第 58 卷 第 10 期 2009 年 10 月
1000-3290/2009/58(10)/6761-03

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.58,No.10,October,2009

经典三阶驻波、短峰波的有效匹配解*

黄 虎†

(上海大学上海市应用数学和力学研究所,上海 200072)

(2008 年 10 月 28 日收到;2009 年 1 月 25 日收到修改稿)

发现经典非线性三阶驻波、短峰波解并不满足其所必须的波幅方程,这势必要影响与这些经典理论密切相关的现代短峰波理论的发展.基于此,提出了一套消除这种解与方程不相匹配的理论判据,从而可充分保证最终所得之解的内在和谐性和正确性.

关键词:匹配解,理论判据,驻波,短峰波

PACC:0340K,0200,9210H

1.引 言

Tadjbakhsh 和 Keller[1] 通过引入位相、振幅等积分方程,把经典的线性纯重力驻波解推广至非线性三阶解. Concus[2] 将该三阶解推广至表面张力-重力驻波解.Hsu 等[3] 通过扩展上述位相、波幅等积分方程而将 Tadjbakhsh 和 Keller[1] 之解推广至三阶纯重力短峰波解.自此以后,短峰波逐步广受关注[4—9].其中所产生的一系列重要成果[10—13] 无不与文献[3]关联.或更确切地说,与文献[1]关联.显然文献[1—3]都已先后成为二维长峰波[14,15] 和三维短峰波的经典之作.

然而,现在通过考察和分析,却发现这 3 篇经典之作的三阶解均不完全正确,即它们的第三阶解均不满足相应的波幅方程.本文不仅明确指出了这些经典解与所需满足方程之间的非匹配性,而且寻找到消除这种理论症结的一般方案,由此可充分保证所得之解与匹配方程之间的自洽性.

2.位相方程和波幅方程

在文献[1—3]各自给定的控制方程系统中,位相方程和波幅方程是不可分割的重要条件.据此,可直接推导出各阶摄动所需满足的位相方程和波幅方程.为简要起见,保持文献[1—3]各自的符号约定,从第二阶开始,则文献[1—3]各自各阶的位相方程和波幅方程如下(下文中变量上标、或下标 i 表示阶数,并且 $i \geqslant 1$. $i = 1$ 表示第二阶).

2.1. Tadjbakhsh,Keller[1] 和 Concus[2] 的位相方程和波幅方程

位相方程:

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \eta^i(x,t)\cos t\cos x\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x = 0, \tag{1}$$

$$\int_{-h}^0\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \phi^i(x,y,t)\sin t\cos x\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0. \tag{2}$$

波幅方程:

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \eta^i(x,t)\sin t\cos x\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x = 0, \tag{3}$$

$$\int_{-h}^0\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \phi^i(x,y,t)\cos t\cos x\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0. \tag{4}$$

2.2. Hsu,Tsuchiya,Silvester[3] 的位相方程和波幅方程

位相方程:

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \eta_i(y,t)\sin t\cos y\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}y = 0, \tag{5}$$

$$\int_{-d}^0\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \phi_i(y,z,t)\cos t\cos y\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = 0. \tag{6}$$

波幅方程:

* 全国优秀博士学位论文作者专项资金(批准号:200428)和上海市教委科研创新基金(批准号:08YZ05)资助的课题.

† E-mail:hhuang@shu.edu.cn

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\eta_i(y,t)\cos t\cos y\mathrm{d}t\mathrm{d}y = 0, \tag{7}$$

$$\int_{-d}^{0}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\phi_i(y,z,t)\sin t\cos y\mathrm{d}t\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 0. \tag{8}$$

