

# 有限深密度分层流体中运动物体生成内波的一种等效质量源方法<sup>\*</sup>

尤云祥<sup>1)†</sup> 赵先奇<sup>2)</sup> 陈科<sup>1)</sup> 魏岗<sup>2)</sup>

1) 上海交通大学海洋工程国家重点实验室, 上海 200240)

2) 解放军理工大学理学院, 南京 211101)

(2008 年 7 月 22 日收到, 2008 年 12 月 14 日收到修改稿)

采用一种等效移动质量源来模拟有限深密度分层流体中运动物体生成内波的体积效应和旋涡、湍流尾迹激发源, 结合内波本征值问题及 Fourier 变换等方法, 建立了计算运动物体生成内波垂向位移场的一种理论模型, 提出了确定移动质量源速度、回转直径及长度的具体方法. 利用该理论模型, 对一类典型密度分层流体中运动球生成内波的波系与波形结构, 以及波高特征等进行了数值模拟与分析, 结果与 Robey 实验结果符合良好, 表明了所建立理论模型的合理与有效性.

关键词: 分层流体, 内波, 等效质量源

PACC: 0340G, 9260D

## 1. 引言

海洋内波是最大振幅发生在海洋内部的一种波动. 在海洋中, 产生内波的先决条件是海水密度的垂向层结, 其次还需要在海洋中存在合适的扰动源. 海洋中普遍存在的层结现象是由海水的温度和盐度差异引起的, 在海洋一定深度上存在着温跃层和盐跃层, 并导致密跃层的出现. 因此, 海水密度的垂向层结是海洋中的一种普遍现象. 除了风生表面压力场的移动和天体引力潮等扰动因素会激发内波外, 在海洋中航行的潜艇也会产生内波.

在密度垂向层结的海洋中, 由于其密度差远小于大气和海水的密度差, 因此相当于将密度分层介质置于微重力场中, 其约化重力加速度通常只有重力加速度的千分之几, 因此海水内部流体质点的垂向恢复力很小, 从而即使很小的扰动也可能产生振幅很大的海洋内波. 海洋内波的频率介于惯性频率与浮力频率之间. 在实际海洋中, 浮力频率的典型值约为  $10^{-2}$  rad/s 量级, 因此海洋内波的频率很低, 长度尺度范围通常很宽, 持续时间很长<sup>[1-4]</sup>.

当潜艇在密度分层海洋中航行时, 它产生的内

波会引起水面辐聚辐散的流动变化<sup>[5]</sup>. 这种辐聚辐散流动变化信号特征很容易成为机载或星载 SAR (合成孔径雷达) 追踪的目标<sup>[6]</sup>, 从而暴露潜艇的航行踪迹. 因此, 对密度分层流体中水下运动物体生成内波特性问题的研究, 在潜艇遥感反潜领域将有重要的军事应用价值.

从内波激发源的角度, 可以将密度分层流体中运动物体生成的内波分为如下三类: 1) 运动物体表面的流动分离与背景密度分层流体相互作用产生的内波, 称为背风内波 (Lee internal waves); 2) 物体尾部的涡泄或湍流尾迹与背景密度分层流体相互作用产生的内波, 称为尾迹内波 (wake internal waves); 3) 物体尾部的湍流尾迹或混合区在背景密度分层流体作用下引起的重力塌陷产生的内波, 称为塌陷内波 (collapse internal waves). 对第一种情况的内波, 也称为 Kelvin 型内尾迹, 对其他两种情况的内波, 则统称为非 Kelvin 型内尾迹<sup>[7-13]</sup>.

当一个点源在均质无限深水域中作匀速直线运动时, 会产生半张角为  $19^{\circ}28'$  的 V 形表面波, 这就是著名的经典 Kelvin 表面波<sup>[14]</sup>. 经典 Kelvin 表面波与 Kelvin 型内尾迹的共同属性是: 它们相对于物体的运动都是定常, 主要区别是: 前者只有一种模态, 张

<sup>\*</sup> 国家自然科学基金(批准号: 10672102)资助的课题.

<sup>†</sup> E-mail: youyx@sjtu.edu.cn

角与物体运动速度无关,而后者存在多种模态,张角不仅与物体运动速度有关,而且还与流体密度分层属性有关<sup>[15]</sup>.

对 Kelvin 型内尾迹,在理论处理上,目前主要有三类方法.第一类为基于源汇或偶极子的方法,主要有射线理论、驻相法及远场渐近法等<sup>[16-22]</sup>.由于单纯的源汇或偶极子不能真实地反映出物体的体积效应,因此很难获得内波波高分布的定量信息,只能获得内波波系及波形结构的定性信息.第二类方法为直接基于固体运动物体兴波理论的方法,主要有解析方法、基于细长体理论的源汇分布法和边界元方法等<sup>[23-25]</sup>.这类方法除了可以获得内波波系及波形结构的定性信息外,还可以获得内波波高分布及其流场的定量结果,但迄今还只能处理球形、细长体等一些简单形状的运动物体.第三类方法是基于源汇或偶极子组合的方法,也称为等效源方法.这类方法的基本思想是:将一些源汇或偶极子进行组合,使之成为一个体源,用来模拟运动物体内波的体积效应,这样不仅能够解决内波波系及波形结构定性分析的问题,同时还可以获得内波波高分布及其流场的定量结果.与第二类方法相比,这类方法不仅数值处理简单,而且物理概念清晰.

用一个两端开口的水平圆柱体来模拟运动物体内波的体积效应,通过在圆柱体中心轴上分布源汇的方法,结合 Fourier 变换及内波色散关系, Milder<sup>[26]</sup>建立了估算任意密度分层流体中运动物体生成内波垂向位移场的一个理论模型. Robey<sup>[27]</sup>利用这个模型进行了数值分析,给出了确定柱形源对称轴长度及直径的方法,并与实验获得的内波波形及波高结果进行了比较,结果符合良好.

在非 Kelvin 型内尾迹的实验方面,目前已有很多文献报道<sup>[7-13]</sup>,这些实验主要是针对拖曳球进行的.定义内 Froude 数  $Fr = \frac{U_1}{ND}$  ( $U_1$  是球的拖曳速度,  $D$  是球的直径,  $N$  是密度分层流体的浮力频率).那么,实验研究表明:当  $Fr < 2$  时,拖曳球产生的内波相对于球体的运动是定常的,这时 Kelvin 型内尾迹占主导地位;当  $Fr > 2$  时,拖曳球产生的内波相对于球体的运动是非定常的,这时非 Kelvin 型内尾迹占主导地位.

在非 Kelvin 型内尾迹的理论和数值研究方面,目前的文献报道还很少.导致这种现状的主要原因是:采用直接 CFD(计算流体力学)数值模拟的方法,来研究运动物体在密度分层流体中各种非 Kelvin 型

内尾迹的生成演化问题,在目前依然是不现实的.另一方面,各种非 Kelvin 型内尾迹的生成激发源极为复杂,不仅有周期性涡泄、湍流的随机脉动问题,而且还有各种不稳定结构、内波破碎及混合与塌陷等问题.

