第 58 卷 第 10 期 2009 年 10 月
1000-3290/2009/58(10)/6725-04
物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA
Vol.58, No.10, October, 2009

计算加速度相关 Lagrange 函数的方法

丁光涛†

(安徽师范大学物理与电子信息学院, 芜湖 241000)

(2008 年 11 月 29 日收到; 2008 年 12 月 12 日收到修改稿)

研究从运动微分方程构造加速度相关 Lagrange 函数的问题, 给出一种由方程的自伴随形式计算加速度相关 Lagrange 函数的方法. 举例说明结果的应用.

关键词: 分析力学, 加速度相关 Lagrange 函数, 自伴随性, Lagrange 力学逆问题

PACC: 0320

1. 引　言

Lagrange 力学逆问题研究微分方程 Lagrange 化, 即研究给定的方程组构造相应的 Lagrange 函数, 将方程组写成 Lagrange 方程形式. 近几十年来, 这个问题为数学、物理及力学界所注目, 其研究取得了很大进展[1-12]. 文献[12]证明满足一定条件时, 系统 Lagrange 函数可与加速度相关, 且导出的 Lagrange 方程仍为二阶微分方程组, 同时证明这种 Lagrange 函数与不含加速度的标准 Lagrange 函数之间可由广义的规范变换相互转换. 如何由二阶微分方程组构造加速度相关 Lagrange 函数, 是新型的 Lagrange 力学逆问题, 文献[12]给出了从运动学形式的运动微分方程, 构造加速度相关 Lagrange 函数的一种方法, 本文将提出从自伴随形式运动微分方程计算加速度相关 Lagrange 函数的直接方法, 并举例说明这种方法的应用.

2. 加速度相关 Lagrange 函数与自伴随方程[1-3,12]

设系统的加速度线性相关的 Lagrange 函数为

$$\bar{L}(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},\ddot{\boldsymbol{q}}) = A_i(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\ddot{q}_i + B(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}), \tag{1}$$

式中对同一项中重复指标从 1 到 n 求和(下同).

本文以 $\bar{L}$ 和 $\bar{E}_i$ 表示与加速度相关的 Lagrange 函数和算子, 以 L 和 E_i 表示与加速度无关的 Lagrange 函数和算子. 若 $\bar{L}$ 中加速度项系数满足条件

$$\frac{\partial A_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial A_j}{\partial \dot{q}_i} \quad (i,j = 1,2,\cdots,n), \tag{2}$$

则由 $\bar{L}$ 导出的 Lagrange 方程仍为二阶微分方程组

$$\bar{E}_i(\bar{L}) = M_{ij}\ddot{q}_j + N_i \quad (i,j = 1,2,\cdots,n), \tag{3}$$

式中,

$$\bar{E}_i = -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\frac{\partial}{\partial \ddot{q}_i} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial}{\partial q_i}, \tag{4}$$

$$M_{ij} = \frac{\partial^2 B}{\partial \dot{q}_i \dot{q}_j} - \frac{\partial^2 A_i}{\partial \dot{q}_j \partial q_k}\dot{q}_k - \frac{\partial^2 A_i}{\partial t \partial \dot{q}_j} - \frac{\partial A_i}{\partial q_j} - \frac{\partial A_j}{\partial q_i}, \tag{5}$$

$$N_i = -\frac{\partial^2 A_i}{\partial q_j \partial q_k}\dot{q}_j\dot{q}_k + \left(\frac{\partial^2 B}{\partial \dot{q}_i \partial q_j} - 2\frac{\partial^2 A_i}{\partial t \partial q_j}\right) \times \dot{q}_j - \frac{\partial^2 A_i}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 B}{\partial t \partial \dot{q}_i} - \frac{\partial B}{\partial q_i}, \tag{6}$$

其中, $i,j,k = 1,2,\cdots,n$.

