第 58 卷 第 10 期 2009 年 10 月
1000-3290/2009/58(10)/6682-04

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.58,No.10,October,2009

简易广义合作网络度分布的稳定性*

赵清贵[1)2)] 孔祥星[1)] 侯振挺[1)†]

1)(中南大学数学科学与计算技术学院,长沙 410075)

2)(重庆文理学院数学与统计学院,重庆 402160)

(2008 年 8 月 14 日收到;2008 年 12 月 11 日收到修改稿)

本文对简易广义合作网络的三类特殊情形(择优连接、随机连接、混合连接)进行了研究. 基于马氏链理论,给出它们度分布稳定性存在的严格证明,并且得到相应网络度分布和度指数的精确表达式. 特别地,对于混合连接情况,说明在连线方式中只要存在择优成分,网络度分布就服从幂律分布,即所得网络为无标度网络.

关键词:简易广义合作网络,无标度网络,马氏链,度分布

PACC:0175,0250

1. 引 言

从 Watts 与 Strogatz[1] 研究小世界网络和 Barabási 与 Albert[2] 研究无标度网络开始,复杂网络的结构和性质便成为科学家广泛研究的热门领域. 在自然界中,小到细胞分子大至社会各类系统都可以通过复杂网络加以描述,其中结点表示个体或组织,连线表示它们之间的联系. 网络中每个顶点连接其他顶点的边的数目称为它的顶点度,用 k 表示. 顶点度为 k 的顶点出现的概率或称为顶点度分布 $P(k)$,在相当的程度上说明网络的拓扑性质和演化机理的特征.

作为复杂网络很重要的一类:社会合作网络(由合作项目和合作者组成,合作者由于共同参与了同一个项目发生合作关系而形成的网络)已经引起了众多领域的学者们的极大兴趣. 以前受到网络规模小和数据采集困难的限制,而未能对此问题进行准确而深入的研究. 现在,计算机处理大型数据的能力越来越强,使得人们可以对大规模社会合作网络进行更为深入细致的研究. Ramasco 等[3] 研究了社会合作网络并提出 RDP 模型:每时间步组建一个包含 T 个参与者的项目,T 可能是常数也可能为服从概率分布为 $P(T)$ 的随机数,其中 m 个是新参与者,其余 $T-m$ 个从旧顶点中按照正比例于它的顶点项目度 h 的概率优选. 当 T 和 m 均为常数时,解析证明了在参与者的单粒子投影图中,度分布 $P(k)$ 和顶点项目度分布 $P(h)$ 均为严格的幂律分布. 何大韧等[4,5] 建议把社会合作网络概念推广,若仅考虑参与者在所参与项目中的合作关系,则每个项目可用一个完全图描绘,那么称由完全图的集合组成的网络系统为广义合作网络. 设初始 $t=0$ 时,网络有 m_0 个顶点,已经连接成若干个完全图项目,它们的顶点项目度 h_{i0} 之和为 h_0. 每时间步增加一个新顶点,在旧顶点中按照一定法则选取 $T-1$ 个(T 为常数),把这 T 个顶点中两两之间尚未连接的也都连接一条边,构成一个完全图,称这样的网络为简易广义合作网络.

无论是实际的网络,还是拟合实际网络的模型,大都遵循某些规则增加或减少结点和连线. 而且特别重要的是:在每个时间步,这些规则只作用于当前网络,因此具有马氏性. 史定华等[6] 建立了 BA 模型与马氏链之间的联系. 根据网络演化规则,第 i 时间步加入的结点 i 在 t 时刻度数 $k_i(t)$ 是一个非齐次马氏链,考虑所有结点就形成一族马氏链. 然后根据马氏链理论,给出了一个计算网络度分布的方法.

本文对于简易广义合作网络模型的随机连接、择优连接和混合连接(部分优选、部分随机)情况,用马氏链方法严格推导出项目度分布和度指数的精

* 国家自然科学基金(批准号:10671212)和重庆文理学院科研基金资助的课题.

† 通讯联系人. E-mail:zhthou@sina.com

确表达式，并且说明顶点项目度分布和度分布之间存在密切关系.此外，对一般情况的(项目)度分布公式，证明只要存在择优连接情况，度分布就服从幂律分布，从而网络是无标度网络.