采用某种合适组合的源汇或偶极子来模拟旋涡、湍流激发源,已有一些学者对非 Kelvin 型内尾迹问题进行了探索性研究.针对密度分层流体中运动物体尾部周期性涡泄生成内波的问题, Dupont 等<sup>[28]</sup>提出了一种移动振荡球形源的模型,并与实验结果进行了比较,在内波波系及波形方面,两者符合良好.针对运动物体尾部混合区塌陷生成内波的问题, Milder<sup>[26]</sup>提出了一种塌陷模型, Robey<sup>[27]</sup>利用这个模型进行了数值分析,并与实验进行了比较分析,在内波波高分布方面,两者符合良好,但在内波波形方面,仍有较大差异.

本文采用一种等效质量源方法,重点研究有限深任意密度分层流体中运动物体生成的 Kelvin 型内尾迹问题,同时尝试对非 Kelvin 型内尾迹问题进行探索性研究与分析.

## 2. 问题描述

考虑一个匀速运动物体在密度分层流体中的内波生成问题.由上一节的分析可知,密度分层流体中运动物体生成内波的激发源来自于物体运动产生的尾部流场,包括运动物体排水体积变化、旋涡与湍流,以及混合区塌陷等.因此,如果能够采用某种方式来模拟内波的这些激发源,并且能够建立起这些激发源的相关物理属性与固体物体的运动参数、几何参数,以及流体密度的分层参数之间的相关关系,那么就可以直接从内波激发源的角度,来研究固体运动物体产生内波的特性问题.基于这种思路,本文将用一个等效的移动质量源取代固体运动物体,把固体运动物体生成内波的问题转化为一个等效的移动质量源的内波生成问题.

假设流体是无黏不可压缩的,厚度为  $H$ ,物体运动产生的内波是小振幅的.记  $\rho_0(z)$  为未扰状态时流体密度的垂向分布,  $N = \sqrt{\frac{\rho'_0 g}{\rho_0}}$  为浮力频率,  $g$  为重力加速度,移动质量源的质量流率为  $\rho_0 Q(x, t)$ .其中,笛卡尔坐标系的  $z$  轴垂直向下为正,  $oxy$  平面位于未扰静水面上,  $x = (x, y, z)$ ,  $t$

为时间.

记移动质量源产生的扰动速度、密度及压力场分别为  $\mathbf{u} = (u_x, u_y, w)$ ,  $\rho$  和  $p$  满足如下线性化控制方程

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla p = \mathbf{F} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho'_0 w = 0, \nabla \cdot \mathbf{u} = Q(\mathbf{x}, t), \quad (1)$$

其中  $\mathbf{F} = (0, 0, \rho_0 g)$ ,  $\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$  为散度算子.

在控制方程(1)中, 消去扰动压力  $p$ 、密度  $\rho$  及水平速度分量  $(u_x, u_y)$ , 可得垂向速度  $w$  满足的控制方程为

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[ \frac{\partial}{\partial z} \left( \rho_0 \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \rho_0 \Delta_h w \right] + \rho_0 N^2 \Delta_h w = \frac{\partial^3}{\partial t^2 \partial z} (\rho_0 Q), \quad (2)$$

其中  $\Delta_h = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$  为水平 Laplace 算子.

在 Boussinesq 近似下, 方程(2)可以简化为

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \Delta_h w \right] + N^2 \Delta_h w = \frac{\partial^3 Q}{\partial t^2 \partial z}. \quad (3)$$

所谓 Boussinesq 近似, 即密度的变化只在运动方程的浮力项中予以考虑的一种近似. 当流体的密度梯度变化较小时, 这种近似是合理的.

对水下移动质量源的内波生成问题, 由于它引起的水面位移很小, 可以将水面视作一个刚性平面. 在这种“刚盖假设”下, 垂向速度  $w$  还需要满足如下初始条件及底部与水面边界条件:

$$w = 0 \quad (t = 0), \quad w = 0 \quad (z = 0, H). \quad (4)$$

设移动质量源为一个移动速度为  $U$  的细长回转体, 对称轴中点的运动轨迹为  $\mathbf{y}(t) = (Ut, 0, z_0)$ , 即移动质量源的对称轴中点位于水面下  $z = z_0$  处, 且移动方向与  $x$  轴的正向相同. 记  $r = f(\xi)$  为细长回转体的表面方程,  $2a$  为细长回转体对称轴长度, 那么  $Q$  可以表示为

$$Q = \left[ U \int_{-a}^a q(\xi) \delta(\bar{x} - \xi) d\xi \right] \delta(y) \delta(z - z_0), \quad (5)$$

其中  $\bar{x} = x - Ut$ ,  $q = -\pi \frac{dS(\xi)}{d\xi}$ ,  $S(\xi)$  为细长回转体在  $x = Ut + \xi$  处的截面积.

由于移动质量源是一个轴对称体, 当它沿着  $x$  轴方向移动时, 产生的流场也是轴对称的. 另一方面, 在随体坐标系  $(\bar{x}, y, z)$  中, 移动质量源产生的流场是定场的, 因此垂向扰动速度及位移可分别表

示为  $w = u(\bar{x}, y, z)$  和  $\eta = \eta(\bar{x}, y, z)$ , 且  $w = \frac{\partial \eta}{\partial t}$ , 将其代入(3)式, 并由(4)式可得

$$U^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} + \Delta'_h \eta \right] + N^2 \Delta'_h \eta = -U \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial z} \quad (6)$$

$$\eta = 0 \quad (z = 0, H), \quad (7)$$

其中,  $\Delta'_h = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ .

### 3. 内波垂向位移的数值解

记  $\bar{\eta}$  为  $\eta$  关于水平变量  $(\bar{x}, y)$  的二维 Fourier 变换, 移动质量源产生内波的水平波数矢量为  $\mathbf{k}$ , 它的纵向和横向分量分别为  $k_x$  和  $k_y$ ,  $k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$  为  $\mathbf{k}$  的幅值, 那么由(6)和(7)式可得

$$\frac{\partial^2 \bar{\eta}}{\partial z^2} + k^2 \left( \frac{N^2}{\omega^2} - 1 \right) \bar{\eta} = Q^* \frac{\partial \delta(z - z_0)}{\partial z}, \quad (8)$$

$$\bar{\eta} = 0 \quad (z = 0, H), \quad (9)$$

其中  $Q^*$  为

$$Q^*(\omega) = -\frac{iU}{\omega} \int_{-a}^a q(\xi) e^{\frac{i\omega \xi}{U}} d\xi. \quad (10)$$

在(8)式中,  $\omega = k_x U$  为移动质量源产生内波的频率. 因此, 在利用 Fourier 变换求解定解问题(6), (7)时, 要求移动质量源速度取为内波速度. 下面首先讨论移动质量源产生内波的色散关系及其等相线族问题.

定解问题(8)和(9)对应的本征值问题为

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + k^2 \left( \frac{N^2}{\omega^2} - 1 \right) \phi = 0, \quad (11)$$

$$\phi = 0 \quad (z = 0, H). \quad (12)$$

将水平波数的幅值  $k$  作为参数, 通过求解本征值问题(11)和(12), 即可得到移动质量源产生内波的色散关系  $\omega = \omega(k)$ , 它是  $k$  的单调递增函数. 对给定的  $k$ , 本征值问题(11)和(12)有无数个离散的本征值  $\omega_m$  和本征函数  $\phi_m$  ( $m = 1, 2, 3, \dots$ ), 每一离散值对应一个内波模式.

本征函数系  $\{\phi_m\}_{m=1}^{+\infty}$  在  $[0, H]$  上是一个完备正交系, 即

$$\int_0^H N^2(z) \phi_m(z) \phi_n(z) dz = \delta_{mn} \quad (m, n = 1, 2, 3, \dots), \quad (13)$$

其中本征函数  $\phi_m$  已被归一化.

