

一个全球气候非线性振荡模型的近似解*

莫嘉琪^{1)†} 林一骅²⁾ 林万涛²⁾

1) 安徽师范大学数学系, 芜湖 241000)

2) 中国科学院大气物理研究所大气科学和地球流体力学数值模拟国家重点实验室, 北京 100029)

(2008 年 11 月 27 日收到, 2008 年 12 月 19 日收到修改稿)

研究了一个全球气候的非线性模型. 利用摄动理论和方法, 构造了相关问题解的渐近展开式, 该问题解的渐近展开式具有较高的近似度. 摄动渐近方法是一个解析方法, 得到的解还能够继续进行解析运算.

关键词: 非线性, 摄动, 全球气候

PACC: 0230

1. 引 言

全球气候厄尔尼诺/拉尼娜海-气振子(ENSO)是发生在热带大气和海洋的一个气候异常现象. 它导致全球各区域环境异常变化. 由于它的负面影响, 给人类生活带来了巨大的灾难. 因此近来国际学术界非常重视研究它的规律. 许多学者利用不同的方法广泛地研究了 ENSO 的非线性理论的局部和整体的各种性态^[1-11]. 非线性理论和方法是目前许多学者关注的一个研究课题^[12]. 如 Ni 等^[13], Bartier^[14], Libre 等^[15], Duehring 等^[16]以及 Guarguaglini 等^[17]都作了大量的工作. 作者等^[18-32]也用微分不等式等理论, 研究了一类大气物理问题. 本文是用数学理论说明一个 ENSO 对应系统的不稳定性态, 然后利用摄动理论和方法得到非线性模型解的任意次近似的渐近展开式, 并证明其一致有效性.

2. 一个全球气候振子模型

现考虑如下一个 ENSO 模型^[4]

$$\frac{dT}{dt} = a_1 T - a_2 \mu h + \sqrt{2/3} K(T - \mu h) + f(T, h), \quad (1)$$

$$\frac{dh}{dt} = k(2h - T) + g(T, h), \quad (2)$$

这里 T 为海表温度(SST); h 为温跃层深度; $a_1 = \Delta \bar{T}'_z + \Delta \bar{T}'_x - \alpha'_s$, $a_2 = \Delta \bar{T}'_x \Delta \bar{T}'_z$, $\Delta \bar{T}'_x$ 为无量纲参数; α'_s 为 SST 的 Newton 冷却系数; b 为联系到气-海函数的一个无量纲系数; f, g 为与海表温度和温跃层相关的一个扰动项, 设它满足 $\lim_{\|y\| \rightarrow 0} \frac{\|f(T, h)\|}{\|y\|} = 0$, $\|y\| = (T^2 + h^2)^{1/2}$; μ 为度量温跃层深度的一个正数, 这里假设它是一个正的小参数. 我们将利用摄动方法来得到系统(1), (2)的渐近解.

在测试中, $a_1 < 0, b > 0$. 不难看出, 这时模型(1), (2)式对应的线性系统在相平面上的零点为不稳定的鞍点. 由于系统(1), (2)的非线性项为 $\sqrt{2/3} K(T - \mu h) + f(T, h), g(T, h)$, 系统解在其相平面上的奇点也为不稳定的鞍点, 所以整个系统关于其奇点是不稳定的.

3. 模型的渐近解

设

$$T \sim \sum_{i=0}^{\infty} T_i \mu^i, h \sim \sum_{i=0}^{\infty} h_i \mu^i, \quad (3)$$

将(3)式代入(1), (2)式, 令 $\mu = 0$, 有

$$\frac{dT_0}{dt} = a_1 T_0 + \sqrt{2/3} T_0^2 + f(T_0, h_0), \quad (4)$$

* 国家自然科学基金(批准号: 40676016, 40876010) 中国科学院知识创新工程重要方向性项目(批准号: KZCX2-YW-Q03-08) LASG 国家重点实验室专项经费和上海市教育委员会 E-研究院建设计划(批准号: E03004)资助的课题.

