

Kirchhoff 弹性直杆在力螺旋作用下的稳定性*

薛 纭^{1)†} 刘延柱²⁾

1) 上海应用技术学院机械与自动化工程学院, 上海 200235)

2) 上海交通大学工程力学系, 上海 200030)

(2008 年 9 月 16 日收到, 2008 年 10 月 25 日收到修改稿)

研究受力螺旋作用的圆截面 Kirchhoff 弹性直杆在各种边界条件下的稳定性问题. 用直角坐标和 Cardano 角表示截面的形心位置和姿态. 由 Kirchhoff 方程得到弹性细杆的直线平衡特解, 导出线性化扰动方程及其通解. 根据边界条件确定积分常数的非零解存在条件, 讨论了各种边界条件, 如两端铰支、两端固定、一端铰支一端固定以及一端固定一端自由的弹性细杆直线平衡状态的稳定性, 导出了临界载荷的表达式, 绘制了稳定域, 将 Greenhill 公式推广到其他边界条件, 并且使压杆的 Euler 公式成为其特例.

关键词: Kirchhoff 弹性杆, 稳定性, 力螺旋, Greenhill 公式

PACC: 0320, 0340D

1. 引 言

弹性细杆的平衡和稳定性是经典的力学问题, 其研究历史最早可追溯到 Daniel Bernoulli 和 Euler (1730)^[1]. 1883 年, Greenhill 建立了两端铰支时计算压扭杆临界载荷的 Greenhill 公式^[2]. 武际可等从 Kirchhoff 方程出发, 用线性化扰动方程推导了 Greenhill 公式^[3,4]. 20 世纪 70 年代以来, 为模拟 DNA 超螺旋结构的几何形态以及解释其物理现象, 弹性细杆力学再次受到关注^[1,5-20], 其平衡和稳定性问题的研究工作又有新的进展. 基于 Kirchhoff 动力学比拟思想, 提出了弹性细杆平衡的 Lyapunov 稳定性, 它不同于 Euler 稳定性^[10-16]. 端部受力螺旋作用的弹性杆的平衡和稳定性问题是研究 DNA 超螺旋结构的拓扑和几何形态的重要课题之一, 涉及一系列具有生物学意义的物理现象, 其应用背景还涉及工程技术领域^[21-23]. 本文研究受力螺旋作用的弹性直杆在各种端部约束下的 Euler 稳定性问题. 从 Kirchhoff 方程出发, 在直杆平衡解的基础上, 导出线性化扰动方程的通解, 根据边界条件以及积分常数非零解的存在条件, 计算了不同边界条件: 两端铰支、两端固定、一端铰支一端固定以及一端固定一端自由四种情况下的弹性细杆直线平衡状态的稳定

性, 用统一的方法建立临界载荷的计算公式并绘出稳定域, 将 Greenhill 公式推广到其他支座情形, 并且使压杆的 Euler 公式成为其特例.

2. 弹性杆平衡的 Kirchhoff 方程

讨论 Kirchhoff 弹性杆在端部力螺旋 (F_0, m_0) 作用下的稳定性. 设 $O-\xi\eta\zeta$ 为惯性参照系, 在弹性杆横截面的形心 p 建立 $p-\xi\eta\zeta$ 坐标系, 用 Cardano 角表示截面的姿态^[24], 即此坐标系依次绕轴 ξ, η, ζ 转过 α, β, γ 角,

$$p-\xi\eta\zeta \xrightarrow{\xi, \alpha} p-x_1 y_1 z_1 \xrightarrow{\eta, \beta} p-x_2 y_2 z_2 \xrightarrow{\zeta, \gamma} p-x_3 y_3 z_3,$$

其中, $p-x_3 y_3 z_3$ 为截面的主轴坐标系, z_3 为截面的外法线轴, 按 Kirchhoff 假定, 此亦是中心线的切线轴, 如图 1 所示.

设截面内力的主矩 M 和弯扭度 ω 满足线弹性本构关系

$$M = B\omega, \tag{1}$$

其中

$$M = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} B_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & B_3 \end{pmatrix},$$

* 国家自然科学基金(批准号: 10472067)资助的课题.