在求得本征值  $\omega_m(k)$  后, 内波相速度  $c_{pm}$  与群速度  $c_{gm}$  可以分别表示为

$$c_{pm} = \frac{\omega_m(k)}{k}, c_{gm} = \frac{d\omega_m(k)}{dk}. \quad (14)$$

设  $\varphi$  为移动质量源产生内波的相位函数,根据驻相原理,内波波动的主要贡献来自使  $\frac{\partial \varphi}{\partial k} = 0$  的点.在由(14)式求得  $c_{pm}$  和  $c_{gm}$  后,第  $m$  个模态内波的驻相点可表示为<sup>[17]</sup>

$$\begin{aligned} x &= \varphi \frac{U(1 - c_{pm}c_{gm}/U^2)}{k(c_{pm} - c_{gm})}, \\ y &= \varphi \frac{c_{gm}\sqrt{(1 - c_{pm}^2/U^2)}}{k(c_{pm} - c_{gm})}. \end{aligned} \quad (15)$$

上式即定义了  $\varphi$  取常数时的内波等相线.其中  $\varphi$  间隔为  $2\pi$  变化,即  $\varphi = 2\pi, 4\pi, 6\pi, \dots$ .为了获得内波等相线族,将(15)式看作为驻相点  $(x, y)$  关于  $k$  的参数方程,即可得到内波波动等相线族的空间形态.

可以证明,相速度  $c_{pm}$  与群速度  $c_{gm}$  都是  $k$  的单调递减函数.记  $c_{p0m}$  为相速度  $c_{pm}$  在  $k \rightarrow 0$  时的极限值,称为临界相速度.那么,当  $U > c_{p0m}$  时,对任意  $k > 0$  (15)式都是有意义的,此时该模态的内波只有散波.当  $U < c_{p0m}$  时,记  $k_{\min} = \min\{k \mid U \geq c_{pm}(k), k > 0\}$ ,则只有当  $k > k_{\min}$  时(15)式才是有意义的,此时该模态的内波既有横波又有散波.

由上述分析可得,当  $U < c_{p0m}$  时,第  $m$  个模态内波的最小波数是  $k = k_{\min}$ ,相应模态内波波形的张角为  $\theta_m = \sin^{-1}(c_{pm}(k_{\min})/U)$ .当  $U > c_{p0m}$  时,第  $m$  个模态内波的最小波数是  $k = 0$ ,相应模态内波波形的张角为  $\theta_m = \sin^{-1}(c_{p0m}/U)$ .

通过求解本征值问题(11)和(12),结合驻相原理,由(15)式即可得到每个模态内波的波系及波形结构,但不能获得内波波高分布等定量信息.因此,还要求解内波的垂向位移场.

为此,定义 Green 函数  $G(z, z')$  如下:

$$\frac{\partial^2 G}{\partial z^2} + k^2 \left( \frac{N^2}{\omega^2} - 1 \right) G = \delta(z - z'), \quad (16)$$

$$G = 0 \quad (z = 0, H), \quad (17)$$

由(11)式可知

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \left( \frac{N^2}{\omega^2} - 1 \right) \right] \phi_m &= 0 \\ (m = 1, 2, 3, \dots). \end{aligned} \quad (18)$$

由此可得

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \left( \frac{N^2}{\omega^2} - 1 \right) \right] \phi_m = k^2 N^2 \left( \frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{\omega_m^2} \right) \phi_m. \quad (19)$$

由本征函数系  $\{\phi_m\}_{m=1}^{+\infty}$  在  $[0, H]$  上的完备正交性可得

$$\delta(z - z') = \sum_{m=1}^{+\infty} N^2(z) \phi_m(z) \phi_m(z'). \quad (20)$$

由(16)(19)和(20)式可得

$$G(z, z') = -\frac{1}{k^2} \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{\omega^2 \omega_m^2}{\omega^2 - \omega_m^2} \phi_m(z) \phi_m(z'). \quad (21)$$

由(8)(16)和(21)式可知

$$\bar{\eta}(k_x, k_y, z) = \frac{1}{k^2} \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{Q^* \omega^2 \omega_m^2}{\omega^2 - \omega_m^2} \phi_m(z) \phi'_m(z_0). \quad (22)$$

在上式中,先对纵向分量  $k_x$  求 Fourier 逆变换,并利用留数定理,可得

$$\begin{aligned} \tilde{\eta}(\bar{x}, k_y, z) &= \frac{i}{2U} \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{Q^*(\omega_m) c_{pm}^3 k}{1 - \frac{c_{pm} c_{gm}}{U^2}} \phi_m(z) \\ &\quad \times \phi'_m(z_0) e^{-\frac{i\omega_m \bar{x}}{U}}. \end{aligned} \quad (23)$$

利用关系式  $k_y = \sqrt{k^2 - \left(\frac{\omega_m}{U}\right)^2}$ ,先把(23)式中的被积函数变为  $k_y$  的函数,然后再利用快速 Fourier 逆变换进行计算,即可得到移动质量源产生内波的垂向位移  $\eta$ .

设移动质量源为一个长轴为  $2b$ ,短轴为  $2a$  的回转椭球体.那么,它在  $x = Ut + \xi$  处的截面积可表示为

$$S(\xi) = \begin{cases} \pi b^2 \left(1 - \frac{\xi^2}{a^2}\right) & (|\xi| \leq a), \\ 0 & (|\xi| > a). \end{cases} \quad (24)$$

由(10)(23)和(24)式可得

$$\begin{aligned} \tilde{\eta}(\bar{x}, k_y, z) &= \frac{2\pi b^2 a i}{U} \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{\frac{\sin(\omega_m a/U)}{(\omega_m a/U)} - \cos(\omega_m a/U)}{(\omega_m a/U)^2} \\ &\quad \times \frac{c_{pm}^3 k}{1 - c_{pm} c_{gm}/U^2} \phi_m(z) \phi'_m(z_0) e^{-\frac{i\omega_m \bar{x}}{U}}. \end{aligned} \quad (25)$$

如果移动质量源取为一个长为  $2b$ ,回转直径为  $2a$  的圆柱体,并且  $Q$  取为

$$Q = \left[ U \int_{-a}^a A(\xi) \delta(\bar{x} - \xi) d\xi \right] \delta(y) \delta(z - z_0), \quad (26)$$

其中

$$A(\xi) = \begin{cases} \pi b^2 & (|\xi| \leq a), \\ 0 & (|\xi| > a), \end{cases} \quad (27)$$

那么由(16)(26)和(27)式可得

$$\begin{aligned} \tilde{\eta}(\bar{x}, k_y, z) &= \frac{\pi b^2 a i}{U} \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{\sin(\omega_m a/U)}{(\omega_m a/U)} \\ &\times \frac{c_{pm}^3 k}{1 - \frac{c_{pm} c_{gm}}{U^2}} \phi_m(z) \phi'_m(z_0) e^{-i\omega_m \bar{x}/U}. \end{aligned} \quad (28)$$

上式即为 Milder<sup>[26]</sup>采用圆柱形源获得的运动物体产生内波垂向位移场的估算模型。

从移动质量源的几何属性看,两个源是有本质差异的,椭球回转体是一个封闭几何体,而圆柱形体是一个两端不封闭的几何体.另一方面,由(25)和(28)式可知,当采用回转型几何体来表示移动质量源时,所获得的内波垂向位移与回转半径的平方是成正比的,但与回转体对称轴长度之间存在着强非线性依赖关系。

