第 58 卷 第 10 期 2009 年 10 月
1000-3290/2009/58(10)/6772-07

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.58,No.10,October,2009

利用二粒子部分纠缠态实现开靶目标的非局域量子可控非(CNOT)门的受控操作*

陈立冰† 谭 鹏 董少光 路 洪
(佛山科学技术学院光电子与物理学系,佛山 528000)
(2008 年 10 月 8 日收到;2008 年 12 月 17 日收到修改稿)

提出利用二粒子部分纠缠态概率性地实现开靶目标的非局域量子可控非(CNOT)门的操控方案.首先考虑利用 3 个二粒子部分纠缠态实现 3 个靶目标共享的非局域量子 CNOT 门的受控操作,然后将该方案推广到 N 个靶目标共享的情形.在该方案中,控制端 Alice 的局域正定算符值测量(POVM)起着关键作用,给出了该测量算符的数学表式.值得注意的是,用二粒子部分纠缠态可确定性地实现非局域 CNOT 门.

关键词:二粒子部分纠缠态,非局域可控非门,开靶目标,正定算符值测量
PACC:0365

1.引 言

量子纠缠在量子信息领域中起着至关重要的作用,是许多奇特性能的根源.自 1994 年国际兴起量子信息的研究至今,人们主要利用量子纠缠态所体现的量子力学非局域关联特性进行量子态的远程操控,如量子隐形传态和密集编码等[1—6].事实上量子门的远程操控在量子信息处理过程中也发挥着极其重要的作用.量子通信与计算想要实用化,就必须在网络中得以实现,能够进行一点对多点或任意两点之间的信息传输与处理.例如,为了克服建成一台大规模量子计算机存在的许多技术难点,Cirac 等[7]提出了多方分布式量子计算的方案,它可以有效地解决量子信息的物质载体与环境之间的相互作用所导致的消相干,以及储存和隔离大数量的量子比特(qubit)等困难.在分布式量子计算当中,不同端口之间需要互相实施量子态和量子门的远程操控.其他的例子如量子网络通信、多粒子纠缠态的产生等都涉及非局域量子门的操控.由于这些潜在的应用,一些基础性研究已开始进行[8—17].

按照量子计算的线路模型[18],要进行量子计算需要有进行任意单量子比特旋转操作以及一个非平凡的两量子比特操作的能力.在量子网络的情况下需要量子纠缠来实现空间上分开的两个量子比特之间的非平凡操作.在 Eisert 等[8]的开创性工作之后,关于量子门的远程操控方案相继出现.例如,Huelga 等[9]研究了在 Bell 态辅助下单量子比特旋转门的远程操作.Reznik 等[10]证明利用一对处于 Bell 态的粒子可以实现对空间上分开的两个量子比特做任意的可控旋转操作.目前,实验上已实现了远程单量子比特旋转门和非局域可控非门的操纵[11,12].在实际的量子通信与计算的实验中,由于损耗和消相干等因素的影响,一个纯粹的量子态是很难保持最大纠缠态的,因此研究部分纠缠的量子信道具有实际意义.关于用部分纠缠态实现非局域量子门的问题,已有不少研究[13—17].现有方案表明,仅用一对部分纠缠粒子作为量子信道,可以概率性地实现保真度为 100% 的或确定性地实现保真度小于 100% 的非局域量子可控旋转门的操作.

本文研究利用二粒子部分纠缠态实现非局域的和多个靶目标共享的量子 CNOT 门的受控操作.首先利用 3 个二粒子部分纠缠态实现 3 个靶目标共享的非局域 CNOT 门的受控操作,然后将该方案推广到 N 个靶目标共享的情形.此外还研究利用二粒子部分纠缠态确定性地实现保真度为 100% 的非局域 CNOT 门操作.

2.三个靶目标共享的非局域 CNOT 门的受控操作

假定 Alice,Bob_1,Bob_2,Bob_3 在空间是分开的.

* 广东省自然科学基金(批准号:06029431)资助的课题.
† E-mail:chlibing@foshan.net

Alice 拥有量子比特(A,a_1,a_2,a_3)；Bob_1，Bob_2，Bob_3分别拥有量子比特(B_1,b_1)，(B_2,b_2)，(B_3,b_3). 粒子A,B_1,B_2,B_3分别处于未知的信息态

$$|A\rangle_A=(\alpha|0\rangle+\beta|1\rangle)_A, \tag{1}$$

$$|B_1\rangle_{B_1}=(\gamma_1|0\rangle+\delta_1|1\rangle)_{B_1}, \tag{2}$$

$$|B_2\rangle_{B_2}=(\gamma_2|0\rangle+\delta_2|1\rangle)_{B_2}, \tag{3}$$

$$|B_3\rangle_{B_3}=(\gamma_3|0\rangle+\delta_3|1\rangle)_{B_3}, \tag{4}$$

其中$|\alpha|^2+|\beta|^2=1$，$|\gamma_i|^2+|\delta_i|^2=1(i=1,2,3)$. 粒子对$(a_1,b_1)$，$(a_2,b_2)$，$(a_3,b_3)$分别处于如下的部分纠缠态：

$$|\varphi\rangle_{a_1b_1}=(\sqrt{\mu_1}|00\rangle+\sqrt{1-\mu_1}|11\rangle)_{a_1b_1},$$

$$|\varphi\rangle_{a_2b_2}=(\sqrt{\mu_2}|00\rangle+\sqrt{1-\mu_2}|11\rangle)_{a_2b_2},$$

$$|\varphi\rangle_{a_3b_3}=(\sqrt{\mu_3}|00\rangle+\sqrt{1-\mu_3}|11\rangle)_{a_3b_3}, \tag{5}$$

