- [9] van Zon J S, MacKintosh F C 2004 *Phys. Rev. Lett.* **93** 038001
- [10] Volfson D, Meerson B, Tsimring L S 2006 *Phys. Rev. E* **73** 061305
- [11] Hou M, Peng Z, Liu R, Lu K, Chan C K 2005 *Phys. Rev. E* **72** 062301
- [12] Zhang Q, Wu Y, Peng Z *et al* 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 6203 (in Chinese) [张权义、吴耀宇、彭 政等 2006 物理学报 **55** 6203]
- [13] Zhang Q, Peng Z, He R *et al* 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 4708 (in Chinese) [张权义、彭 政、何 润等 2007 物理学报 **56** 4708]
- [14] Hou M, Chen W, Zhang T, Lu K, Chan C K 2003 *Phys. Rev. Lett.* **91** 204301
- [15] Zhong J, Peng Z, Wu Y *et al* 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 6691 (in Chinese) [钟 杰、彭 政、吴耀宇等 2006 物理学报 **55** 6691]

Energy dissipation during cooling process in granular gas under gravity^{*}

Hu Guo-Qi^{1,2,†} Tu Hong-En¹ Hou Mei-Ying¹

¹ *Beijing National Laboratory for Condensed Matter Physics, Institute of Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China*

² *College of Science, Ningbo University of Technology, Ningbo 315016, China*

(Received 17 March 2008 ; revised manuscript received 20 April 2008)

Abstract

Granular gas is a far from equilibrium discrete system. Due to intrinsic energy dissipation, the system will cool down when there is no energy input. In this paper we report our experimental study on this cooling process in a quasi 2-D granular gas system under gravity. By using fast video photography, particles excited by air flow from the bottom of the container were traced during cooling. The cooling process contains two regimes: One of them is when inelastic collisions of particles in the gas phase is dominant. In this regime condensation at the bottom will occur at a rate determined by three factors, namely the constant piling rate α , granular temperature T and vertical mass velocity v_g . The second regime is near the end of the cooling, the energy dissipation is mainly contributed from the surface area of the condensation region. This time the piling rate and the dissipation rate both show exponential dependence.

Keywords : discrete system, dissipation properties

PACC : 4610, 6240

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10720101074).

[†] Email : hu_guoqi@yahoo.com