† E-mail: xy@sit.edu.cn

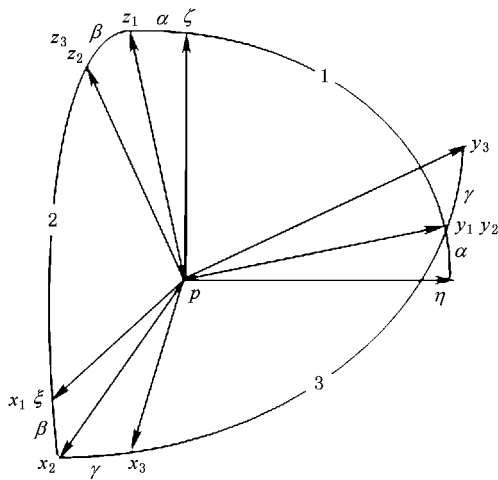


图 1 截面姿态的 Cardano 角

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\beta\cos\gamma & \sin\gamma & 0 \\ -\cos\beta\sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ \sin\beta & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \\ \gamma' \end{pmatrix},$$

这里, M_i, ω_i 为 \boldsymbol{M} 和 $\boldsymbol{\omega}$ 依次沿主轴 $p-x_3, y_3, z_3$ 的分量; B_1, B_2 为截面对 $p-x_3, y_3$ 轴的抗弯刚度(设 $B_2 = B_1$), B_3 为抗扭刚度;撇号表示对弧坐标 s 的导数.

建立弹性杆的平衡微分方程. 将 Kirchhoff 方程向 $p-x_2, y_2, z_2$ 坐标轴投影, 导出

$$B_1 \alpha'' \cos\beta + [B_3 \gamma' - (2B_1 - B_3) \alpha' \sin\beta] \beta' - F_2 = 0, \quad (2a)$$

$$B_1 \beta'' - [B_3 \gamma' \cos\beta - (B_1 - B_3) \alpha' \sin\beta \cos\beta] \alpha' + F_1 = 0, \quad (2b)$$

$$\gamma'' + \alpha'' \sin\beta + \alpha' \beta' \cos\beta = 0, \quad (2c)$$

$$F_1' - F_2 \alpha' \sin\beta + F_3 \beta' = 0, \quad (2d)$$

$$F_2' + (F_1 \sin\beta - F_3 \cos\beta) \alpha' = 0, \quad (2e)$$

$$F_3' - F_1 \beta' + F_2 \alpha' \cos\beta = 0, \quad (2f)$$

其中 F_i 为截面内力主矢依次在坐标轴 $p-x_2, -y_2, -z_2$ 上的投影. (2c) 式存在首次积分

$$B_3 (\alpha' \sin\beta + \gamma') - m_{30} = 0. \quad (3)$$

表明 M_3 为常值 m_{30} . 利用 (3) 式消去其余方程中的 γ' (2a) 和 (2b) 式简化为

$$B_1 \alpha'' \cos\beta + (m_{30} - 2B_1 \alpha' \sin\beta) \beta' - F_2 = 0, \quad (4a)$$

$$B_1 \beta'' + (B_1 \alpha' \sin\beta - m_{30}) \alpha' \cos\beta + F_1 = 0. \quad (4b)$$

中心线方程为

$$\xi' = \sin\beta, \eta' = -\sin\alpha \cos\beta, \zeta' = \cos\alpha \cos\beta, \quad (5)$$

其中 ξ, η, ζ 为截面形心 p 在惯性系 $O-\xi\eta\zeta$ 中的坐标. 联立方程组 (2d)-(2f) (3) (4) 和 (5) 关于变量 $\alpha, \beta, \gamma, F_i, \xi, \eta, \zeta$ 封闭.

3. Kirchhoff 方程的直杆解、扰动方程及其通解

方程组 (2)-(5) 存在特解

$$\alpha_s = \beta_s = 0, \gamma_s = \frac{m_{30}}{B_3} s,$$

$$F_{1s} = F_{2s} = 0, F_{3s} = -F_0, \quad (6)$$

对应于杆的直线平衡状态. 中心线方程为

$$\xi_s = \eta_s = 0, \zeta_s = s \quad (s \leq L), \quad (7)$$

其中 L 为杆长. 定义扰动量 $x_i (i = 1, \dots, 9)$, 有

$$x_1 = \alpha - \alpha_s, x_2 = \beta - \beta_s,$$

$$x_3 = \gamma - \gamma_s = \gamma - \frac{m_{30}}{B_3} s, x_{3+i} = F_i - F_{is},$$