式中μ_1，μ_2，μ_3为已知的正实数，且满足$0\leqslant\mu_1\leqslant\frac{1}{2}$，$0\leqslant\mu_2\leqslant\frac{1-2\mu_1}{2-2\mu_1}$，$\frac{1-2\mu_1-2\mu_2+2\mu_1\mu_2}{2-2\mu_1-2\mu_2+2\mu_1\mu_2}\leqslant\mu_3\leqslant\frac{1-2\mu_1-2\mu_2+2\mu_1\mu_2}{2-2\mu_1-2\mu_2}$. 系统的初态为

$$\begin{aligned}|\psi\rangle_0=&|\varphi\rangle_{a_1b_1}|\varphi\rangle_{a_2b_2}|\varphi\rangle_{a_3b_3}\\&\times|A\rangle_A|B_1\rangle_{B_1}|B_2\rangle_{B_2}|B_3\rangle_{B_3}.\end{aligned} \tag{6}$$

Alice 和 Bob 想利用$|\varphi\rangle_{a_1b_1}$，$|\varphi\rangle_{a_2b_2}$，$|\varphi\rangle_{a_3b_3}$来实现如下三个靶目标共享的非局域量子 CNOT 门

$$\begin{aligned}&|\varphi\rangle_{a_1b_1}|\varphi\rangle_{a_2b_2}|\varphi\rangle_{a_3b_3}|A\rangle_A|B_1\rangle_{B_1}|B_2\rangle_{B_2}|B_3\rangle_{B_3}\\&\rightarrow U_{\mathrm{CNOT}}(A;B_i)|A\rangle_A|B_i\rangle_{B_i}.\end{aligned} \tag{7}$$

式中$U_{\mathrm{CNOT}}(A;B_i)$表示以A为控制比特、B_i为靶比特的 CNOT 门；i等于 1，或 2，或 3，由控制端 Alice 任选. 定性地，该方案的成功概率不仅依赖参数μ_1,μ_2,μ_3的值，还依赖于实现这个目的所使用的方法. 下面将介绍目前所知的能取得最大成功概率的方法：

第一步，Alice 对拥有的粒子A,a_1,a_2,a_3进行局域操作. 其具体过程是：Alice 首先对粒子a_1,a_2,a_3进行测量算符为$A^j_{a_1a_2a_3}$的 POVM. 我们曾研究用优化理论实现局域纯态转化的一般过程，讨论用双随机矩阵的求解方法，通过构造一组 POVM 算子，并辅以局域操作和经典通信(LOCC)来实现局域纯态转化[19]. 若以$(|000\rangle_{a_1a_2a_3}$，$|001\rangle_{a_1a_2a_3}$，$|010\rangle_{a_1a_2a_3}$，$|011\rangle_{a_1a_2a_3}$，$|100\rangle_{a_1a_2a_3}$，$|101\rangle_{a_1a_2a_3}$，$|110\rangle_{a_1a_2a_3}$，$|111\rangle_{a_1a_2a_3})$为基，Alice 的 POVM 算子$A^j_{a_1a_2a_3}$可表为 8 个 8×8 对角矩阵，每个矩阵仅有两个非零元素[19]，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^1_{a_1a_2a_3}=&[2(1-\mu_1)(1-\mu_2)(1-\mu_3)\\&+2\mu_1\mu_2\mu_3-1]\\&\times\mathrm{diag}\Big(\frac{1/2}{\mu_1\mu_2\mu_3},0,0,0,0,0,0,\\&\frac{1/2}{(1-\mu_1)(1-\mu_2)(1-\mu_3)}\Big),\\ \boldsymbol{A}^2_{a_1a_2a_3}=&[2(1-\mu_1)(1-\mu_2)(1-\mu_3)\\&+2\mu_1\mu_2(1-\mu_3)-1]\\&\times\mathrm{diag}\Big(0,\frac{1/2}{\mu_1\mu_2(1-\mu_3)},0,0,0,0,0,\\&\frac{1/2}{(1-\mu_1)(1-\mu_2)(1-\mu_3)}\Big),\\ \boldsymbol{A}^8_{a_1a_2a_3}=&[1-2(1-\mu_1)(1-\mu_2)(1-\mu_3)]\\&\times\mathrm{diag}\Big(\frac{1/2}{\mu_1\mu_2\mu_3},\frac{1/2}{\mu_1\mu_2(1-\mu_3)},\\&0,0,0,0,0,0\Big).\end{aligned} \tag{8}$$