† E-mail: mojiqj@mail.ahnu.edu.cn

$$\frac{dh_0}{dt} = h(2h_0 - T_0) + g(T_0, h_0). \quad (5)$$

同样非线性系统(4),(5)的解也是不稳定的. 设系统(4),(5)的奇点为 $(T_0(t), h_0(t))$, 解在平面上的轨线当 $t \rightarrow +\infty$ 时将远离奇点. 为了求得原问题(1),(2)式的高阶近似展开式, 将(3)式代入(1),(2)式, 把对应的非线性项按 μ 的幂展开为幂级数, 合并 μ 的同次幂项, 并令其系数分别为零. 对于 $i = 1, 2, \dots$, 有

$$\frac{dT_i}{dt} = (a_1 + \sqrt{8/3}T_0 + f_T(T_0, h_0))T_i + f_h(T_0, h_0)h_i + F_i \quad (i = 1, 2, \dots), \quad (6)$$

$$\frac{dh_i}{dt} = (-b + g_T(T_0, h_0))T_i + (2b + g_h(T_0, h_0))h_i + G_i \quad (i = 1, 2, \dots), \quad (7)$$

这里

$$F_i = \frac{1}{i!} \left[\frac{\partial^i}{\partial \mu^i} \left[f \left(\sum_{i=0}^{\infty} T_i \mu^i, \sum_{i=0}^{\infty} h_i \mu^i \right) + \sqrt{2/3} \sum_{i=0}^{\infty} T_i \mu^i \left(\sum_{i=0}^{\infty} T_i \mu^i - \mu \sum_{i=0}^{\infty} h_i \mu^i \right) \right] \right]_{\mu=0} \quad (i = 1, 2, \dots),$$

$$G_i = \frac{1}{i!} \left[\frac{\partial^i}{\partial \mu^i} \left[g \left(\sum_{i=0}^{\infty} T_i \mu^i, \sum_{i=0}^{\infty} h_i \mu^i \right) \right] \right]_{\mu=0} \quad (i = 1, 2, \dots),$$

且 F_i, G_i 依次地为关于 $T_j, G_j (j \leq i - 1)$ 的已知的函数. 由线性问题(6),(7)式, 我们能分别得到 $(T_i, h_i) (i = 1, 2, \dots)$. 再由(3)式, 可得到原问题(1),(2)解的形式渐近展开式.

4. 一致有效性

现在来证明得到的渐近展开式的一致有效性. 设

$$\bar{T}_m = \sum_{i=0}^m T_i \mu^i, \bar{h}_m = \sum_{i=0}^m h_i \mu^i, \quad (8)$$

并设 $R_T = T - \bar{T}_m, R_h = h - \bar{h}_m$. 由(1),(2)式, 利用中值定理, 在有限的时间区间 $[0, t_0]$ 的范围内, 我们有