设方程组(3)在点 $(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ 的区域 R^{2n+1} 上满足如下连续、规则条件:

$$M_{ij}, N_i \in C^m(R^{2n+1}) \quad (m \geqslant 2), \tag{7}$$

$$|M_{ij}|(R^{2n+1}) \neq 0. \tag{8}$$

利用对称性条件(2), 通过直接计算, 证明方程组(3)在 R^{2n+1} 上满足如下自伴随性的全部充要条件:

$$M_{ij} = M_{ji}, \tag{9}$$

$$\frac{\partial M_{ij}}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial M_{jk}}{\partial \dot{q}_i}, \tag{10}$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial N_j}{\partial \dot{q}_i} = 2\left\{\frac{\partial}{\partial t} + \dot{q}_k\frac{\partial}{\partial q_k}\right\}M_{ij}, \tag{11}$$

† E-mail: dgt695@sina.com

$$\frac{\partial N_i}{\partial q_j}-\frac{\partial N_j}{\partial q_i}=\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial t}+\dot{q}_k\frac{\partial}{\partial q_k}\right\}\left(\frac{\partial N_i}{\partial \dot{q}_j}-\frac{\partial N_j}{\partial \dot{q}_i}\right). \tag{12}$$

换句话说,方程组(3)是自伴随的[1—3].

3. 由自伴随方程计算加速度相关 Lagrange 函数

设系统运动微分方程是自伴随形式的,或利用同位等价变换成自伴随形式的[1—3].

$$M_{ij}(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\ddot{q}_j+N_i(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})=0 \quad (i,j=1,2,\cdots,n), \tag{13}$$

其中 M_{ij} 和 N_i 满足连续和规则条件(7)和(8)式,以及自伴随充要条件(9)—(12)式.方程(13)可以表示成 Lagrange 方程形式,加速度相关 Lagrange 函数为

$$\begin{aligned}\bar{L}(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},\ddot{\boldsymbol{q}})&=-q_i\int_0^1\mathrm{d}\tau[M_{ij}(t,\tau\boldsymbol{q},\tau\dot{\boldsymbol{q}})\tau\ddot{q}_j\\&\quad+N_i(t,\tau\boldsymbol{q},\tau\dot{\boldsymbol{q}})]\\&=A_j(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\ddot{q}_j+B(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}),\end{aligned} \tag{14}$$

式中,

$$A_j=-\int_0^1\mathrm{d}\tau[q_iM_{ij}(t,\tau\boldsymbol{q},\tau\dot{\boldsymbol{q}})\tau], \tag{15}$$

$$B=-\int_0^1\mathrm{d}\tau[q_iN_i(t,\tau\boldsymbol{q},\tau\dot{\boldsymbol{q}})]. \tag{16}$$

(14)式的证明如下.根据 Lagrange 力学逆问题理论,构造方程(13)与加速度无关的 Lagrange 函数方法之一为 Engels 第一方法[1—4],

$$\begin{aligned}L&=-q_i\int_0^1\mathrm{d}\tau[M_{ij}(t,\tau\boldsymbol{q},\tau\dot{\boldsymbol{q}})\tau\ddot{q}_j+N_i(t,\tau\boldsymbol{q},\tau\dot{\boldsymbol{q}})]\\&\quad+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^1\mathrm{d}\tau\int_0^1\mathrm{d}\tau'\tau q_iM_{ij}(t,\tau\boldsymbol{q},\tau\tau'\dot{\boldsymbol{q}})\tau\dot{q}_j,\end{aligned} \tag{17}$$

(17)式右边第一个积分所得到结果为加速度相关的 $\bar{L}$,而第二个积分得出的结果是规范函数

$$G(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})=\int_0^1\mathrm{d}\tau\int_0^1\mathrm{d}\tau'[\tau q_iM_{ij}(t,\tau\boldsymbol{q},\tau\tau'\dot{\boldsymbol{q}})\tau\dot{q}_j]. \tag{18}$$

G 是下列方程的解

$$\frac{\partial G}{\partial \dot{q}_j}=-A_j=\int_0^1\mathrm{d}\tau[q_iM_{ij}(t,\tau\boldsymbol{q},\tau\dot{\boldsymbol{q}})\tau], \tag{19}$$

即 G 对时间全微商中与加速度相关的项恰与(17)式中的第一个积分中与加速度相关的项全部抵消,从而(17)式得到的是与加速度无关的 Lagrange 函数.

将(4)式中算子 $\bar{E}_i$ 作用于(17)式两边,得

$$\bar{E}_i(L)=\bar{E}_i(\bar{L})+\bar{E}_i(\dot{G}). \tag{20}$$

由于

$$\bar{E}_i(L)=E_i(L)=M_{ij}\ddot{q}_j+N_i, \tag{21}$$

$$E_i=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial\dot{q}_i}-\frac{\partial}{\partial q_i}, \tag{22}$$

$$\bar{E}_i(\dot{G})\equiv 0, \tag{23}$$

故得

$$\bar{E}_i(\bar{L})=M_{ij}\ddot{q}_j+N_i, \tag{24}$$

即(14)式中 $\bar{L}$ 就是自伴随形式运动微分方程(13)的加速度相关 Lagrange 函数.