对应不同的测量结果j，态(6)坍缩为

$$(1/\sqrt{2})(|000000\rangle+|111111\rangle)_{a_1b_1a_2b_2a_3b_3}\times|A\rangle_A|B_1\rangle_{B_1}|B_2\rangle_{B_2}|B_3\rangle_{B_3}\quad(j=1), \tag{9a}$$

$$(1/\sqrt{2})(|000011\rangle+|111111\rangle)_{a_1b_1a_2b_2a_3b_3}\times|A\rangle_A|B_1\rangle_{B_1}|B_2\rangle_{B_2}|B_3\rangle_{B_3}\quad(j=2), \tag{9b}$$

$$(1/\sqrt{2})(|001100\rangle+|111111\rangle)_{a_1b_1a_2b_2a_3b_3}\times|A\rangle_A|B_1\rangle_{B_1}|B_2\rangle_{B_2}|B_3\rangle_{B_3}\quad(j=3), \tag{9c}$$

$$(1/\sqrt{2})(|001111\rangle+|111111\rangle)_{a_1b_1a_2b_2a_3b_3}\times|A\rangle_A|B_1\rangle_{B_1}|B_2\rangle_{B_2}|B_3\rangle_{B_3}\quad(j=4), \tag{9d}$$

$$(1/\sqrt{2})(|110000\rangle+|111111\rangle)_{a_1b_1a_2b_2a_3b_3}\times|A\rangle_A|B_1\rangle_{B_1}|B_2\rangle_{B_2}|B_3\rangle_{B_3}\quad(j=5), \tag{9e}$$

$$(1/\sqrt{2})(|110011\rangle+|111111\rangle)_{a_1b_1a_2b_2a_3b_3}\times|A\rangle_A|B_1\rangle_{B_1}|B_2\rangle_{B_2}|B_3\rangle_{B_3}\quad(j=6), \tag{9f}$$

$$(1/\sqrt{2})(|111100\rangle+|111111\rangle)_{a_1b_1a_2b_2a_3b_3}\times|A\rangle_A|B_1\rangle_{B_1}|B_2\rangle_{B_2}|B_3\rangle_{B_3}\quad(j=7), \tag{9g}$$

$$(1/\sqrt{2})(|000000\rangle+|000011\rangle)_{a_1b_1a_2b_2a_3b_3}\times|A\rangle_A|B_1\rangle_{B_1}|B_2\rangle_{B_2}|B_3\rangle_{B_3}\quad(j=8). \tag{9h}$$

对应的成功概率p_j分别为

$$\begin{aligned}p_1=&2(1-\mu_1)(1-\mu_2)(1-\mu_3)\\&+2\mu_1\mu_2\mu_3-1,\end{aligned} \tag{10a}$$

$$\begin{aligned}p_2=&2(1-\mu_1)(1-\mu_2)(1-\mu_3)\\&+2\mu_1\mu_2(1-\mu_3)-1,\end{aligned} \tag{10b}$$

$$p_3 = 2\mu_1(1-\mu_2)\mu_3, \tag{10c}$$
$$p_4 = 2\mu_1(1-\mu_2)(1-\mu_3), \tag{10d}$$
$$p_5 = 2(1-\mu_1)\mu_2\mu_3, \tag{10e}$$
$$p_6 = 2(1-\mu_1)\mu_2(1-\mu_3), \tag{10f}$$
$$p_7 = 2(1-\mu_1)(1-\mu_2)\mu_3, \tag{10g}$$
$$p_8 = 1-2(1-\mu_1)(1-\mu_2)(1-\mu_3). \tag{10h}$$

然后,Alice 根据其测量结果 j 对粒子 A,a_i 施一局域 CNOT 门 $U_{\rm CNOT}(A;a_i)$,这里 i 等于 1,或 2 或 3.接着,Alice 对粒子 a_1, a_2, a_3 分别执行向基 $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ 或向基 $\{|+\rangle=(1/\sqrt{2})(|0\rangle+|1\rangle), |-\rangle=(1/\sqrt{2})(|0\rangle-|1\rangle)\}$ 的正交投影测量,"抛弃"粒子 a_1, a_2 和 a_3.最后,Alice 选一靶目标 B_k(k 等于 1,或 2,或 3),并通过经典通道将决定告诉 Bob_k.此时 $|B_f\rangle_f$(f 等于 1,或 2,或 3;$f\neq k$)已无关紧要,可略去.