$$\begin{aligned} \frac{dR_T}{dt} - a_1 R_T + a_2 \mu R_h &= -\frac{d\bar{T}_m}{dt} + a_1 \bar{T}_m - a_2 \mu \bar{h}_m, \\ \sqrt{2/3} \mathcal{X}(\bar{T}_m + R_T) \mathcal{Y}(\bar{T}_m + R_T - \mu \bar{h}_m - \mu R_h) \\ &- \bar{T}_m(\bar{T}_m - \mu \bar{h}_m) + \mathcal{J}(\bar{T}_m + R_m, \bar{h}_m + R_m) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &- \mathcal{J}(\bar{T}_m, \bar{h}_m) \\ &= \left[-\frac{dT_0}{dt} + a_1 T_0 + \sqrt{2/3} T_0^2 + \mathcal{J}(T_0, h_0) \right] \\ &+ \sum_{i=1}^m \left[-\frac{dT_i}{dt} + (a_1 + \sqrt{8/3} T_0 + f_T(T_0, h_0)) T_i \right. \\ &+ f_h(T_0, h_0) h_i + F_i \left. \right] \mu^i + [\mathcal{X}(\bar{T}_m + \theta_1 R_m) \\ &- \mu \mathcal{X}(\bar{h}_m + R_h)] R_m - \mu \mathcal{X}(\bar{T}_m + R_m) \mathcal{Y}(\bar{h}_m + \theta_2 R_h) R_h \\ &+ f_T(\bar{T}_m + \bar{\theta}_1 R_m, \bar{h}_m + R_T) R_T \\ &+ f_h(\bar{T}_m + R_T, \bar{h}_m + \bar{\theta}_2 R_h) R_h + O(\mu^{m+1}) \\ &= [\mathcal{X}(\bar{T}_m + \theta_1 R_m) - \mu \mathcal{X}(\bar{h}_m + R_h)] R_m - \mu \mathcal{X}(\bar{T}_m + R_m) \\ &\times (\bar{h}_m + \theta_2 R_h) R_h + f_T(\bar{T}_m + \bar{\theta}_1 R_m, \bar{h}_m + R_T) R_T \\ &+ f_h(\bar{T}_m + R_T, \bar{h}_m + \bar{\theta}_2 R_h) R_h + O(\mu^{m+1}) \\ &(0 < \theta_1, \theta_2, \bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2 < 1, \rho < \mu \ll 1), \\ &\frac{dR_h}{dt} - h(2R_h - R_T) \\ &= -\frac{d\bar{h}_m}{dt} + h(2\bar{h}_m - \bar{T}_m) + g(\bar{T}_m + R_m, \bar{h}_m + R_m) \\ &- g(\bar{T}_m, \bar{h}_m) \\ &= \left[-\frac{dh_0}{dt} + h(2h_0 - T_0) + g(T_0, h_0) \right] \\ &+ \sum_{i=1}^m \left[-\frac{dh_i}{dt} + (-b + g_T(T_0, h_0)) T_i \right. \\ &+ (2b + g_h(T_0, h_0)) h_i + G_i \left. \right] \mu^{m+1} \\ &+ g_T(\bar{T}_m + \theta_3 R_m, \bar{h}_m + R_T) R_T \\ &+ g_h(\bar{T}_m + R_T, \bar{h}_m + \theta_4 R_h) R_h \\ &+ O(\mu^{m+1}) \\ &= g_T(\bar{T}_m + \theta_3 R_m, \bar{h}_m + R_T) R_T \\ &+ g_h(\bar{T}_m + R_T, \bar{h}_m + \theta_4 R_h) R_h \\ &+ O(\mu^{m+1}) \\ &(0 < \theta_3, \theta_4 < 1, \rho < \mu \ll 1). \end{aligned}$$

再根据不动点原理^[33], 问题(1),(2)在对应的初始条件下存在解 $(\mathcal{T}(t), h(t))$, 并在有限的时间 $0 \leq t \leq t_0$ 内, 如下解的关于 μ 的一致有效的渐近展开式成立:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(t) &= \sum_{i=1}^m T_i \mu^i + O(\mu^{m+1}), \\ h(t) &= \sum_{i=1}^m h_i \mu^i + O(\mu^{m+1}), \\ &(t \in [0, t_0], \rho < \mu \ll 1). \end{aligned}$$

5. 近似解的精度

为了说明由(3)–(7)式得到的系统(1)(2)的近似展开式的精度,我们选取模型的特殊情形^[4]: $a_1 = -0.97, a_2 = -2.84, b = 0.58, \mu = 0.01, f(T, h) = 0, g(T, h) = \frac{2}{3}T^3$, 以及初始条件 $T(0) = h(0) = 1$. 我们有

$$\begin{aligned} \frac{dT_0}{dt} &= a_1 T_0 + \sqrt{2/3} T_0^2, \\ \frac{dh_0}{dt} &= k(2h_0 - T_0) + \frac{2}{3} T_0^3, \\ T_0(0) &= h_0(0) = 1, \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned} \frac{dT_1}{dt} &= (a_1 + \sqrt{8/3} T_0) T_1 - (a_2 + \sqrt{2/3} T_0) h_0, \\ \frac{dh_1}{dt} &= k(2h_1 - T_1) + 2T_0^2 T_1, \\ T_1(0) &= h_1(0) = 0. \end{aligned} \tag{10}$$