如果  $\frac{\omega_m a}{U}$  是一个小量,那么经过简单的极限运算可得

$$\begin{aligned} \lim_{\omega_m a/U \rightarrow 0} \frac{\sin(\omega_m a/U)}{(\omega_m a/U)} &= 1, \\ \lim_{\omega_m a/U \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin(\omega_m a/U)}{(\omega_m a/U)} - \cos(\omega_m a/U)}{(\omega_m a/U)^2} &= \frac{1}{3}. \end{aligned} \quad (29)$$

由此可得,运动物体产生内波的垂向位移可以近似为

$$\begin{aligned} \tilde{\eta}(\bar{x}, k_y, z) &= \frac{iV}{2U} \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{c_{pm}^3 k}{1 - c_{pm} c_{gm}/U^2} \\ &\times \phi_m(z) \phi'_m(z_0) e^{-i\omega_m \bar{x}/U}. \end{aligned} \quad (30)$$

对椭球回转体,  $V = 4\pi b^2 a/3$ ,对圆柱形回转体,  $V = 2\pi b^2 a$ ,因此  $V$  正好就是移动质量源的体积.由(30)式可知,当  $\omega_m a/U$  是一个小量时,运动物体产生内波的垂向位移与移动质量源的体积正好成正比。

### 4. 数值结果与分析

在文献[27]中,Robey 利用长 5 m,宽 3 m,水深 1 m 的热分层水槽,对一个直径  $D = 0.1$  m 的拖曳球产生的内波进行了实验测量与分析,图 1 为热分层流体浮力频率的测量结果.由图 1 可知,浮力频率的峰值在  $z = 0.53$  m 处,因此拖曳球引起的内波在该峰值所在水平面位置将是最强的.为此,Robey 将拖曳球中心置于  $z = 0.613$  m 处,采用多通道温度传感器阵,在浮力频率峰值所在水平面位置,对拖曳球引起的温度扰动场进行了测量分析,获得了拖曳球产生内波的速度、波幅、波形及波系等特征。

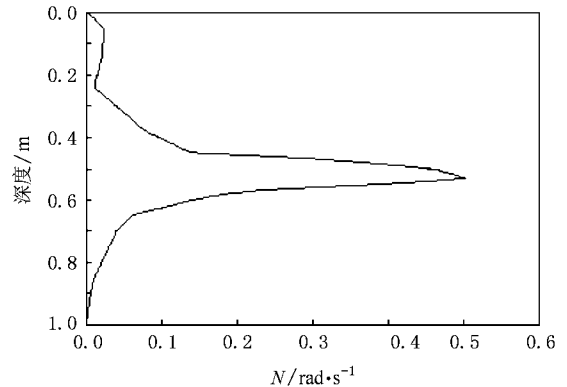


图 1 浮力频率剖面<sup>[27]</sup>

对图 1 所示浮力频率剖面,采用标准有限元方

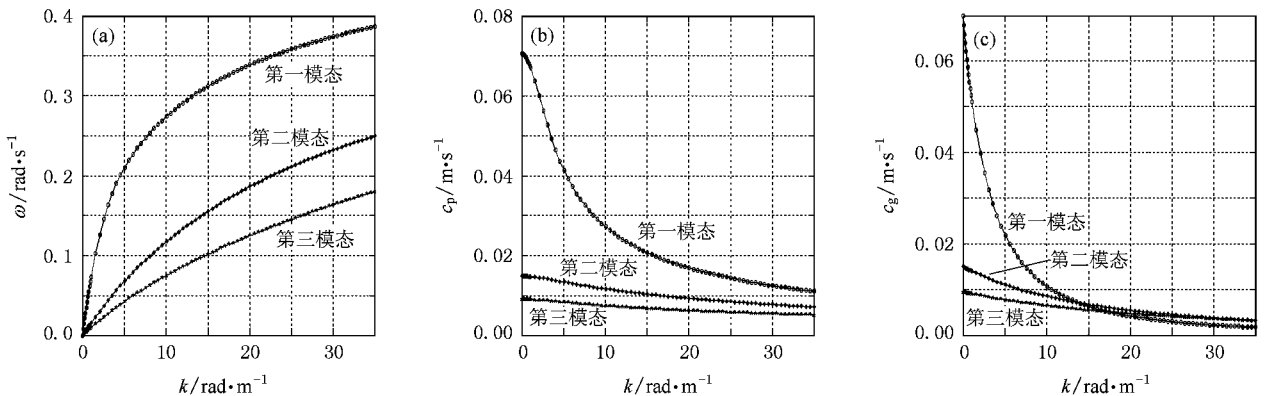


图 2 前三个模式的内波频率、相速度和群速度与波数的关系 (a)色散关系 (b)相速度与波数的关系 (c)群速度与波数的关系

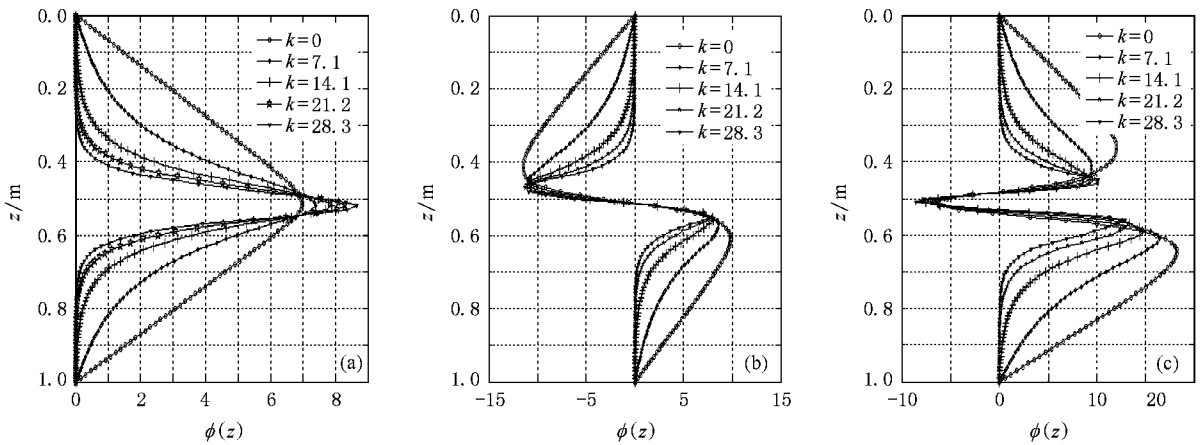


图3 前三个模式的归一化垂向特征函数 (a)第一模式 (b)第二模式 (c)第三模式

法求解本征值问题(11)和(12),可得内波频率、相速度和群速度与波数  $k$  之间的关系曲线,以及相应的本征函数系。结果如图2、3所示。

由图2可知,内波频率是波数  $k$  的单调递增函数,而相速度与群速度都是波数  $k$  的单调递减函数,而且前三个模式的临界相速度分别为 7, 1.5 和 0.94 cm/s。由图3可知,对第  $m$  个模式的垂向本征函数,正好有  $m$  个峰,而且每个模式的垂向本征函数在垂向(沿水面或水底方向)是逐渐衰减的,因此内波在垂向的传播也是逐渐衰减的。