$$x_7 = \xi - \xi_s, x_8 = \eta - \eta_s, x_9 = \zeta - \zeta_s, \quad (8)$$

代入 (4) (3) 和 (2d)-(2f) 式, 略去二阶微量, 导出如下线性化扰动方程:

$$B_1 x_1'' + m_{30} x_2' - x_5 = 0, \quad (9a)$$

$$B_1 x_2'' - m_{30} x_1' + x_4 = 0, \quad (9b)$$

$$B_3 x_3' = 0; \quad (9c)$$

$$x_4' - F_0 x_2' = 0, \quad (9d)$$

$$x_5' + F_0 x_1' = 0, \quad (9e)$$

$$x_6' = 0; \quad (9f)$$

$$x_7' = x_2, \quad (9g)$$

$$x_8' = -x_1, \quad (9h)$$

$$x_9' = 0. \quad (9i)$$

在一阶近似下有 $m_{30} = m_0$. 微分 (9a) 和 (9b) 式后由 (9d) 和 (9e) 式消去 x_4', x_5' , 导出

$$B_1 x_1''' + m_0 x_2'' + F_0 x_1' = 0,$$

$$B_1 x_2''' - m_0 x_1'' + F_0 x_2' = 0. \quad (10)$$

定义复变量 $z = x_1 + ix_2$, (10) 式化作

$$B_1 z''' - m_0 iz'' + F_0 z' = 0. \quad (11)$$

设 $z = \exp(\lambda s)$ (11) 式的特征根为纯虚根和零: $\lambda_1 = k_1 i, \lambda_2 = k_2 i, \lambda_3 = 0$, 其中

$$k_1 = \frac{m_0 + \sqrt{m_0^2 + 4B_1 F_0}}{2B_1},$$

$$k_2 = \frac{m_0 - \sqrt{m_0^2 + 4B_1 F_0}}{2B_1} \quad (12)$$

为实数, $i = \sqrt{-1}$. (11) 式的通解为

$$z = h_1 \exp(ik_1 s) + h_2 \exp(ik_2 s) + h_3, \quad (13)$$

定义复变量 $w = x_7 + ix_8$, (9g) 和 (9h) 式化为

$$w' = -iz. \quad (14)$$

其通解为

$$w = -\frac{h_1}{k_1} \exp(ik_1 s) - \frac{h_2}{k_2} \exp(ik_2 s) - ih_3 s + h_4, \quad (15)$$

其中 h_1, h_2, h_3, h_4 为复常数, 由杆端的位移或力边界条件确定.

4. 杆的端部约束和临界载荷

边界条件组成关于 $\mathbf{h} = (h_1 \ h_2 \ h_3 \ h_4)^T$ 的复线性齐次代数方程

$$\mathbf{A} \mathbf{h} = \mathbf{0}. \quad (16)$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{k_1} & -\frac{1}{k_2} & 0 & 1 \\ i(B_1 k_1 - m_0) & i(B_1 k_2 - m_0) & -im_0 & 0 \\ -\frac{L}{k_1} \exp(ik_1 L) & -\frac{L}{k_2} \exp(ik_2 L) & -iL & 1 \\ i(B_1 k_1 - m_0) \exp(ik_1 L) & i(B_1 k_2 - m_0) \exp(ik_2 L) & -im_0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (20)$$

令其行列式为零, 导出

$$\det \mathbf{A} = iF_0 B_1 L \left[\exp\left(\frac{i(k_1 - k_2)L}{2}\right) - 1 \right] \exp\left(\frac{ik_2 L}{2}\right) = 0, \quad (21)$$

其最小非零解由上式虚实部的公因子决定,

$$\sin(\sqrt{y + x^2}) = 0, \quad (22)$$

其中 $x = \frac{m_0 L}{2B_1}$, $y = \frac{F_0 L^2}{B_1}$ 为无量纲参数. 从而有

$$y + x^2 \leq \pi^2, \quad (23)$$

此即为 Greenhill 公式的无量纲表示^[1-4], 其几何图像为抛物线. 稳定域见图 2. 当 $m_0 = 0$, 即 $x = 0$ 时给出 Euler 载荷 $y \leq \pi^2$.