3. 非匹配解

由文献[1—3]各自给出的三阶理论,可容易地得知:各自的第一、二阶解均可满足相应的位相方程和波幅方程,但对于其第三阶解:ϕ^2, η^2;ϕ_2, η_2 却发现:ϕ^2 和 ϕ_2 可分别满足方程(2)与(4),(6)与(8);但是,η^2 和 η_2 却并不分别满足方程(3)和(7),这起因于 η^2 中的 $b_{11}\sin t\cos x$ 项和 η_2 中的 $b_{11}\cos ny\cos(mx-t)$ 项.经分析,可知这两项均因分别使用与速度势相关的方程(2)与(4),(6)与(8)所致.据此,又可分析得知:如果分别使用与自由表面位移相关的方程(1)与(3),(5)与(7),则上述两项将不复存在,但取而代之的将是相应的另外两项:它们将同样不分别满足波幅方程(4)与(8).为比较、鉴别和完整起见,该种条件下的新非匹配第三阶解如下(其中,各项系数可参见所在文献).

3.1. Tadjbakhsh, Keller[1] 非匹配解

$$\eta^2 = b_{13}\sin t\cos 3x + b_{31}\sin 3t\cos x + b_{33}\sin 3t\cos 3x, \tag{9}$$

$$\begin{aligned}\phi^2 = \beta_2 - &\frac{b_{11}}{\omega_0\cosh h}\cos t\cos x\cosh(y+h)\\ &+ \beta_{13}\cos t\cos 3x\cosh 3(y+h)\\ &+ \beta_{31}\cos 3t\cos x\cosh(y+h)\\ &+ \beta_{33}\cos 3t\cos 3x\cosh 3(y+h).\end{aligned} \tag{10}$$

3.2. Concus[2] 非匹配解

$$\eta^2 = b_{13}\sin t\cos 3x + b_{31}\sin 3t\cos x + b_{33}\sin 3t\cos 3x, \tag{11}$$

$$\begin{aligned}\phi^2 = \beta_2 - &\frac{(1-\delta)b_{11}}{\omega_0\cosh h}\cos t\cos x\cosh(y+h)\\ &+ \beta_{13}\cos t\cos 3x\cosh 3(y+h)\\ &+ \beta_{31}\cos 3t\cos x\cosh(y+h)\\ &+ \beta_{33}\cos 3t\cos 3x\cosh 3(y+h).\end{aligned} \tag{12}$$

3.3. Hsu, Tsuchiya, Silvester[3] 非匹配解

$$\begin{aligned}\eta_2 = &b_{13}\cos 3ny\cos(mx-t) + b_{31}\cos ny\cos 3(mx-t)\\ &+ b_{33}\cos 3ny\cos 3(mx-t),\end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned}\phi_2 = &\frac{b_{11}}{\omega_0\cosh d}\sin t\cos mx\cos ny\cosh(z+d)\\ &+ \beta_{13}\cosh\gamma_1(z+d)\cos 3ny\sin(mx-t)\\ &+ \beta_{31}\cosh\gamma_3(z+d)\cos ny\sin 3(mx-t)\\ &+ \beta_{33}\cosh 3(z+d)\cos 3ny\sin 3(mx-t) + \beta_{20}.\end{aligned} \tag{14}$$

4. 理论判据

由上述可见,无论是原第三阶解,还是新第三阶解,均不满足波幅方程,以此构成这些经典三阶理论中解之非匹配性的症结所在.如何消除呢?

文献[1,2]具有共性,可一并处理.它们的各阶解 η^i 和 ϕ^i 中的项可具有两种基本表现形式,则相应地可提出两种保证匹配解的理论判据.

4.1. 第 1 判据

若 η^i 和 ϕ^i 中的部分项可分别表示为 $\alpha\cos at\cos bx$ 和 $\beta\sin at\cos bx$(a 和 b 为整数,α 和 β 为系数),则当 $a\neq 1$ 或 $b\neq 1$ 时,该两部分项可分别满足位相方程(1)和(2);而当 a 为奇整数,或 $b\neq 1$ 时,该两部分项可分别满足波幅方程(3)与(4).

4.2. 第 2 判据

若 η^i 和 ϕ^i 中的其余项可分别表示为 $\alpha\sin at\cos bx$ 和 $\beta\cos at\cos bx$,则当 a 为奇整数或 $b\neq 1$ 时,该两部分项可分别满足位相方程(1)和(2);而当 $a\neq 1$ 或 $b\neq 1$ 时,该两部分项可分别满足波幅方程(3)与(4).