由图3还可以发现,色散关系曲线可以用如下的两参数模型进行近似

$$u(k) = \frac{c_{\mu 0} k}{1 + \frac{c_{\mu 0} k}{N_{\max}}} \quad (31)$$

其中  $c_{\mu 0}$  正好就是相应模式内波的临界相速度,在本文算例中  $N_{\max} = 0.45$  rad/s。

在求得色散关系、相速度和群速度,以及本征函数系后,利用(25)式即可得到在移动质量源产生内波的垂向位移场。但在利用(25)式计算运动物体生成内波的垂向位移场时,首先需要解决的是如何确定移动质量源的速度  $U$ 。由前一节的分析可知,移动质量源的速度就是内波的速度。因此,问题的关键是如何确定由一个运动物体产生的内波速度。

为此,记物体的运动速度为  $U_1$ ,内波的相关速度为  $U_{iw}$ 。Robey 对内波相关速度  $U_{iw}$  与拖曳球速度  $U_1$  之间的相关关系进行了实验研究,结果表明:当

内 Froude 数  $Fr = \frac{U_1}{N_{\max} D} < 2$  时,内波相关速度与拖曳球速度是一致的,内波的运动相对于拖曳球是定

常的,因此移动质量源的速度可取为  $U = U_1$ ,这时内波的激发源就是物体的体积效应,这种内波就是所谓的背风内波。

Robey 的实验结果还可表明:当  $Fr > 2$  时,内波相关速度  $U_{iw}$  与拖曳球速度  $U_1$  是明显不一致的,会发生突然下降的现象,而且近似为一个常数 3.5 cm/s。这表明当  $Fr > 2$  时内波的运动相对于拖曳球是非定常的,这时内波的激发源已不再是物体的体积效应,而是物体尾部的旋涡或湍流尾迹,这种内波称为尾迹内波。因此,当  $Fr > 2$  时,移动质量源的速度可以近似取为  $U = 3.5$  cm/s。

综上所述,当  $Fr < 2$  时,运动物体产生的内波相对于物体是定常的,此时移动质量源的速度应取为物体的运动速度,即  $U = U_1$ 。当  $Fr > 2$  时,运动物体产生的内波相对于物体是非定常的,此时移动质量源的速度应取为内波的相关速度,即  $U = U_{iw}$ ,因此运动物体产生的内波相对于移动质量源是定常的,这与  $\omega = \mu U$  的要求是一致的。

移动质量源的几何特征与运动物体的尾部流场应当是密切相关的。当  $Fr < 2$  时,对拖曳球的实验研究表明<sup>[7]</sup>:  $Fr$  对运动球体尾部流场高度的影响是小的,其垂向尺度近似为物体的垂向尺度,但  $Fr$  对运动球体尾部流场的纵向尺度是有影响的。因此,当  $Fr < 2$  时,对移动质量源的回转直径,可以近似取为球的直径,即  $2b = D$ 。对移动质量源的对称轴长度,采用如下方式进行估算:

$$a = c(2Fr)^n \left(\frac{D}{2}\right) \quad (32)$$

其中  $c$  和  $n$  为常数。

当  $(c, n) = (3, 0)$  时,Robey 利用 Milder<sup>[26]</sup> 的模

型(28)式计算分析了拖曳球产生内波垂向位移的峰-峰值  $\eta_{p-p}$  与  $Fr$  之间的相关关系,并与实验结果进行了比较,结果如图4所示.由图可知,当  $Fr \leq 0.9$  时,计算结果与实验结果符合良好,但当  $0.9 < Fr < 2$  时,计算结果与实验结果相比要小很多,而且随着  $Fr$  的增大,误差迅速增大.

由图4还可以进一步发现,当  $U_1 < 3.5$  cm/s 时,拖曳球产生内波垂向位移的峰-峰值随着拖曳速度的增加而增大,但当  $U_1 > 3.5$  cm/s 时,拖曳球产生内波垂向位移的峰-峰值随着拖曳速度的增加而减小,而且拖曳球产生内波垂向位移的峰-峰值最大时的拖曳速度正好是当  $Fr < 2$  时内波的相关速度.

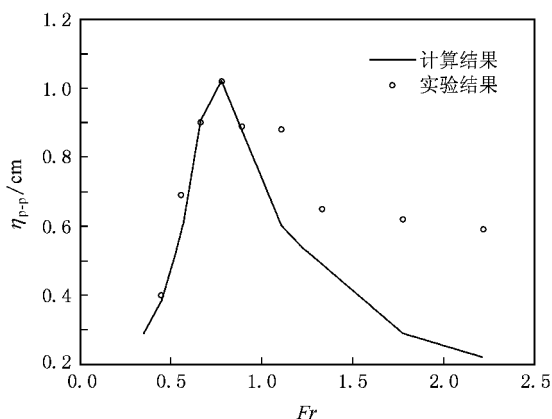


图4 当  $Fr < 2$  和  $(c, n) = (3, 0)$  时,Robey 利用(28)式获得的拖曳球产生内波的垂向位移峰-峰值计算结果及其实验结果图

下面,利用本文提出的椭球回转体模型(25)式,计算分析拖曳球产生内波垂向位移峰-峰值  $\eta_{p-p}$  随  $Fr$  的变化曲线.考虑椭球回转体对称轴长度的三种不同选取方式:第一种是线性函数选取方式,即  $(c, n) = (2, 1)$ ,第二种是三次幂函数选取方式,即  $(c, n) = (1, 3)$ ,第三种是  $1/2$  幂函数选取方式,即  $(c, n) = (2.5, 0.5)$  结果如图5所示.

由图5可知,如果取  $(c, n) = (2, 1)$  利用本文回转体模型的计算结果与 Robey 的实验结果相比,有较大差异,但趋势是一致的,而且计算得到的拖曳球产生内波垂向的位移峰-峰值也在  $U_1 = 3.5$  cm/s 时达到最大.如果取  $(c, n) = (1, 3)$ ,那么当  $U_1 \leq 3.5$  cm/s 时,计算结果与 Robey 的实验结果符合得很好,但当  $U_1 > 3.5$  cm/s 时,计算结果与 Robey 的实验结果有较大差异.如果取  $(c, n) = (2.5, 0.5)$ ,那么当  $U_1 \leq 3.5$  cm/s 时,计算结果与 Robey 的实验结

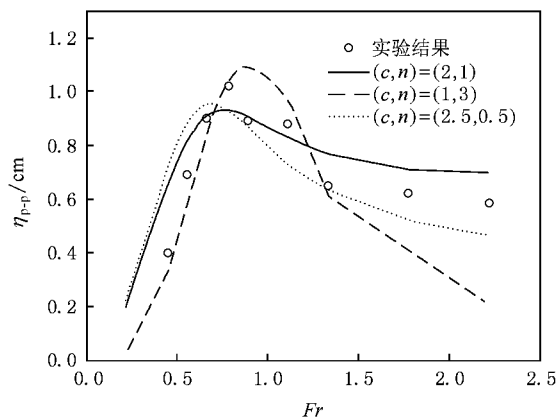


图5 当  $Fr < 2$  时,利用本文椭球回转体模型(25)式获得的拖曳球产生内波的垂向位移峰-峰值计算结果与 Robey 的实验结果比较图

果有较大差异,但当  $U_1 > 3.5$  cm/s 时,与 Robey 利用 Milder<sup>[26]</sup>模型(28)式的计算结果相比,本文的计算结果与 Robey 的实验结果符合得更好.