情形 2 (两端固定) 两固定端截面的位移和转角皆为零

$$z|_{s=0} = 0, w|_{s=0} = 0, z|_{s=L} = 0, w|_{s=L} = 0. \quad (24)$$

临界载荷由反对称矩阵的行列式

$$\Delta = \det \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{\text{Re}} & -\mathbf{A}_{\text{Im}} \\ \mathbf{A}_{\text{Im}} & \mathbf{A}_{\text{Re}} \end{pmatrix} = 0 \quad (17)$$

的最小非零解确定, 其中 $\mathbf{A}_{\text{Re}} = \text{Re}(\mathbf{A})$, $\mathbf{A}_{\text{Im}} = \text{Im}(\mathbf{A})$ 分别为矩阵 \mathbf{A} 的实部和虚部. 以下分别考虑各种边界条件的弹性直杆的稳定性:

情形 1 (两端铰支) 本构关系(1)的线性化扰动方程在铰支端的复变量表示为

$$(B_1 z' - im_0 z)|_{s=0} = 0, (B_1 z' - im_0 z)|_{s=L} = 0, \quad (18)$$

中心线在两端点的扰动为零

$$w|_{s=0} = 0, w|_{s=L} = 0, \quad (19)$$

这 4 个方程组成关于 \mathbf{h} 的线性齐次代数方程(16), 其系数矩阵为

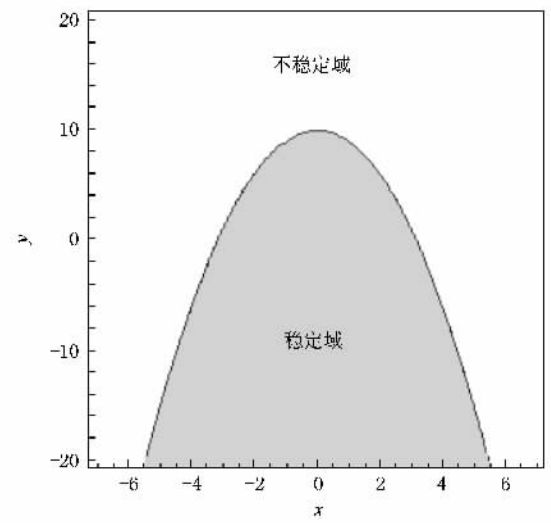


图 2 两端铰支时拉/压-扭杆的稳定域

这 4 个方程组成关于 \mathbf{h} 的线性齐次代数方程(16)的系数矩阵为

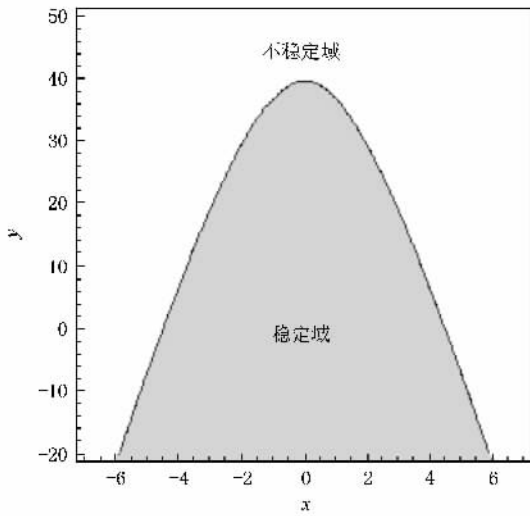


图3 两端固定时拉/压-扭杆的稳定域

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{k_1} & -\frac{1}{k_2} & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -\frac{L}{k_1} \exp(ik_1 L) & -\frac{L}{k_2} \exp(ik_2 L) & -iL & 1 \\ \exp(ik_1 L) & \exp(ik_2 L) & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (25)$$

$$A_{\text{Re}} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{k_1} & -\frac{1}{k_2} & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{k_1} \cos(k_1 L) & -\frac{1}{k_2} \cos(k_2 L) & 0 & 1 \\ ((B_1 k_1 - m_0) \sin(k_1 L) & (B_1 k_2 - m_0) \sin(k_2 L) & 0 & 0) \end{pmatrix},$$

$$A_{\text{Im}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{k_1} \sin(k_1 L) & -\frac{1}{k_2} \sin(k_2 L) & -L & 0 \\ ((-B_1 k_1 + m_0) \cos(k_1 L) & (-B_1 k_1 + m_0) \cos(k_2 L) & m_0 & 0) \end{pmatrix}. \quad (29)$$