对于文献[3],η_i 和 ϕ_i 中的项分别只具有一种形式:$\alpha\cos at\cos by$ 和 $\beta\sin at\cos by$.由此可提出下述判据:

4.3. 第 3 判据

当 a 为奇整数或 $b\neq 1$ 时,η_i 和 ϕ_i 中的项可分别满足位相方程(5)和(6);当 $a\neq 1$ 或 $b\neq 1$ 时,η_i 和 ϕ_i 中的项可分别满足波幅方程(7)和(8).

经过上述判断、处理后,最终所得之解必满足相应的位相方程和波幅方程,从而完全消除了这些经典三阶理论中隐含的非匹配解症结.

5. 结 论

驻波、短峰波分别为二维、三维水波运动的基本

形式. Tadjbakhsh 和 Keller[1]，Concus[2] 和 Hsu 等[3] 在数十年前分别将它们由线性理论推广至非线性三阶理论，影响至今，遂成为经典. 本文却从这些经典理论中发现了非匹配解，又给出了另一非匹配解. 通过观察、分析、归纳和推论，本文提出了一套消除、预防"解析解"与"位相、波幅方程"不相匹配的完整理论依据，以此可充分保证最终所得之解的内在"和谐性和正确性"，为非线性高阶驻波、短峰波理论的发展铺平了道路.

[1] Tadjbakhsh I，Keller J B 1960 *J. Fluid Mech.* **8** 442
[2] Concus P 1962 *J. Fluid Mech.* **14** 568
[3] Hsu J R C，Tsuchiya Y，Silvester R 1979 *J. Fluid Mech.* **90** 179
[4] Roberts A J 1983 *J. Fluid Mech.* **135** 301
[5] Hsu J R C 1990 *Handbook of Coastal and Ocean Engineering* (Vol. 1) (Houston：Gulf Publishing Company) p95
[6] Fuhrman D R，Madsen P A 2006 *J. Fluid Mech.* **559** 391
[7] Jian Y J，Zhan J M，Zhu Q Y 2008 *Eur. J. Mech. B/Fluids.* **27** 346
[8] Huang H 2009 *Dynamics of Surface Waves in Coastal Waters* (Beijing-Heidelberg：Higher Education Press-Springer)
[9] Huang H 2008 *Chin. Sci. Bull.* **53** 3267
[10] Fenton J D 1985 *J. Water，Port，Coastal，and Ocean Engineering* **111** 693
[11] Bridges T J，Dias F，Menasce D 2001 *J. Fluid Mech.* **436** 145
[12] Jeng D S 2002 *Ocean Engineering* **29** 1711
[13] Madsen P A，Fuhrman D R 2006 *J. Fluid Mech.* **557** 369
[14] Naranmandula 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1671 (in Chinese) [那仁满都拉 2002 物理学报 **51** 1671]
[15] Shen S F 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 1016 (in Chinese) [沈守枫 2006 物理学报 **55** 1016]

Effective matching solutions for classical third-order standing and short-crested waves*

Huang Hu†
(*Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics，Shanghai University，Shanghai　200072，China*)
(Received 28 October 2008；revised manuscript received 25 January 2009)

Abstract

It is found that the solutions for the classical third-order standing and short-crested waves cannot satisfy the required amplitude equations，exerting a direct influence on the modern shore-crested wave theories which are related closely with the classical theories. For this reason，a set of theoretical criteria are put forward to eliminate the incompatibility between the solutions and the equations，fully ensuring the inherent harmony and correctness of the finally obtained solutions.

Keywords：matching solutions，theoretical criteria，standing waves，short-crested waves
PACC：0340K，0200，9210H

* Project supported by the Foundation for the Author of National Excellent Doctoral Dissertation of China (Grant No. 200428) and the Scientific Research Innovation Fund of the Shanghai Education Committee，China (Grant No. 08YZ05).
† E-mail：hhuang@shu.edu.cn