以 $j=1$ 为例.此时 Alice 可任选 $i=1$,并对粒子 A 和 a_1 施一 CNOT 门 $U_{\rm CNOT}(A;a_1)$,则态(9a)变为

$$\begin{aligned}&(1/\sqrt{2})[(\alpha|000000\rangle+\beta|111111\rangle)_{Ab_1a_2b_2a_3b_3}|0\rangle_{a_1}+\\&+(\alpha|0111111\rangle+\beta|100000\rangle)_{Ab_1a_2b_2a_3b_3}\\&\times|1\rangle_{a_1}]|B_1\rangle_{B_1}|B_2\rangle_{B_2}|B_3\rangle_{B_3}.\end{aligned} \tag{11}$$

Alice 接着对粒子 a_1 执行向基 $\{|0\rangle, |1\rangle\}$、对粒子 a_2, a_3 分别执行向基 $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ 的正交投影测量.以上工作完成之后,Alice 通过经典通道将测量结果通知 Bob_1,Bob_2,Bob_3,他们可设计与态(11)无关的幺正操作,使之变为

$$\begin{aligned}&(1/\sqrt{2})^3(\alpha|0000\rangle+\beta|1111\rangle)_{Ab_1b_2b_3}\\&\times|B_1\rangle_{B_1}|B_2\rangle_{B_2}|B_3\rangle_{B_3}.\end{aligned} \tag{12}$$

显而易见,经 Alice 的局域操作后,粒子对 a_1 和 b_1,a_2 和 b_2,a_3 和 b_3 间的纠缠消失了,而在粒子 A,b_1, b_2, b_3 间建立起新的纠缠.而且控制端的量子比特 A 的信息(α,β)含在 4 个粒子(A, b_1, b_2, b_3)态上,由 Alice,Bob_1,Bob_2,Bob_3 共同掌握.即(α,β)以非局域的方式联合储存在 4 个不同的空间位置上.因此,Alice 可从 B_1, B_2, B_3 中任选一为靶比特,例如 B_2,而略去 B_1 和 B_3.

第二步,靶端 Bob_2 对自己拥有的量子比特 b_2 和 B_2 施一 CNOT 门 $U_{\rm CNOT}(b_2;B_2)$;接着对 b_2 执行向基 $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ 的正交投影测量,并将结果告诉 Alice. Alice 根据 Bob_2 的测量结果对粒子 A 进行适当的操作(I_A 或 $(\sigma_Z)_A$)就可以让它们所拥有的粒子处于状态

$$\begin{aligned}&(1/\sqrt{2})^4[(\alpha|000\rangle_{Ab_1b_3}(\gamma_2|0\rangle\\&+\delta_2|1\rangle)_{B_2}+\beta|111\rangle_{Ab_1b_3}\\&\times(\gamma_2|1\rangle+\delta_2|0\rangle)_{B_2}]|A\rangle_A|B_2\rangle_{B_2}.\end{aligned} \tag{13}$$

此时量子态 $U_{\rm CNOT}(A;B_2)|A\rangle_A|B_2\rangle_{B_2}$ 已镶嵌在由粒子 A, B_2, b_1, b_3 组成的复合系统中.由(13)式可知,另两位未被选中的靶接收者 Bob_1,Bob_3 必须与 Alice 和 Bob_2 合作,才能完成(7)式所给的任务.

第三步,Bob_1 和 Bob_3 分别对粒子 b_1 和 b_3 执行向基 $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ 的正交投影测量.若测量结果为 $|+\rangle_{b_1}|+\rangle_{b_3}$ 或 $|-\rangle_{b_1}|-\rangle_{b_3}$,则(13)式变为

$$\begin{aligned}&(1/\sqrt{2})^6[(\alpha|0\rangle_A(\gamma_2|0\rangle+\delta_2|1\rangle)_{B_2}\\&+\beta|1\rangle_A(\gamma_2|1\rangle+\delta_2|0\rangle)_{B_2}]\\&=(1/\sqrt{2})^6U_{\rm CNOT}(A;B_2)|A\rangle_A|B_2\rangle_{B_2};\end{aligned} \tag{14}$$

若为 $|+\rangle_{b_1}|-\rangle_{b_3}$ 或 $|-\rangle_{b_1}|+\rangle_{b_3}$,则(13)式变为

$$\begin{aligned}&(1/\sqrt{2})^6[(\alpha|0\rangle_A(\gamma_2|0\rangle+\delta_2|1\rangle)_{B_2}\\&-\beta|1\rangle_A(\gamma_2|1\rangle+\delta_2|0\rangle)_{B_2}].\end{aligned} \tag{15}$$

Alice 需对粒子 A 施以 $(\sigma_Z)_A$ 变换才能得到(14)式.可见,Bob_1 和 Bob_3 在量子门的远程操控过程中担当监控者的角色.没有它们的合作,将不可能完成(7)式所给的任务.因此,我们把该过程称为开靶目标的(或 3 个靶目标共享的)非局域 CNOT 门的受控操作.

用 3 个二粒子部分纠缠态实现 3 个靶目标共享的非局域 CNOT 门的受控操作的成功概率为

$$p_1 = 2(1-\mu_1)(1-\mu_2)(1-\mu_3)+2\mu_1\mu_2\mu_3-1. \tag{16}$$

适当地调节系数 μ_1, μ_2, μ_3,可提高其成功概率.

由(9)式显见,当 Alice 的 POVM 的结果为 $j=2$,3,5 时,可实现两个靶目标共享的非局域 CNOT 门的受控操作,成功概率为 $p_2+p_3+p_5$.