代入(17)式并化作无量纲形式 (30)

$$\begin{aligned} \Delta = & 4(\sin u - 2u \cos u) \sin u + 4y \cos^2 u \\ & + \frac{16x}{y} (y \cos u - u \sin u) \sin x \\ & + \frac{4x^2}{y} [y + 8 - 4(2 \cos u + u \sin u) \cos x] \\ & + \frac{16x^3}{y^2} (y \cos u - 2u \sin u) \sin x \end{aligned}$$

令其行列式为零, 导出

$$\det A = \left(\frac{1}{k_1} - \frac{1}{k_2} \right) [1 - \exp(ik_1 L)] [1 - \exp(ik_2 L)] + iL [\exp(ik_1 L) - \exp(ik_2 L)] = 0, \quad (26)$$

其最小非零解由上式虚实部的公因子确定, 其无量纲形式为

$$\frac{1}{y} [2\sqrt{y+x^2} (\cos x - \cos \sqrt{y+x^2}) - y \sin \sqrt{y+x^2}] = 0. \quad (27)$$

稳定域见图3. 当 $m_0 = 0$, 即 $x = 0$ 时给出 Euler 载荷 $y \leq 4\pi^2$; 当 $F_0 = 0$, 即 $y = 0$ 时, 对(27)式取极限 $y \rightarrow 0$, 由 L'Hospital 法则得到 $x \cos x - \sin x = 0$, 导出临界扭矩值 $|x| \leq 4.49$.

情形3 (一端固定一端铰支) 一端固定一端铰支的边界条件为

$$\begin{aligned} z|_{s=0} = 0, w|_{s=0} = 0, w|_{s=L} = 0, \\ (B_1 z' - im_0 z)|_{s=L} = 0. \end{aligned} \quad (28)$$

这4个方程组成关于 \underline{h} 的线性齐次代数方程, 系数矩阵可写为 $A = A_{\text{Re}} + iA_{\text{Im}}$, 其中

$$+ \frac{32x^4}{y^2} (1 - \cos u \cos x),$$

其中 $u = \sqrt{y+x^2}$. 稳定域见图4. 当 $m_0 = 0$ 即 $x = 0$ 时, $\Delta = \sqrt{y} - \tan \sqrt{y} = 0$ 的最小非零解确定 Euler 载荷 $y \leq 20.19$. 图4表明, 扭以及压扭杆都是不稳定的, 只有压和拉扭杆才可能稳定.

情形4 (一端固定一端自由) 一端固定一端自由的边界条件为

$$\begin{aligned}
 z|_{s=0} &= 0, w|_{s=0} = 0, \\
 (B_1 z' - im_0 z)|_{s=L} &= 0, \\
 B_1 z'|_{s=0} - iF_0 w|_{s=L} &= 0, \quad (31)
 \end{aligned}$$

上面最后一式是考虑了弹性杆整体的力矩平衡. 这 4 个方程组成关于 \underline{h} 的线性齐次代数方程 (16) 式的系数矩阵为 $A = A_{\text{Re}} + iA_{\text{Im}}$ 其中

$$\begin{aligned}
 A_{\text{Re}} &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{k_1} & -\frac{1}{k_2} & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -\frac{F_0}{k_1} \sin k_1 L & -\frac{F_0}{k_2} \sin k_2 L & -F_0 L & 0 \\ (m_0 - k_1 B_1) \sin k_1 L & (m_0 - k_2 B_1) \sin k_2 L & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
 A_{\text{Im}} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{B_1 k_1^2 + F_0 \cos k_1 L}{k_1} & -\frac{B_1 k_2^2 + F_0 \cos k_2 L}{k_2} & 0 & F_0 \\ -(B_1 k_1 - m_0) \cos k_1 L & -(B_1 k_2 - m_0) \cos k_2 L & m_0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (32)
 \end{aligned}$$