根据上述结果,可以给出当  $Fr < 2$  时,确定椭球回转体对称轴长度的方法如下:先取  $(c, n) = (2, 1)$  利用(25)式计算内波垂向位移峰-峰值  $\eta_{p-p}$  随  $Fr$  的变化曲线,由此确定  $\eta_{p-p}$  达到最大时相应的运动物体速度,记为  $U_{max}$ .当  $U_1 \leq U_{max}$  时,取  $(c, n) = (1, 3)$ ,可以利用(25)式计算内波垂向位移场,当  $U_1 > U_{max}$  时,取  $(c, n) = (2.5, 0.5)$ ,可以利用(25)式计算内波垂向位移场.其中,  $U_{max}$  即为当  $Fr > 2$  时移动质量源的速度,即  $U = U_{max}$ .

对分层流体中拖曳球的实验已经表明<sup>[7]</sup>:当  $Fr > 2$  时,运动球涡泄的 Strouhal 数为  $St = \frac{fD}{U_1} = 0.2$ ,其中  $f$  为涡泄频率.如果取移动质量源的对称轴长度  $2b = \frac{U_1}{f}$ ,那么  $2b \approx 5D$ .

对移动质量源的回转直径,可以采用湍尾迹增长公式进行估算.在密度分层流体中,运动物体湍尾迹平均直径  $L_\infty$  的增长公式可以表示为<sup>[8]</sup>

$$\frac{L_\infty}{D} = c_1 \left( \frac{x}{D} \right)^{n'}, \quad (33)$$

其中  $c_1$  和  $n'$  为常数,  $x$  为距物体的距离.

湍尾迹中的湍流动能可以用特征湍流脉动速度  $u'$  来估算,其计算公式为

$$u' = \frac{dL_\infty}{dt}. \quad (34)$$

由(33)和(34)式可得

$$\frac{u'}{U_1} = c_2 \left( \frac{x}{D} \right)^{n'-1}. \quad (35)$$

消去(33)和(35)式中的  $x$ , 并取  $b = \frac{L_\infty}{2}$ ,  $u' = U_{\max}$ , 即可得到移动质量源回转半径的估算公式为

$$\frac{b}{D} = c' \left( \frac{U_1}{U_{\max}} \right)^{n'(1-n')}. \quad (36)$$

综上所述, 当  $Fr > 2$  时, 移动质量源对称轴长度可近似取为  $2b \approx 5D$ , 而回转半径可由(36)式估算. 由(25)和(36)式可知, 在移动质量源回转直径及对称轴长度的这种选取方式下, 运动物体产生内波的垂向位移与物体运动速度  $U_1$  的  $2n'(1-n')$  次方成正比. 数值结果表明, 当取  $c' = 0.2$  和  $n' = 1/3$  时, 计算结果与实验结果符合良好, 结果见图 6. 注意到, 当  $n' = 1/3$  时,  $2n'(1-n') = 1$ , 因此, 当  $Fr > 2$  时, 移动质量源产生内波垂向位移与  $Fr$  正好是成线性递增关系.

最后分析移动质量源产生内波的波系分布与波形结构问题. 在图 7, 8 中, 分别给出了当  $U_1 = 2.5$

和 4 cm/s 时, 在浮力频率峰值所在水平面位置处, 由(25)式计算获得的内波垂向位移的灰度图, 同时还给出了内波等相线图, 以及 Robey 的实验结果. 由图可知, 从波系分布与波形结构的角度的, 三者符合得都很好.

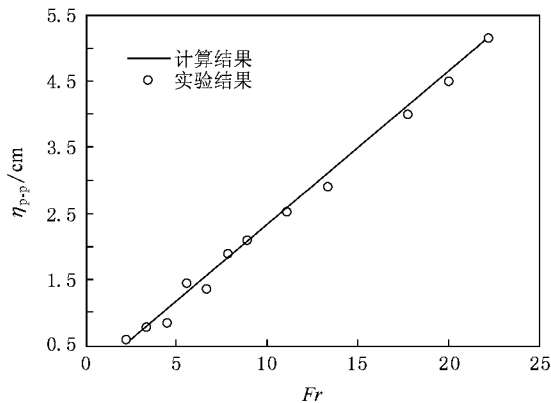


图 6 当  $Fr > 2$  时, 利用本文椭球回转体模型(25)式获得的拖曳球产生内波的垂向位移峰-峰值计算结果与 Robey 的实验结果比较图

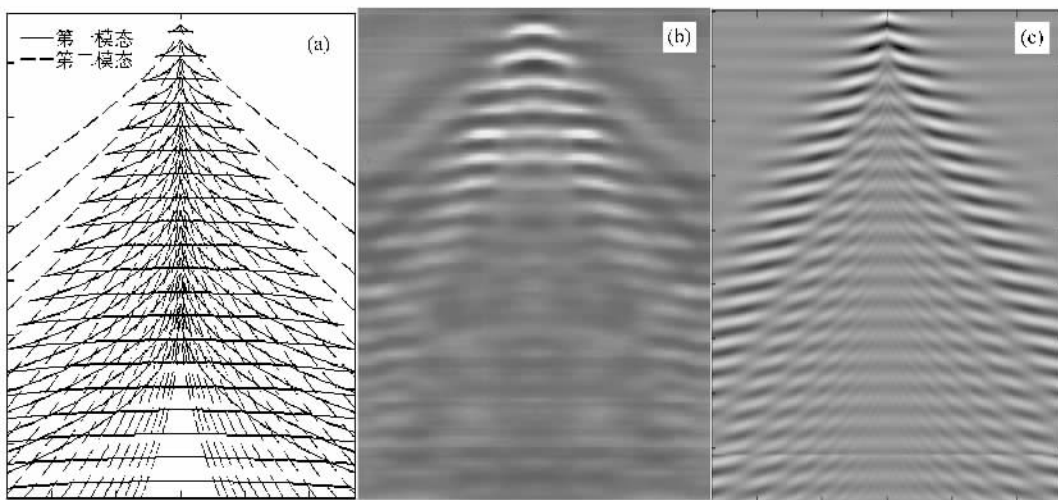


图 7 当拖曳球速度  $U_1 = 2.5$  cm/s 时, 内波等相线图以及在  $z = 53$  cm 平面上内波垂向位移场灰度图 (a) 等相线图 (b) 灰度图 (Robey 的实验结果) (c) 灰度图 (利用(25)式的计算结果)

在上面的计算中,  $Fr < 2$ , 因此移动质量源的速度为  $U = 2.5$  和 4 cm/s. 由于  $U$  小于第一模态内波的临界相速度, 而大于其他模态内波的临界相速度, 因此第一模态内波既有横波又有散波, 但其他模态内波只有散波.

比较图 7 和图 8 可知, 随着拖曳速度的增大, 第一模态内波的张角增大, 但第二模态内波的张角减小. 当  $U_1 = 2.5$  cm/s 时, 在图 7 中不仅第一模态内波的横波与散波是清晰可见的, 而且第二模态的散

波也是显著的, 但其他模态内波的信息很弱, 几乎不可见. 当  $U_1 = 4$  cm/s 时, 在图 8 中, 第一模态内波的横波与散波是显著的, 但第二模态的散波减弱, 已经不是很明显.