表 1 给出了控制端 Alice 的 POVM 测量结果(j)与 a_i 的选择(a_i 的选择),Alice 执行向基 $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ 或向基 $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ 正交投影测量的粒子(被测粒子.若对粒子 a 执行向基 $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ 的正交投影测量,用 $a^{|0,1\rangle}$ 表示;向基 $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ 的正交投影测量,用 $a^{|+,-\rangle}$ 表示),靶目标 B_k 的选择(靶 B_k),以及各种情况下非局域 CNOT 门操作的监控者(监控者)的关系.

表 1　控制端的 POVM 结果与非局域 CNOT 门的靶目标及操作过程的监控者等的关系

j	a_i 的选择	被测粒子	靶 B_k	监控者
1	a_1	$a_1^{\|0,1\rangle}, a_2^{\|+,-\rangle}, a_3^{\|+,-\rangle}$	B_1, B_2, B_3	$(\mathrm{Bob}_2, \mathrm{Bob}_3), (\mathrm{Bob}_1, \mathrm{Bob}_3), (\mathrm{Bob}_1, \mathrm{Bob}_2)$
	a_2	$a_1^{\|+,-\rangle}, a_2^{\|0,1\rangle}, a_3^{\|+,-\rangle}$	B_1, B_2, B_3	$(\mathrm{Bob}_2, \mathrm{Bob}_3), (\mathrm{Bob}_1, \mathrm{Bob}_3), (\mathrm{Bob}_1, \mathrm{Bob}_2)$
	a_3	$a_1^{\|+,-\rangle}, a_2^{\|+,-\rangle}, a_3^{\|0,1\rangle}$	B_1, B_2, B_3	$(\mathrm{Bob}_2, \mathrm{Bob}_3), (\mathrm{Bob}_1, \mathrm{Bob}_3), (\mathrm{Bob}_1, \mathrm{Bob}_2)$
2	a_1	$a_1^{\|0,1\rangle}, a_2^{\|+,-\rangle}, a_3^{\|0,1\rangle}$	B_1, B_2	$\mathrm{Bob}_2, \mathrm{Bob}_1$
	a_2	$a_1^{\|+,-\rangle}, a_2^{\|0,1\rangle}, a_3^{\|0,1\rangle}$	B_1, B_2	$\mathrm{Bob}_2, \mathrm{Bob}_1$
3	a_1	$a_1^{\|0,1\rangle}, a_2^{\|0,1\rangle}, a_3^{\|+,-\rangle}$	B_1, B_3	$\mathrm{Bob}_3, \mathrm{Bob}_1$
	a_3	$a_1^{\|+,-\rangle}, a_2^{\|0,1\rangle}, a_3^{\|0,1\rangle}$	B_1, B_3	$\mathrm{Bob}_3, \mathrm{Bob}_1$
4	a_1	$a_1^{\|0,1\rangle}, a_2^{\|0,1\rangle}, a_3^{\|0,1\rangle}$	B_1	无
5	a_2	$a_1^{\|0,1\rangle}, a_2^{\|0,1\rangle}, a_3^{\|+,-\rangle}$	B_2, B_3	$\mathrm{Bob}_3, \mathrm{Bob}_2$
	a_3	$a_1^{\|0,1\rangle}, a_2^{\|+,-\rangle}, a_3^{\|0,1\rangle}$	B_2, B_3	$\mathrm{Bob}_3, \mathrm{Bob}_1$
6	a_2	$a_1^{\|0,1\rangle}, a_2^{\|0,1\rangle}, a_3^{\|0,1\rangle}$	B_2	无
7	a_3	$a_1^{\|0,1\rangle}, a_2^{\|0,1\rangle}, a_3^{\|0,1\rangle}$	B_3	无
8	a_3	$a_1^{\|0,1\rangle}, a_2^{\|0,1\rangle}, a_3^{\|0,1\rangle}$	B_3	无

3. N 个靶目标共享的非局域 CNOT 门的受控操作

上述方案可推广到 N 个靶目标共享的非局域 CNOT 门的受控操作.为此,我们利用 N 个二粒子部分纠缠态

$$|\varphi\rangle_{a_1b_1} = (\sqrt{\mu_1}|00\rangle + \sqrt{1-\mu_1}|11\rangle)_{a_1b_1},$$
$$|\varphi\rangle_{a_2b_2} = (\sqrt{\mu_2}|00\rangle + \sqrt{1-\mu_2}|11\rangle)_{a_2b_2},$$
$$|\varphi\rangle_{a_Nb_N} = (\sqrt{\mu_N}|00\rangle + \sqrt{1-\mu_N}|11\rangle)_{a_Nb_N} \tag{17}$$

作为量子信道.式中 $\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_N$ 为已知的正实数.我们将粒子 a_1, $a_2,\cdots,a_N$ 给 Alice,而将粒子 b_1, $b_2,\cdots,b_N$ 分别给远处不同端点的 Bob_1, Bob_2, $\cdots,\mathrm{Bob}_N$. 同时 Alice, Bob_1, Bob_2, $\cdots,\mathrm{Bob}_N$ 分别拥有粒子 $A,B_1,B_2,\cdots,B_N$,它们各处于未知的信息态 $|A\rangle_A = (\alpha|0\rangle+\beta|1\rangle)_A$, $|B_1\rangle_{B_1} = (\gamma_1|0\rangle+\delta_1|1\rangle)_{B_1}$, $|B_2\rangle_{B_2} = (\gamma_2|0\rangle+\delta_2|1\rangle)_{B_2},\cdots,|B_N\rangle_{B_N} = (\gamma_N|0\rangle+\delta_N|1\rangle)_{B_N}$. 于是,系统的初态为 $|\psi\rangle_0 = |A\rangle_A\prod_{i=1}^{N}|B_i\rangle_{B_i}\prod_{i=1}^{N}|\varphi\rangle_{a_ib_i}$.