由(9)式,得到

$$T_0 = \left[-\frac{1}{a_1} \sqrt{\frac{2}{3}} + \left(1 + \frac{1}{a_1} \sqrt{\frac{2}{3}} \right) \exp(-a_1 t) \right]^{-1}, \tag{11}$$

$$\begin{aligned} h_0 = \exp(2bt) &\left[1 - \int_0^t \left[b \left[\frac{1}{a_1} \sqrt{\frac{2}{3}} \exp(2bt_1) \right. \right. \right. \\ &+ \left. \left. \left(1 + \frac{1}{a_1} \sqrt{\frac{2}{3}} \right) \exp(2b - a_1)t_1 \right]^{-1} \right. \\ &- \left. \left. \left[\frac{1}{a_1} \sqrt{\frac{2}{3}} \exp(2bt_1) + \left(1 + \frac{1}{a_1} \sqrt{\frac{2}{3}} \right) \right. \right. \right. \\ &\left. \left. \left. \times \exp(2b - a_1)t_1 \right]^{-3} \right] dt_1 \right]. \end{aligned} \tag{12}$$

将(11),(12)式代入线性问题(10)式,可得到 T_1 和 h_1 . 于是模型解的一次渐近展开式

$$T_{1asy} = T_0 + T_1 \mu, h_{1asy} = h_0 + h_1 \mu \quad (0 < \mu \ll 1).$$

不难得到海表温度的模拟解 T_{sim} 和一次

摄动解 T_{1per} 以及温跃层深度的模拟解 h_{sim} 和一次摄动解 h_{1per} 的图形曲线如图 1 所示.

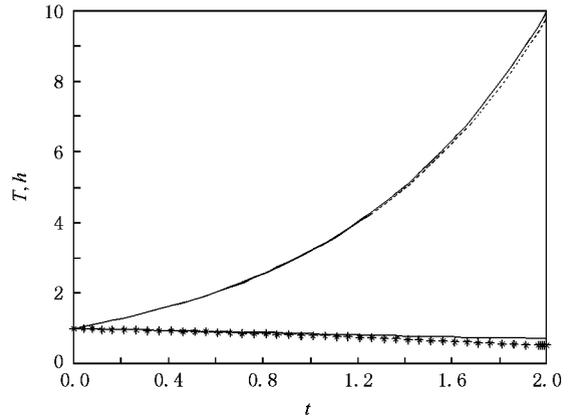


图 1 海表温度的模拟解 T_{sim}, h_{sim} (实线) 和一次摄动解 T_{1per} (* 曲线), h_{1per} (虚线) 的图形曲线

6. 结 论

1) 由图 1 可以看出,利用摄动方法得到的一次摄动渐近解(T_{1per}, h_{1per})具有较好的精度. 并且由实测 $a_1 < 0, b > 0$ 知,系统(1),(2)的奇点是一个不稳定的鞍点. 所以这种情形下,全球气候 ENSO 模型也是不稳定的.

2) 大气物理 ENSO 振子是一个复杂的自然现象. 因此我们需要把它归化为基本模型,然后利用近似方法去求解. 摄动方法就是一个简单而有效的方法.

3) 摄动求解方法是一个近似方法. 它不同于一般的数值计算. 这种方法是一个解析方法,用它得到解的渐近展开式还能继续进行解析运算. 因此还能得到全球气候 ENSO 振子的其他物理量的性态. 本文对此不再讨论.

[1] Feng G L, Dong W J, Jia X J, Cao H X 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1181 (in Chinese) [封国林、董文杰、贾晓静、曹鸿兴 2002 物理学报 **51** 1181]
 [2] Liu S K, Fu Z T, Liu S D, Zhao Q 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 10 (in Chinese) [刘式适、付遵涛、刘式达、赵强 2002 物理学报 **51** 10]
 [3] Zhang J S, Xiao X C 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 1221 (in Chinese) [张家树、肖先赐 2000 物理学报 **49** 1221]

[4] Wang C 2001 *Adv. Atmos. Sci.* **18** 674
 [5] Wang B, Barcion A, Fan Z 1999 *J. Atmos. Sci.* **56** 5
 [6] Guan X P, He Y H, Fan Z P 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 276 (in Chinese) [关新平、何宴辉、范正平 2003 物理学报 **52** 276]
 [7] Guan X P, Fan Z P, Peng H P, Wan Y Q 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 1674 (in Chinese) [关新平、范正平、彭海朋、王益群 2001 物理学报 **50** 1674]