在图 9 和图 10 中, 分别给出了当  $U_1 = 15$  和 25 cm/s 时, 在浮力频率峰值所在水平面位置处, 由(25)式计算获得的内波垂向位移的灰度图, 同时还给出了内波等相线图, 以及 Robey 的实验结果.

由于  $Fr > 2$ , 因此移动质量源的速度为  $U =$



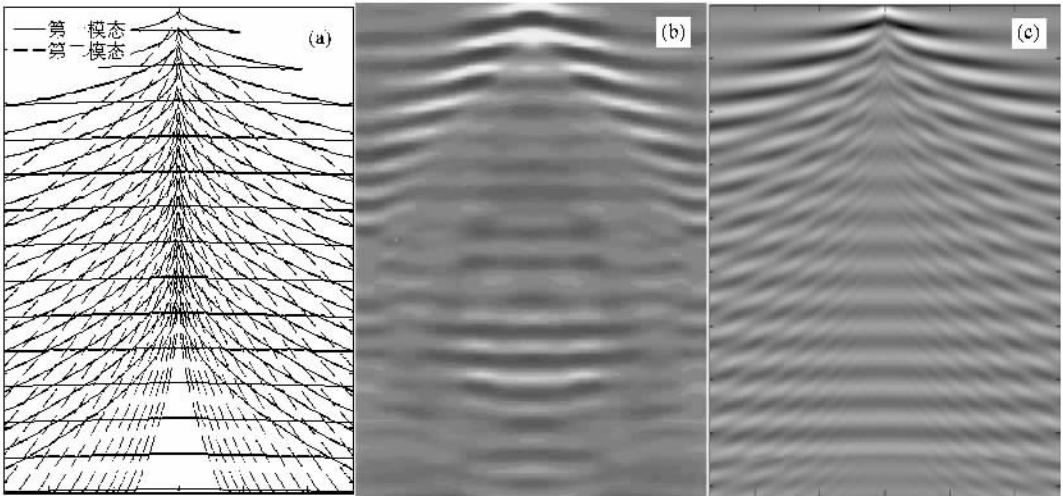


图 8 当拖曳球速度  $U_t = 4 \text{ cm/s}$  时, 内波等相线图以及在  $z = 53 \text{ cm}$  平面上内波垂向位移场灰度图 (a) 等相线图 (b) 灰度图 (Robey 的实验结果) (c) 灰度图 (利用(25)式的计算结果)

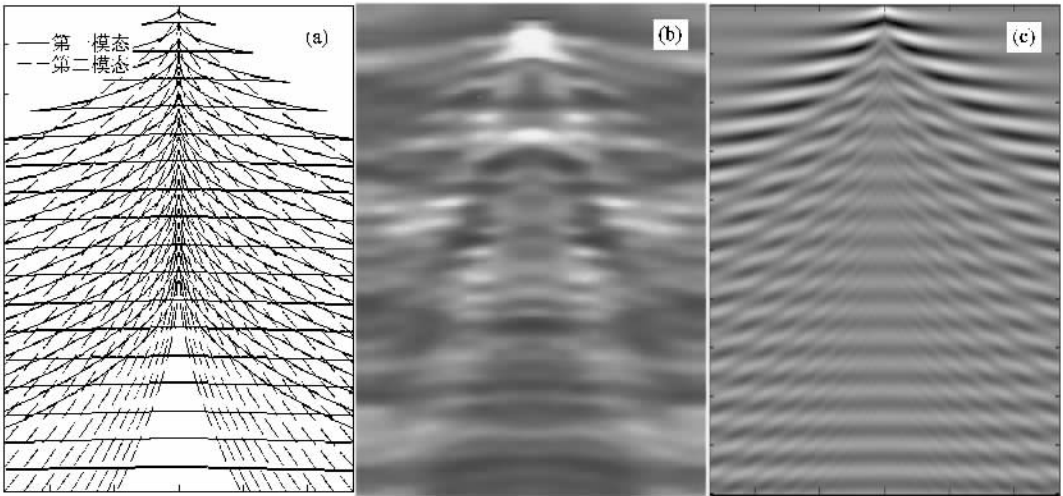


图 9 当拖曳球速度  $U_t = 15 \text{ cm/s}$  时, 内波等相线图以及在  $z = 53 \text{ cm}$  平面上内波垂向位移场灰度图 (a) 等相线图 (b) 灰度图 (Robey 的实验结果) (c) 灰度图 (利用(25)式的计算结果)

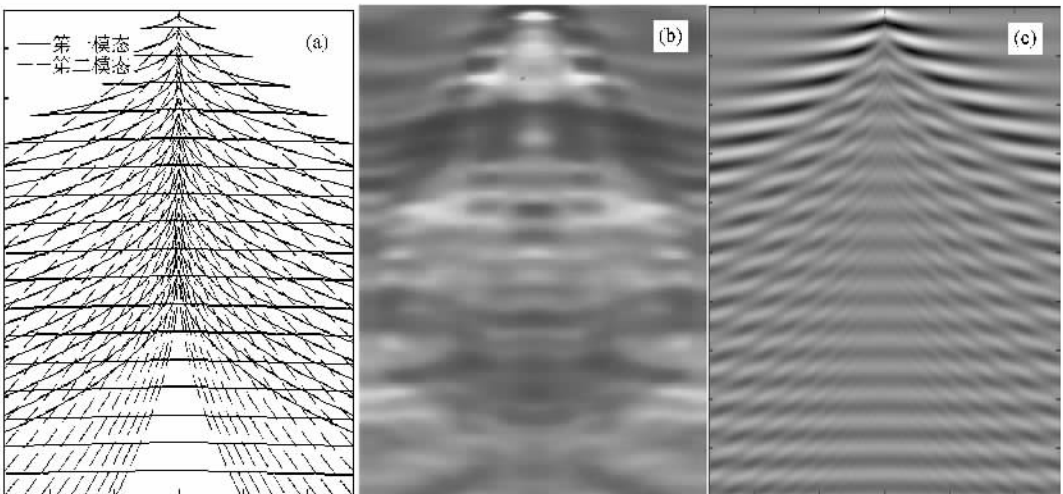


图 10 当拖曳球速度  $U_t = 25 \text{ cm/s}$  时, 内波等相线图以及在  $z = 53 \text{ cm}$  平面上内波垂向位移场灰度图 (a) 等相线图 (b) 灰度图 (Robey 的实验结果) (c) 灰度图 (利用(25)式的计算结果)

3.5 cm/s. 由于  $U$  小于第一模态内波的临界相速度, 而大于其他模态内波的临界相速度, 因此第一模态内波既有横波又有散波, 但其他模态内波只有散波. 由图 9 和图 10 中可知, 第一模态内波的横波与散波是清晰可见的, 但第二模态的散播信息很弱, 几乎不可见. 而在 Robey 的实验结果中, 第一模态内波的横波与散波也是清晰可见的. 因此, 从波系与波形结构的角度, 三者的结果是符合的.

数值模拟与 Robey 的实验结果还都进一步表明: 当  $Fr > 2$  时, 内波的波系及波形结构基本都是一样的. 产生这种现象的主要原因是: 当  $Fr > 2$  时, 内波的相关速度近似为一个常数, 从驻相理论可知, 内波的波系与波形结构主要是与内波的相关速度有关.