与第二节类似,Alice 首先对其拥有的粒子 A, a_1, $a_2,\cdots,a_N$ 执行局域操作,此可分解为

$$\langle u_{a_N}|\cdots\langle u_{a_{i+1}}|\langle u_{a_i}^{0,1}|\langle u_{a_{i-1}}|\cdots\langle u_{a_2}|\langle u_{a_1}| \times U_{\mathrm{CNOT}}(A;a_i)(\boldsymbol{I}_A\otimes \boldsymbol{A}^j_{a_1a_2\cdots a_N}), \tag{18}$$

式中 $\boldsymbol{A}^j_{a_1a_2\cdots a_N}$ 为作用于粒子 a_1, $a_2,\cdots,a_N$ 的 POVM 算子,它们是 2^N 个 $2^N\times 2^N$ 对角矩阵,每个矩阵亦只有两个非零元素[20]

$$\boldsymbol{A}^1_{a_1a_2\cdots a_{2^N}} = p_1\mathrm{diag}\Big(\frac{1/2}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_{2^N}},0,\cdots,0,\frac{1/2}{(1-\mu_1)(1-\mu_2)\cdots(1-\mu_{2^N})}\Big), \tag{19a}$$

$$\boldsymbol{A}^2_{a_1a_2\cdots a_{2^N}} = p_2\mathrm{diag}\Big(0,\frac{1/2}{\mu_1\mu_2\cdots(1-\mu_{2^N})},0,\cdots,0,\frac{1/2}{(1-\mu_1)(1-\mu_2)\cdots(1-\mu_{2^N})}\Big), \tag{19b}$$

$$\boldsymbol{A}^{2^N}_{a_1a_2\cdots a_{2^N}} = p_{2^N}\mathrm{diag}\Big(\frac{1/2}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_{2^N}},\frac{1/2}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_{2^N}},0,\cdots,0\Big), \tag{19c}$$

其中, $U_{\mathrm{CNOT}}(A;a_i)$ 为作用在粒子 A, a_i 上的局域 CNOT 门, Alice 可根据其测量结果 j 选 i; $|u^{0,1}_{a_i}\rangle$ 表示对粒子 a_i 执行向基 $\{|0\rangle,|1\rangle\}$ 的正交投影测量,而 $|u_{a_g}\rangle = |u^{+,-}_{a_g}\rangle$,或 $|u^{0,1}_{a_g}\rangle$ $(g=1,2\cdots,i-1,i+1,\cdots,N)$ 表示对粒子 a_g 执行向基 $\{|+\rangle,|-\rangle\}$,或向基 $\{|0\rangle,|1\rangle\}$ 的正交投影测量,由 i 和 j 决定.

我们仍以 $j=1$ 为例.此时 Alice 可任选 i 等于 1,或 2,$\cdots$,或 N,例如选 $i=3$;且 Alice 任选 B_{N-2} 为靶比特.经 Alice 对 $|\psi\rangle_0$ 进行(18)式所表示的局域操作后, $|\psi\rangle_0$ 变为

$$|\psi\rangle_0 \xrightarrow{\langle u^{+,-}_{a_N}|\cdots\langle u^{+,-}_{a_4}|\langle u^{0,1}_{a_3}|\langle u^{+,-}_{a_2}|\langle u^{+,-}_{a_1}|U_{\mathrm{CNOT}}(A;a_3)(\boldsymbol{I}_A\otimes\boldsymbol{A}^1_{a_1a_2\cdots a_N})} |\psi\rangle_1,$$

其中,

$$|\psi\rangle_1 = (1/\sqrt{2})^N(\alpha|000\cdots0\rangle + \beta|111\cdots1\rangle)_{Ab_1b_2\cdots b_N} \times |B_{N-2}\rangle_{B_{N-2}}. \tag{20}$$

此时,信息(α,β)含在 $N+1$ 个粒子($A,b_1,b_2,\cdots,b_N$)态上,由 Alice,Bob$_1$,Bob$_2$,…,Bob$_N$ 共同掌握.