- [8] Hong L , Xu J X 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 612 (in Chinese) [洪灵、徐健学 2001 物理学报 **50** 612]
- [9] Chen S H , Liu J , Xie J , Lu J A 2002 *Chin. Phys.* **11** 233
- [10] Li Z , Han C Z 2002 *Chin. Phys.* **11** 9
- [11] Liu J H , Zhou T S , Zhang S C 2002 *Chin. Phys.* **11** 12
- [12] Barbu L , Morosanu G 2007 *Singularly Perturbed Boundary-Value Problems* (Basel : Birkhauserm Verlag AG)
- [13] Ni W M , Wei J C 2006 *J. Differ. Eqns.* **221** 158
- [14] Bartier J P 2007 *Asymptotic Anal.* **46** 325
- [15] Libre J , da Silva P R 2007 *J. Dyn. Differ. Eqns.* **19** 309
- [16] Duehring D , Huang W Z 2007 *J. Dyn. Differ. Eqns.* **19** 457
- [17] Guarguaglini F R , Natalini R 2007 *Partial Differ. Eqns.* **32** 163
- [18] Mo J Q , Wang H , Lin W T , Lin Y H 2005 *Acta Oceanologica Sin.* **24** 35
- [19] Mo J Q , Lin W T , Wang H 2006 *Chin. J. Geophysics* **49** 1737
- [20] Mo J Q , Lin W T , Wang H 2007 *Prog. Natl. Sci.* **17** 230
- [21] Mo J Q , Lin W T , Lin Y H 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 3127 (in Chinese) [莫嘉琪、林万涛、林一骅 2007 物理学报 **56** 3127]
- [22] Mo J Q , Lin W T 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 5565 (in Chinese) [莫嘉琪、林万涛 2007 物理学报 **56** 5565]
- [23] Mo J Q , Lin W T 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 1291 (in Chinese) [莫嘉琪、林万涛 2008 物理学报 **57** 1291]
- [24] Mo J Q , Lin W T 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 6689 (in Chinese) [莫嘉琪、林万涛 2008 物理学报 **57** 6689]
- [25] Mo J Q , Wang H , Lin W T , Lin Y H 2006 *Chin. Phys.* **15** 671
- [26] Mo J Q , Wang H , Lin W T 2006 *Chin. Phys.* **15** 1927
- [27] Mo J Q , Lin W T , Wang H 2007 *Chin. Phys.* **16** 578
- [28] Mo J Q , Lin W T , Wang H 2007 *Chin. Phys.* **16** 951
- [29] Mo J Q , Lin W T , Lin Y H 2007 *Chin. Phys.* **16** 1908
- [30] Mo J Q , Lin W T , 2008 *Chin. Phys. B* **17** 370
- [31] Mo J Q , Lin W T , Lin Y H 2008 *Chin. Phys. B* **17** 743
- [32] Mo J Q , Lin W T 2008 *J. Sys. Sci. & Complexity* **21** 119
- [33] de Jager E M , Jiang F R 1996 *The Theory of Singular Perturbation* (Amsterdam : North-Holland Publishing Co.)

Approximate solution to a nonlinear oscillation of global climate model^{*}

Mo Jia-Qi^{1)†} Lin Yi-Hua²⁾ Lin Wan-Tao²⁾

¹⁾ Department of Mathematics , Anhui Normal University , Wuhu 241000 , China)

²⁾ State Key Laboratory of Numerical Modeling for Atmospheric Sciences and Geophysical Fluid Dynamics ,
Institute of Atmospheric Physics , Chinese Academy of Sciences , Beijing 100029 , China)

(Received 27 November 2008 ; revised manuscript received 19 December 2008)

Abstract

A type of nonlinear model of the global climate is considered. By using the perturbation theory and method , solution to the asymptotic expansions of some related problems are constructed. The asymptotic expansions of the solution to the original problem have a higher degree of approximation. The perturbed asymptotic method is an analytic method , and the obtained solution can be analytically operated sequentially.

Keywords : nonlinearity , perturbation , global climate

PACC : 0230

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 40676016 , 40876010) , the Main Direction Program of the Knowledge Innovation of Chinese Academy of Sciences (Grant No. KZCX2-YW-Q03-08) , the LASG State Key Laboratory Special Fund , and the E-Institutes of Shanghai Municipal Education Commission , Shanghai , China (Grant No. E03004) .

[†] E-mail : mojiaqi@mail.ahnu.edu.cn