2. 模　型

2.1. 择优连接情况

设上述选取 $T-1$ 个旧顶点的法则是选取每个旧顶点 i 的概率正比于它的顶点项目度 h_i. 令 $h_i(t)$ 表示 i 时刻加入的结点在 t 时刻的项目度

$$P(h,i,t)\triangleq P\{h_i(t)=h\},$$

$$P(h,t)\triangleq \frac{1}{t}\sum_{i=1}^{t}P(h,i,t),$$

从而马氏链 $h_i(t)$ 转移概率可表示如下：

$$P(h_i(t+1)=l\mid h_i(t)=h)$$

$$=\begin{cases}1-(T-1)\dfrac{h}{h_0+Tt} & (l=h),\\ (T-1)\dfrac{h}{h_0+Tt} & (l=h+1),\\ 0 & (\text{其他}).\end{cases}\tag{1}$$

节点一加入网络，它的项目度数就是 1 且项目度总是增加的，且每步至多增加 1，因此网络中结点项目度最小为 1 度. 要使结点的度数为 1，其项目度就不能再增加，即结点一加入网络在其后的每步都不参加任何项目，从而可得到如下引理：

引理 1　极限 $\lim\limits_{t\to\infty}P(1,t)$ 存在且与初始网络无关，极限记为 $P(1)$，且有

$$P(1)=\frac{T}{2T-1}>0.\tag{2}$$

证明　由非齐次马氏链 $h_i(t)$ 的转移可得如下关系式：

$$P(1,i,t+1)=P(1,i,t)\left[1-(T-1)\frac{1}{h_0+Tt}\right],$$

由 $P(1,t)$ 的定义和 $P(1,i,i)=1$ 可得

$$P(1,t+1)=\frac{t}{t+1}P(1,t)\left[1-(T-1)\frac{1}{h_0+Tt}\right]+\frac{1}{t+1},$$

求解上述差分方程可得如下递推解：

$$P(1,t)=\prod_{i=1}^{t-1}\frac{i}{i+1}\left[1-(T-1)\frac{1}{h_0+Ti}\right]\times\left\{P(1,1)+\sum_{l=1}^{t-1}\frac{\frac{1}{l+1}}{\prod\limits_{j=1}^{l}\frac{j}{j+1}\left[1-(T-1)\frac{1}{h_0+Tj}\right]}\right\}$$

$$=\frac{1}{t}\prod_{i=1}^{t-1}\left[1-(T-1)\frac{1}{h_0+Ti}\right]\times\left\{P(1,1)+\sum_{l=1}^{t-1}\frac{1}{\prod\limits_{j=1}^{l}\left[1-(T-1)\frac{1}{h_0+Tj}\right]}\right\}.$$

令

$$x_t=P(1,1)+\sum_{l=1}^{t-1}\frac{1}{\prod\limits_{j=1}^{l}\left[1-(T-1)\frac{1}{h_0+Tj}\right]},$$

$$y_t=t\prod_{i=1}^{t-1}\left[1-(T-1)\frac{1}{h_0+Ti}\right]^{-1}>t\to\infty,$$

则有

$$x_{t+1}-x_t=\prod_{j=1}^{t}\left[1-(T-1)\frac{1}{h_0+Tj}\right]^{-1},$$

$$y_{t+1}-y_t=\left[1+(T-1)\frac{t}{h_0+Tt}\right]\times\prod_{j=1}^{t}\left[1-(T-1)\frac{1}{h_0+Tj}\right]^{-1}$$

$$\frac{x_{t+1}-x_t}{y_{t+1}-y_t}=\frac{1}{1+(T-1)\frac{t}{h_0+Tt}}\to\frac{T}{2T-1},$$

由 $P(1,t)=\dfrac{x_t}{y_t}$ 和 Stolz 定理[7]，得到

$$P(1)=\lim_{t\to\infty}P(1,t)=\lim_{t\to\infty}\frac{x_t}{y_t}=\lim_{t\to\infty}\frac{x_{t+1}-x_t}{y_{t+1}-y_t}=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{1+(T-1)\frac{t}{h_0+Tt}}=\frac{T}{2T-1}.$$

从而定理得证.