与第二节类似,经 Alice 和 Bob 的第二,第三步局域操作后

$$|\psi\rangle_1 \xrightarrow{(\sigma_Z)_A\otimes\langle u^{+,-}_{b_{N-2}}|U_{\mathrm{CNOT}}(b_{N-2};B_{N-2})} |\psi\rangle_2,$$

其中

$$\begin{aligned}|\psi\rangle_2 = (1/\sqrt{2})^{N+1}[&(\alpha|000\cdots00\rangle_{Ab_1b_2\cdots b_{N-3}b_{N-1}b_N}\\ &\times(\gamma_{N-2}|0\rangle+\delta_{N-2}|1\rangle)_{B_{N-2}}\\ &+\beta|111\cdots11\rangle_{Ab_1b_2\cdots b_{N-3}b_{N-1}b_N}\\ &\times(\gamma_{N-2}|1\rangle+\delta_{N-2}|0\rangle)_{B_{N-2}}]|B_{N-2}\rangle_{B_{N-2}}.\end{aligned} \tag{21}$$

$$|\psi\rangle_2 \xrightarrow{(\sigma_Z)_A\otimes\langle u^{+,-}_{b_N}|\langle u^{+,-}_{b_{N-1}}|\langle u^{+,-}_{b_{N-3}}|\cdots\langle u^{+,-}_{b_2}|\langle u^{+,-}_{b_1}|} |\psi\rangle_3,$$

其中,

$$\begin{aligned}|\psi\rangle_3 &= (1/\sqrt{2})^{2N}[(\alpha|0\rangle_A(\gamma_{N-2}|0\rangle+\delta_{N-2}|1\rangle)_{B_{N-2}} + \beta|1\rangle_A(\gamma_{N-2}|1\rangle+\delta_{N-2}|0\rangle)_{B_{N-2}}]\\ &= (1/\sqrt{2})^{2N}U_{\mathrm{CNOT}}(A;B_{N-2})|A\rangle|B_{N-2}\rangle_{B_{N-2}}.\end{aligned} \tag{22}$$

用 N 个二粒子部分纠缠态实现 N 个靶目标共享的非局域 CNOT 门的受控操作的成功概率为[20]

$$\begin{aligned}p_1 &= 2(1-\mu_1)(1-\mu_2)\cdots(1-\mu_{2^N})\\ &+ 2\mu_1\mu_2\cdots\mu_{2^N} - 1.\end{aligned} \tag{23}$$

若 Alice 的 POVM 的结果 j 为其他值,例如,$j=2,3,5,9,\cdots$,或 $2^{N-1}+1$,我们可实现($N-1$)个靶目标共享的非局域 CNOT 门的受控操作.

4.讨 论

对于上述结果,我们做如下的讨论:

1)用二粒子部分纠缠态实现 N 个靶目标共享的非局域 CNOT 门的受控操作,其核心是 Alice 的 POVM. Alice 通过对其拥有的粒子 $A,a_1,a_2,\cdots,a_N$ 的局域操作,实现了将 N 对二粒子部分纠缠态转化为 $2M$($M\leqslant N$,N 在理论上可任意大)个粒子的 Greeberger-Horne-Zeilinger(GHZ)态. 值得注意的是,Alice 的 POVM 算子 $\boldsymbol{A}^j_{a_1a_2\cdots a_N}$ 均为对角矩阵,它们使态矢 $\prod_{i=1}^{N}|\varphi\rangle_{a_ib_i}$ 的不同分量有不同的缩放,使其公共因子可提出,从而实现了纯态的转化. GHZ 态是多粒子最大纠缠态,是非常宝贵的量子资源,它在量子信息的诸多领域中有着广泛的应用. 然而人们对多粒子纠缠的性质、度量及制备仍处在基础研究阶段,有许多基本问题亟待解决. 目前在实验上仅能实现 5 粒子的 GHZ 态[21]. 因此,研究切实可行的多粒子 GHZ 态制备方法便成为关键性的问题之一,我们对此做了有益的探索. 在我们的方案中,粒子 $a_1,a_2,\cdots,a_N$ 属于控制端的 Alice,而分属于 Bob$_1$,Bob$_2$,…,Bob$_N$ 的粒子 $b_1,b_2,\cdots,b_N$ 分居于空间不同端点. 用这种类型的 GHZ 态作为远程的纠缠量子信道是实现量子通信网络和分布式量子计算最重要的条件之一.

根据 Neumark 的理论,总能够采用将所考虑的态空间拓展到一个较大空间,并在这个较大空间执行适当正交测量的办法,实现所考虑空间中任何事先给定的 POVM[18]. 例如,为了实现在粒子 a_1,a_2,a_3 构成的八维态空间 H_A 中进行的 POVM $\{\boldsymbol{A}^j_{a_1a_2a_3}\}$,我们可引入一个初始态为 $|0\rangle_f$ 的'八进制'的辅助粒子 f(八维态空间 H_B;$|j\rangle_f$,$j=1,2,\cdots,8$)作直积拓展(例如用 3 个量子比特),并设计一合适的幺正变换 $U_{a_1,a_2,\cdots,a_8,f}$ 作用在两个直积空间 $H_A\otimes H_B$ 上,即

$$\begin{aligned}&U_{a_1,a_2,\cdots,a_8,f}|\varphi\rangle_{a_1b_1}|\varphi\rangle_{a_2b_2}|\varphi\rangle_{a_3b_3}|0\rangle_f\\ &= \sum_j A^j_{a_1a_2\cdots a_8}|\varphi\rangle_{a_1b_1}|\varphi\rangle_{a_2b_2}|\varphi\rangle_{a_3b_3}|j\rangle_f.\end{aligned} \tag{24}$$