从 Robey 的实验结果中, 可以进一步发现: 当  $Fr > 2$  时, 在拖曳球产生内波垂向位移场的灰度图像, 还会出现尾迹塌陷的现象. 但在利用(25)式的计算结果中, 并没有能够反映出这种现象, 这是本文移动质量源模型(25)式的一个主要缺陷. 在后续的研究中, 将进一步改进和完善这个模型, 以期使该模型能够模拟由于密度分层导致的尾迹塌陷等现象.

## 5. 结 论

从内波激发源的视角, 采用在线性化连续性方程中附加一个等效移动质量源的方法, 结合内波垂向位移本征值问题, 利用 Fourier 变换, 建立了计算有限深密度分层流体中运动物体生成内波垂向位移场的一种理论模型.

对有限深密度分层流体中运动球生成内波的问题, 研究表明: 当  $Fr < 2$  时, 运动球生成的内波相对

于球体是定常, 内波的激发源就是球的体积效应, 这种内波称为背风内波, 这时移动质量源的速度即为球的运动速度; 当  $Fr > 2$  时, 运动球生成的内波相对于球体是非定常, 内波的激发源是球体尾部的旋涡和湍流尾迹, 这种内波称为尾迹内波, 这时移动质量源的速度应当取为尾迹内波的移动速度.

针对两种激发源生成内波的情况, 分别提出了计算移动质量源速度、回转直径及对称轴长度的方法, 利用这种估算方法获得的内波波系与波形结构, 以及内波垂向位移峰-峰值的计算结果, 与文献[24]中的实验结果均符合良好.

数值研究还表明: 当  $Fr < 2$  时, 在利用本文理论模型计算获得的内波垂向位移峰-峰值随  $Fr$  的变化曲线中, 在运动球的某个速度处会出现一个峰值, 与这个峰值相应的物体运动速度可以被近似取为当  $Fr < 2$  时移动质量源的速度.

本文提出的估算移动质量源速度、回转直径及对称轴长度的方法, 都是基于已有运动球的实验结果给出的. 实际的潜艇通常是一个细长回转体, 这时如何来确定两种类型内波激发源之间的转捩准则, 并如何来确定移动质量源的移动速度、回转直径及对称轴长度, 将是在后续研究中需要解决的问题之一.

另一方面, 在尾迹生成内波的情况, 由于流体密度的分层效应, 还会出现尾迹塌陷等现象, 甚至还会出现因尾涡周期性振荡产生的周期性振荡内波, 以及因湍流随机脉动产生的随机内波等, 在目前的理论模型中, 还不能反映这些复杂的内波生成问题, 这将是本文理论模型需要进一步改进与完善之处.

关于上述这些问题, 在后续工作中, 将以相关系列实验为基础, 作进一步的探索性研究.

[1] Xu Z T 1999 *Dynamics of Internal Waves in the Ocean* (Beijing: Science Press) [in Chinese] 徐肇廷 1999 海洋内波动力学 (北京: 科学出版社)

[2] Chen X G, Pang J, Song J B 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 4733 (in Chinese) [陈小刚, 庞 晶, 宋金宝 2007 物理学报 **56** 4733]

[3] Chen X G, Song J B, Sun Q 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 5699 (in Chinese) [陈小刚, 宋金宝, 孙 群 2005 物理学报 **54** 5699]

[4] Chen X G, Guo Z P, Song J B 2008 *Chin. Phys. B* **17** 3387

[5] Donato A N, Peregrine D H, Stroker J R 1999 *J. Fluid Mech.* **348** 27

[6] Reed A M, Milgram J H 2002 *Annu Rev. Fluid Mech.* **34** 469

[7] Gilreath H E, Brandt A 1985 *AIAA Journal* **23** 693

[8] Lin J T, Pao Y H 1979 *Annu Rev. Fluid Mech.* **11** 317

[9] Lin Q, Boyer D L, Fernando H J S 1993 *Experiments in Fluid* **15** 147

[10] Chomz J M, Bounneton P, Hopfinger E J 1993 *J. Fluid Mech.* **254** 1

[11] Spedding G R, Browand F K, Fincham A M 1996 *J. Fluid Mech.* **314** 53

[12] Bonnier M, Eiff O 2002 *Physics of Fluid* **14** 791

[13] Wei G, Dai S Q 2006 *Advances in Mechanics* **1** 111 (in Chinese) [魏 岗, 戴世强 2006 力学进展 **1** 111]

- [ 14 ] Chung Y K , Lim J S 1991 *J. Ship Res.* **35** 191  
 [ 15 ] Shaman R D 1983 *J. Atmo. Sci.* **40** 396  
 [ 16 ] Lighthill J 1978 *Waves in Fluid* ( Cambridge : Cambridge University Press )  
 [ 17 ] Keller J B , Munk W H 1970 *Physics of Fluids* **13** 1425  
 [ 18 ] Miles J W 1971 *Geo. Fluid Dyn.* **2** 63  
 [ 19 ] Gray E P 1983 *Phys. Fluids* **26** 2919  
 [ 20 ] Voisin B 1994 *J. Fluid Mech.* **261** 333  
 [ 21 ] Yeung R W , Nguyen T C 1990 *J. Engi. Math.* **35** 85  
 [ 22 ] Broutman D , Rottman J , Eckermann S D 2004 *Annu Rev. Fluids Mech.* **34** 559  
 [ 23 ] Mowbray D E , Rarity B S H 1967 *J. Fluid Mech.* **30** 489  
 [ 24 ] Brovikov V A , Bulatov V V , Vladimirov V V 1995 *Fluid Dynamics Research* **15** 325  
 [ 25 ] Zhu W , You Y X , Miao G P 2005 *J. Hydrodynamics Ser. B* **17** 92  
 [ 26 ] Milder M 1974 *National Technical Information Service Document No. Ad 782-262*  
 [ 27 ] Robey H F 1997 *Phys. Fluids* **9** 3353  
 [ 28 ] Dupont P , Voisin B 1996 *Dynamics Atmo. Ocean* **23** 289

## An equivalent mass source method for internal waves generated by a body moving in a stratified fluid of finite depth<sup>\*</sup>

You Yun-Xiang<sup>1)†</sup> Zhao Xian-Qi<sup>2)</sup> Chen Ke<sup>1)</sup> Wei Gang<sup>2)</sup>

<sup>1)</sup> *State Key Laboratory of Ocean Engineering , Shanghai Jiao Tong University , Shanghai 200240 , China )*

<sup>2)</sup> *Institute of Science , PLA University of Science and Technology , Nanjing 211101 , China )*

( Received 22 July 2008 ; revised manuscript received 14 December 2008 )

### Abstract

An equivalent mass source is modeled as excited sources of internal waves generated by the displacement of fluid and the wake of vortex shedding or turbulence due to the body moving in a stratified fluid , a mathematical model for the vertical displacement of internal waves generated by such an equivalent mass source is presented by use of both the associated eigenvalue problem and the Fourier transform method , and the method for estimating the speed , length and diameter of the equivalent mass source is proposed. Calculations based on the proposed method are performed for the generation of internal waves by a towed sphere in a stratified fluid , and the numerical results are in good agreement with the available experimental results of Robey in the kinematic wave patterns and the maximum peak-to-peak amplitude of the internal waves. Such a method may have potentially important applications.

**Keywords :** stratified fluid , internal wave , equivalent mass source

**PACC :** 0340G , 9260D

<sup>\*</sup> Project supported by the National Natural Science Foundation of China ( Grant No. 10672102 ).

<sup>†</sup> E-mail : youyx@sjtu.edu.cn