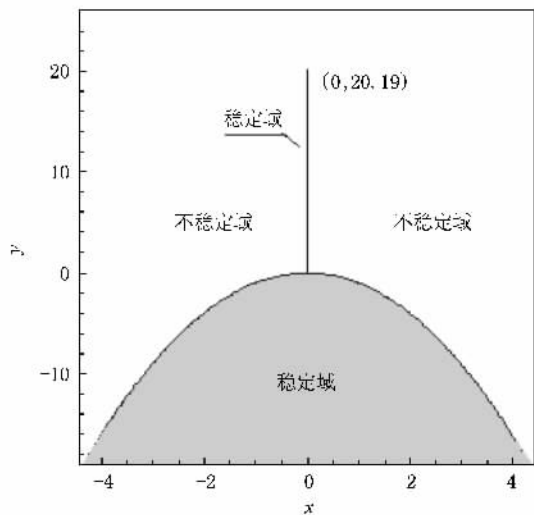


图 4 一端固定一端铰支时拉/压-扭杆的稳定域

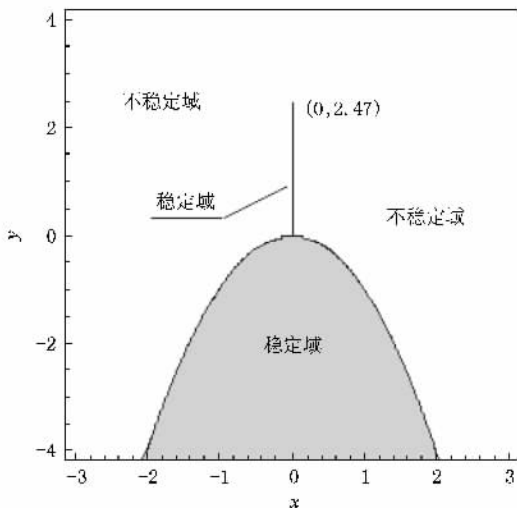


图 5 一端固定一端自由时拉/压-扭杆的稳定域

代入 (17) 式, 并化作无量纲形式

$$\Delta = 4y^2 [x^2 + y \cos^2(\sqrt{y + x^2})] = 0. \quad (33)$$

稳定域见图 5. 当 $m_0 = 0$ 即 $x = 0$ 时给出 Euler 载荷

$y \leq \frac{\pi^2}{4}$. 图 5 表明, 扭和压扭杆都是不稳定的, 只有压以及拉扭杆才可能稳定.

5. 结 论

从 Kirchhoff 方程出发, 讨论在力螺旋作用下细长弹性杆的稳定性. 对于给定的直线平衡特解, 用线性化扰动方程的通解在不同约束下, 积分常数的最

小非零解存在条件判定零解的稳定性. 表明:

- 1) 压扭弹性杆只有在两端铰支、两端固定情况下才有可能稳定的, 且两端固定时的临界载荷大于两端铰支情形.
- 2) 一端固定而另一端铰支或自由的弹性杆, 在扭或压扭变形时都是不稳定的, 只有在压或拉扭变形时才可能是稳定的. 一端固定一端铰支时弹性杆的临界载荷大于一端固定一端自由情形.
- 3) 不论两端是何种约束, 拉力对稳定性总是有利的, 它可以提高扭矩的临界值; 反之, 压力对稳定性是不利的.