对于项目度数为 h 的结点，可能由那些度数为 h 的结点不参加项目，或那些度数为 $h-1$ 的结点参加一个新的项目而得到. 从而可得如下引理：

引理 2　当 $h>1$，极限 $\lim\limits_{t\to\infty}P(h-1,t)$ 存在，则 $\lim\limits_{t\to\infty}P(h,t)$ 存在，极限记为 $P(h)$，且有

$$P(h)=\frac{h-1}{h+\frac{T}{T-1}}P(h-1)>0\quad(h>1).\tag{3}$$

证明　证明过程同引理 1.

定理 1　当 $h\geqslant 1$ 时网络稳态度分布为

$$P(h)=\frac{\Gamma(h)}{\Gamma\left(h+\frac{2T-1}{T-1}\right)}\frac{\Gamma\left(1+\frac{2T-1}{T-1}\right)}{\Gamma(1)}\frac{T}{2T-1}$$

$$\sim h^{-\left(2+\frac{1}{T-1}\right)}, \tag{4}$$

证明 根据引理1和引理2,由数学归纳法得网络稳态度分布存在.然后递推求解(3)式,可得(4)式,且度指数为 $\gamma = 2 + \frac{1}{T-1}$.

上述结果表明简易广义合作网络按照择优连接,顶点项目度分布为幂律分布,标度因子为 $\gamma = 2 + \frac{1}{T-1}$,它随项目含顶点数 T 的变化在区间 $(2, 2.5]$ 中变化,从而此时自组织得到的网络是无标度网络.由此可得重复边的顶点度分布为 $P(k) \sim k^{-\nu}$,且 $\nu = 2 + \frac{1}{T-1}$,即顶点项目度分布 $P(h)$ 和度分布 $P(k)$ 都为严格幂律分布,且度指数相同,与张培培等[5]所得解析和模拟结果一致.

2.2. 随机连接情况

设上述选取 $T-1$ 个旧顶点的法则是在所有旧顶点中等概率随机选择 $T-1$ 个.从而马氏链 $\{h_i(t)\}$ 的转移概率可表示如下:

$$P(h_i(t+1) = l \mid h_i(t) = h) = \begin{cases} 1 - (T-1)\dfrac{1}{m_0 + t} & l = h, \\ (T-1)\dfrac{1}{m_0+t} & l = h+1, \\ 0 & \text{其他}. \end{cases} \tag{5}$$

定理2 当 $h \geqslant 1$ 时,网络稳态度分布存在且

$$P(1) = \frac{1}{T}, P(h) = \frac{T-1}{T} P(h-1) (h > 1). \tag{6}$$

由上式可递推得

$$P(h) = \frac{1}{T-1}\left(\frac{T}{T-1}\right)^{-h}. \tag{7}$$

由定理2知,当选取 $T-1$ 个旧顶点的法则是在所有旧顶点等概率随机选择 $T-1$ 个时,所得网络项目度分布不是幂律分布,即所得网络不是无标度网络.由于在选择顶点时并非择优选择,从而破坏了网络的无标度性,与 Barabási 等所说的择优连线是产生无标度网络的原因一致.

2.3. 混合连接情况

如果上述选取 $T-1$ 个旧顶点的法则是以一定的概率 p 随机连接,以概率 $1-p$ 择优连接,从而转移概率为

$$P(h_i(t+1) = l \mid h_i(t) = h) = \begin{cases} 1 - \left[p\dfrac{T-1}{m_0+t} + (1-p)\dfrac{h(T-1)}{h_0 + Tt}\right] & (l = h), \\ p\dfrac{T-1}{m_0+t} + (1-p)\dfrac{h(T-1)}{h_0+Tt} & (l = h+1), \\ 0 & (\text{其他}). \end{cases}$$

定理3 当 $h \geqslant 1$ 时,网络稳态度分布存在且

$$P(1) = \frac{1}{1 + p(T-1) + \dfrac{(1-p)(T-1)}{T}}, \tag{8}$$

$$P(h) = \frac{h - 1 + \dfrac{Tp}{1-p}}{h + \dfrac{Tp}{1-p} + \dfrac{T}{(1-p)(T-1)}} P(h-1). \tag{9}$$

$p = 0$ 时,(8),(9)式变为(2),(3)式,即为择优连接情况.$p = 1$ 时,(8),(9)式变为(6)式,即为随机连接情况.