应该指出,上述推导过程中自伴随条件是很重要的,正是这些条件保证了方程(19)可积分,它的解是(18)式中的 G,而且保证了(14)式中 A_i 满足对称条件(2),从而使方程(24)是二阶微分方程,而不是三阶微分方程.

4. 举 例

例 1 阻尼运动[1—3,6]

$$\ddot{q}+\gamma\dot{q}=0, \tag{25}$$

方程(25)不是自伴随的,但容易写成等价的自伴随形式,其一是

$$\mathrm{e}^{\gamma t}(\ddot{q}+\gamma\dot{q})=0. \tag{26}$$

利用(14)式,得一个加速度相关 Lagrange 函数为

$$\begin{aligned}\bar{L}_1&=-q\int_0^1\mathrm{d}\tau[\mathrm{e}^{\gamma t}\tau\ddot{q}+\gamma\mathrm{e}^{\gamma t}\tau\dot{q}]\\&=-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\gamma t}(q\ddot{q}+\gamma q\dot{q}).\end{aligned} \tag{27}$$

方程(25)也可以写成另一种自伴随形式

$$\frac{\ddot{q}}{\dot{q}}+\gamma=0 \quad (\dot{q}\neq 0). \tag{28}$$

利用(14)式,得另一个加速度相关 Lagrange 函数为

$$\bar{L}_2=-q\int_0^1\mathrm{d}\tau\left(\frac{\tau\ddot{q}}{\tau\dot{q}}+\gamma\right)=-\frac{q\ddot{q}}{\dot{q}}-\gamma q. \tag{29}$$

顺便指出,利用广义的等效规范变换,可以从 $\bar{L}_1$ 和 $\bar{L}_2$ 得到阻尼运动标准的 Lagrange 函数

$$L_1=\bar{L}_1+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\gamma t}q\dot{q}\right)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\gamma t}\dot{q}^2, \tag{30}$$

$$L_2=\bar{L}_2+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(q\ln\dot{q})=\dot{q}\ln\dot{q}-\gamma q. \tag{31}$$

例 2 构造二维系统[3]

$$q_1^2\ddot{q}_1+\frac{1}{2}q_1q_2\ddot{q}_2+q_1\dot{q}_1^2+\frac{1}{2}q_1\dot{q}_2^2+t(2q_1+q_2)=0,$$

$$\frac{1}{2}q_1q_2\ddot{q}_1+q_2^2\ddot{q}_2+\frac{1}{2}q_2\dot{q}_1^2+q_2\dot{q}_2^2+t(q_1+2q_2)=0$$
$$(q_1\neq 0,q_2\neq 0)\tag{32}$$

的加速度相关 Lagrange 函数.

对照方程(13),有

$$M_{11}=q_1^2,M_{12}=M_{21}=\frac{1}{2}q_1q_2,M_{22}=q_2^2,$$
$$N_1=q_1\dot{q}_1^2+\frac{1}{2}q_1\dot{q}_2^2+t(2q_1+q_2),$$
$$N_2=\frac{1}{2}q_2\dot{q}_1^2+q_2\dot{q}_2^2+t(q_1+2q_2).\tag{33}$$

容易验证，M_{ij} 和 N_i 满足连续和规则条件(7)和(8)，以及全部自伴随条件(9)—(12),故系统(32)是自伴随的,利用(14)式得加速度相关 Lagrange 函数为