- [1] Liu Y Z 2006 *Nonlinear Mechanics of Thin Elastic Rod-Theoretical Basis of Mechanical model of DNA* (Beijing : Tsinghua University Press & Springer) p15 (in Chinese) [刘延柱 2006 弹性细杆的非线性力学——DNA 力学模型的理论基础 (北京 : 清华大学出版社 & Springer) 第 15 页]
- [2] Greenhill A G 1883 *Proc. Inst. Mech. Engrs. London* 182
- [3] Wu J K , Huang Y G 1987 *Acta Mechanica Sinica* **19** 445 (in Chinese) [武际可、黄永刚 1987 力学学报 **19** 445]
- [4] Wu J K , Su X Y 1994 *Stability of Elastic Systems* (Beijing : Science Press) p103 (in Chinese) [武际可、苏先榭 1994 弹性系统的稳定性 (北京 : 科学出版社) 第 103 页]
- [5] Tobias I , Swigon D , Coleman B D 2000 *Phys. Rev. E* **61** 747
- [6] Coleman B D , Swigon D , Tobias I 2000 *Phys. Rev. E* **61** 759
- [7] Hoffman K A 2004 *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A* **362** 1301
- [8] Liu Y Z , Zu J W 2004 *Acta Mechanica* **167** 29
- [9] Xue Y , Chen L Q , Liu Y Z 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 4029 (in Chinese) [薛 纭、陈立群、刘延柱 2004 物理学报 **53** 4029]
- [10] Liu Y Z 2003 *Mechanics in Engineering* **25** 1 (in Chinese) [刘延柱 2003 力学与实践 **25** 1]
- [11] Xue Y 2004 *Mechanics in Engineering* **26** 71 (in Chinese) [薛 纭 2004 力学与实践 **26** 71]
- [12] Xue Y , Chen L Q 2008 *Journal of Dynamics and Control* **6** 198 (in Chinese) [薛 纭、陈立群 2008 动力学与控制学报 **6** 198]
- [13] Liu Y Z , Xue Y , Chen L Q 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 2424 (in Chinese) [刘延柱、薛 纭、陈立群 2004 物理学报 **53** 2424]
- [14] Liu Y Z , Sheng L W 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 2305 (in Chinese) [刘延柱、盛立伟 2007 物理学报 **56** 2305]
- [15] Liu Y Z , Xue Y 2005 *Mechanics in Engineering* **27** 64 (in Chinese) [刘延柱、薛 纭 2005 力学与实践 **27** 64]
- [16] Liu Y Z 2005 *Acta Mechanica Sinica* **26** 256 (in Chinese) [刘延柱 2005 固体力学学报 **26** 256]
- [17] Xue Y , Liu Y Z , Chen L Q 2004 *Chin. Phys.* **13** 794
- [18] Xue Y , Chen L Q , Liu Y Z 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 2040 (in Chinese) [薛 纭、陈立群、刘延柱 2004 物理学报 **53** 2040]
- [19] Xue Y , Liu Y Z , Chen L Q 2005 *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics* **37** 485 (in Chinese) [薛 纭、刘延柱、陈立群 2005 力学学报 **37** 485]
- [20] Xue Y , Liu Y Z 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3845 (in Chinese) [薛 纭、刘延柱 2006 物理学报 **55** 3845]
- [21] Micklos D A , Frever G A (Translated by Chen Y Q , Xie J P , et al) 2003 *DNA Science : A First Course* (2nd ed) (New York : Cold Spring Harbor Laboratory Press) (in Chinese) [米克勒斯 D. A. , 费里尔 G. A. , 克罗蒂 D. A. (陈永青、谢建平译) 2005 DNA 科学导论 (北京 : 科学出版社)]
- [22] Li X D 2008 *Large Flexible Space Truss Structure : Dynamic Analyses and Vibration Fuzzy Control* (Beijing : Science Press) p12 (in Chinese) [李旭东 2008 大型挠性空间桁架结构动力学分析与模糊振动控制 (北京 : 科学出版社) 第 12 页]
- [23] Tan M L , Wang X W , Gan L F 2006 *Chinese Journal of Computational Physics* **23** 447 (in Chinese) [谈梅兰、王鑫伟、甘立飞 2006 计算物理 **23** 447]
- [24] Liu Y Z 2001 *Advanced Dynamics* (Beijing : Higher Education Press) p96 (in Chinese) [刘延柱 2001 高等动力学 (北京 : 高等教育出版社) 第 96 页]

Stability of a straight Kirchhoff elastic rod under the force screws^{*}

Xue Yun^{1)†} Liu Yan-Zhu²⁾

1) *School of Mechanical and Automation Engineering , Shanghai Institute of Technology , Shanghai 200235 , China*)

2) *Department of Engineering Mechanics , Shanghai Jiao Tong University , Shanghai 200030 , China*)

(Received 16 September 2008 ; revised manuscript received 25 October 2008)

Abstract

Stability of a straight Kirchhoff elastic rod with circular cross section acted by a pair of force screws is studied. Cartesian coordinate and Cardan angle are used to express the position and attitude of a cross section of the rod. Special solution which is a straight equilibrium state of the rod is derived from Kirchhoff equation of the rod, and the linear perturbation equation on this special solution is further solved. The stability of the solution for the straight equilibrium state of the rod is discussed according to the existence of non-zero solution of integration constants at various kinds of boundary conditions of the rod, such as that with two joints ends, two fixed ends, a fixed end and a free end, or a joint end and a fixed end. The critical loads are deduced and the stable ranges are plotted. Greenhill formula is extended to other cases, and Euler formula for compression rod becomes its special case.

Keywords : Kirchhoff elastic rod, stability, force crew, Greenhill formula

PACC : 0320, 0340D

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10472067).

[†] E-mail : xy@sit.edu.cn