当 $0 < p < 1$ 时,(9)式可递推如下:

$$\begin{aligned} P(h) &= \frac{h - 1 + \dfrac{Tp}{1-p}}{h + \dfrac{Tp}{1-p} + \dfrac{T}{(1-p)(T-1)}} P(h-1) \\ &= \frac{\Gamma\left(h + \dfrac{pT}{1-p}\right)}{\Gamma\left(h + 1 + \dfrac{pT}{1-p} + \dfrac{T}{(1-p)(T-1)}\right)} \\ &\quad \times \frac{\Gamma\left(2 + \dfrac{pT}{1-p} + \dfrac{T}{(1-p)(T-1)}\right)}{\Gamma\left(1 + \dfrac{pT}{1-p}\right)} \\ &\quad \times \frac{1}{1 + p(T-1) + \dfrac{(1-p)(T-1)}{T}} \\ &\sim h^{-\left(1 + \frac{T}{(1-p)(T-1)}\right)}. \end{aligned}$$

对于混合连接的情况,由定理3可知网络的项目度分布严格服从幂律分布,从而所得网络为无标度网络.度指数 $\gamma = 1 + \frac{T}{(1-p)(T-1)}$,它是随常数项目含顶点数 T 和随机连接所占份额 p 的变化而变化.由此可得重复边的顶点度分布为 $P(k) \sim k^{-\nu}$ 且 $\nu = 1 + \frac{T}{(1-p)(T-1)}$,即顶点项目度分布 $P(h)$ 和度分布 $P(k)$ 都为严格幂律分布,且度指数相同.由 γ 的表达式可知,$p = 0$ 满足其表达式,是它的一个特殊情况.

3. 结 论

从上面的分析可以看出,对于简易广义合作网络,只要 $1-p>0$,即在选择旧结点时的连接概率含有择优部分时,所得的项目度分布即为幂律分布. 因此对于简易广义合作网络在选择节点时,只要选择概率含有择优成分所得网络即为无标度网络.

[1] Wattz D J, Strogatz S H 1998 *Nature* **393** 440

[2] Barabási A L, Albert R 1999 *Science* **286** 509

[3] Ramasco J J, Dorogavtsev S N, Pastor-Satorras R 2004 *Phys. Rev.* E **73** 036106

[4] Chang H, He D R 2006 *Complex Networks* (Shanghai:Shanghai Scientific & Technological Education Publishing House) p166 (in Chinese)[常 慧、何大韧 2006 复杂网络(上海:上海科技教育出版社) 第 166 页]

[5] Zhang P P, He Y, Zhou T, Su P P, Chang H, Zhou Y P, Wang B H, He D R 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 60 (in Chinese)[张培培、何岳、周 涛、苏蓓蓓、常 慧、周月平、汪秉洪、何大韧 2006 物理学报 **55** 60]

[6] Shi D H, Chen Q H, Liu L M 2005 *Phys. Rev.* E **71** 036140

[7] Ouyang G Z, Yao Y L, Zhou Y 2002 Mathematical Analysis (Shanghai:Fudan Press) p31 (in Chinese)[欧阳光中、姚允龙、周 渊 2002 数学分析(上海:复旦大学出版社)第 31 页]

The degree distribution of simple generalized collaboration networks*

Zhao Qing-Gui[1)2)] Kong Xiang-Xing[1)] Hou Zhen-Ting[1)†]

1)(*School of Mathematical Science and Computing Technology, Central South University, Changsha 410075, China*)

2)(*Department of Mathematics and Computer Science, Chongqing University of Arts and Sciences, Chongqing 402160, China*)

(Received 14 August 2008; revised manuscript received 11 December 2008)

Abstract

We study three special cases of simple generalized collaboration networks, namely the preferential attachment, random attachment and mixed attachment networks. Based on Markov chain theory, we provide a rigorous proof for the existence of the steady-state degree distribution of the network generated by this model and obtain its corresponding exact formula. In particular, for mixed attachment, if it has preferential attachment, degree distribution of the network obeys power-law distribution, and it is a scale-free network.

Keywords: simple generalized collaboration networks, scale-free network, Markov chain, degree distribution

PACC: 0175, 0250

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10671212) and the Research Fund of Chongqing University of Arts and Sciences, China.

† Corresponding author. E-mail: zhthou@sina.com