$$\begin{aligned}\bar{L}=&-q_1\int_0^1\mathrm{d}\tau\Big[\tau^3q_1^2\ddot{q}_1+\frac{1}{2}\tau^3q_1q_2\ddot{q}_2+\tau^3q_1\dot{q}_1^2\\&+\frac{1}{2}\tau^3q_1\dot{q}_1^2+t\tau(2q_1+q_2)\Big]\\&-q_2\int_0^1\mathrm{d}\tau\Big[\frac{1}{2}\tau^3q_1q_2\ddot{q}_1+\tau^3q_2^2\ddot{q}_2\\&+\frac{1}{2}\tau^3q_2\dot{q}_1^2+\tau^3q_2\dot{q}_2^2+t\tau(q_1+2q_2)\Big]\\=&-\left(\frac{1}{4}q_1^3+\frac{1}{8}q_1q_2^2\right)\ddot{q}_1-\left(\frac{1}{8}q_1^2q_2+\frac{1}{4}q_2^3\right)\ddot{q}_2\\&-\Big[\left(\frac{1}{4}q_1^2+\frac{1}{8}q_2^2\right)\dot{q}_1^2+\left(\frac{1}{8}q_1^2+\frac{1}{4}q_2^2\right)\dot{q}_2^2\\&+t(q_1^2+q_1q_2+q_2^2)\Big].\end{aligned}\tag{34}$$

同样,由广义规范变换可得二阶系统(32)的加速度无关的标准 Lagrange 函数为

$$\begin{aligned}L=&\bar{L}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[\left(\frac{1}{4}q_1^3+\frac{1}{8}q_1q_2^2\right)\dot{q}_1+\left(\frac{1}{8}q_1^2q_2+\frac{1}{4}q_2^3\right)\dot{q}_2\Big]\\=&\frac{1}{2}(q_1^2\dot{q}_1^2+q_1q_2\dot{q}_1\dot{q}_2+q_2^2\dot{q}_2^2)-t(q_1^2+q_1q_2+q_2^2).\end{aligned}\tag{35}$$

5. 结　论

本文在 Lagrange 力学逆问题理论构造 Lagrange 函数的 Engels 第一方法的基础上,导出一种从力学系统自伴随形式的二阶运动微分方程计算加速度相关 Lagrange 函数的方法.反过来说,由本文方法得到加速度相关 Lagrange 函数后,可再利用广义规范变换导出传统的位形空间中的 Lagrange 函数.

[1] Santilli R M 1978 *Foundations of Theoretical Mechanics* Ⅰ (New York: Springer-Verlag)

[2] Santilli R M 1983 *Foundations of Theoretical Mechanics* Ⅱ (New York: Springer-Verlag)

[3] Mei F X 1988 *Special Problems of Analytical Mechanics* (Beijing: Beijing Institute of Technology Press) (in Chinese) [梅凤翔 1988 分析力学专题(北京:北京工业学院出版社)]

[4] Engels E 1978 *Hadronic J*. **1** 465

[5] Ding G T 1996 *J*. *Anhui Normal Univ*. **19** 382 (in Chinese) [丁光涛 1996 安徽师范大学学报 **19** 382]

[6] Ding G T 1991 *Huanghuai J*. **7** 7 (in Chinese) [丁光涛 1991 黄淮学刊 **7** 7]

[7] Ding G T, Tao S T 2008 *Chin*. *Sci*. *Bull*. **53** 872 (in Chinese) [丁光涛、陶松涛 2008 科学通报 **53** 872]

[8] Mei F X, Wu H B, Zhang Y F 2006 *Chin*. *Phys*. **15** 1662

[9] Wu H B, Mei F X 2005 *Chin*. *Phys*. **14** 2391

[10] Mei F X, Xie J F, Guang T Q 2007 *Chin*. *Phys*. **16** 2845

[11] Wu H B, Zhang Y F, Mei F X 2006 *Acta Phys*. *Sin*. **55** 4987 (in Chinese) [吴惠彬、张永发、梅凤翔 2006 物理学报 **55** 4987]

[12] Ding G T 2009 *Acta Phys*. *Sin*. **58** 3620 (in Chinese) [丁光涛 2009 物理学报 **58** 3620]

A method for computing acceleration-dependent Lagrangians

Ding Guang-Tao[†]

(*College of Physics and Electronic Information*, *Anhui Normal University*, *Wuhu* 241000, *China*)

(Received 29 November 2008; revised manuscript received 12 December 2008)

Abstract

The problem of constructing an acceleration-dependent Lagrangian from the equations of motion is studied. A method for the computation of an acceleration-dependent Lagrangian from the self-adjoint equations is presented. Two examples are given to illustrate the application of the results.

Keywords: analytical mechanics, acceleration-dependent Lagrangian, self-adjointness, inverse problem of Lagrangian mechanics

PACC: 0320

† E-mail: dgt695@sina.com