可见,作用于直积态空间 $H_A\otimes H_B$ 的幺正变换 $U_{a_1,a_2,\cdots,a_8,f}$ 和对辅助粒子 f(空间 H_B)的正交投影测量实现了在粒子 a_1,a_2,a_3(空间 H_A)上所预定的 POVM$\{\boldsymbol{A}^j_{a_1a_2a_3}\}$. 而幺正变换 $U_{a_1,a_2,\cdots,a_8,f}$ 可用一系列单量子比特旋转门和双量子比特 CNOT 门依次作用来实现[18]. 单量子比特旋转门和 CNOT 门已在多种物理系统的多种物理过程中实现,比如,离子阱、核磁共振(NMR)、量子点、半导体硅基等[18].

2)在第二节中,若只有一个靶端 Bob,则粒子 b_1,b_2,b_3 都给 Bob. 当 Alice 对其拥有的粒子 A,a_1,a_2,a_3 进行局域操作后,Bob 和 Alice 采用非局域量子逻辑门的操作方法[10,12],分别对它们的粒子施合适的局域操作,即可完成单靶目标的非局域 CNOT 门的操作. 成功的概率为 100%. 即,我们可利用二粒子部分纠缠态确定性地实现非局域 CNOT 门的操作,它特别适用于某些对可靠性要求高的量子信息过程. 当然,若仅局限于单靶目标和确定性的非局域 CNOT 门的操作,用两个二粒子部分纠缠态即可实现[22].

5. 结　论

本文描述了一个利用 N 个二粒子部分纠缠态，并辅于局域操作和经典通信，来实现开靶目标的非局域 CNOT 门的受控操作方案. 在该方案中，非局域 CNOT 门的控制端 Alice 的局域 POVM 起到了关键的作用，我们给出了该测量算符的数学表式. Alice 可通过将原来的态空间拓展到一个较大空间，并在这个较大空间执行适当正交测量的办法来实现所考虑空间中事先给定的 POVM. 经过 Alice 的局域操作后，原来 N 对二粒子间的纠缠消失了，而在控制端和 M($M\leqslant N$)个靶端中建立起新的纠缠. 而且控制端的量子比特 A 的信息(α，β)含在这($M+1$)个端点的粒子态上，由 Alice，Bob_1，Bob_2，…，Bob_M 共同掌握. 因此，Alice 可从 M 个靶端中任选其一为靶，而其他未被选中者作为监控者亦参加这一量子远程操作过程. 我们给出了该方案的成功概率. 值得注意的是，若远处只有一个靶端(单靶目标)，则可确定性地实现保真度为 100% 的非局域 CNOT 门. 用二粒子部分纠缠态确定性地(而不是概率性地)实现非局域 CNOT 门具有实际意义.

开靶目标和受控的非局域量子门可用于远程量子通信，可实现量子因特网、多方分布式量子计算、量子保密会议，等等. 同时，利用二粒子部分纠缠对建立灵活的多粒子量子信道也是量子信息和量子计算过程的中心任务之一.

[1] Bennett C H，Brassard G，Crepeau C，Jozsa R，Peres A，Wootters W K 1993 *Phys*. *Rev*. *Lett*. **70** 1895

[2] Bouwmeester D，Pan J W，Mattle K，Eibl M，Weinfuter H，Zeilinge A 1997 *Nature* **390** 575

[3] Chen L B 2002 *Chin*. *Phys*. **11** 999

[4] Zheng Y Z，Dai L Y，Guo G C 2003 *Acta Phys*. *Sin*. **52** 2678(in Chinese)［郑亦庄、戴玲玉、郭光灿 2003 物理学报 **52** 2678］

[5] Huang Y C，Liu M 2005 *Acta Phys*. *Sin*. **54** 4517(in Chinese)［黄永畅，刘　敏 2005 物理学报 **54** 4517］

[6] Bennett C H，Wiesner S J 1992 *Phys*. *Rev*. *Lett*. **89** 2881

[7] Cirac J I，Ekert A K，Huelga S F，Macchiavello C 1999 *Phys*. *Rev*. A **59** 4249

[8] Eisert J，Jacobs K，Papadopoulos P，Plenio M B 2000 *Phys*. *Rev*. A **62** 052317

[9] Huelga S F，Plenio M B，Vaccaro J A 2002 *Phys*. *Rev*. A **65** 04231

[10] Reznik B，Aharonov Y，Groisman B 2002 *Phys*. *Rev*. A **65** 032312

[11] Xiang G Y，Li J，Guo G C 2005 *Phys*. *Rev*. A **71** 044304

[12] Huang Y F，Ren X F，Zheng Y S，Duan L M，Guo G C 2004 *Phys*. *Rev*. *Lett*. **93** 240501

[13] Chen L B，Lu H，Liu Y H 2005 *Chin*. *Phys*. **14** 1323

[14] Ye M Y，Zhang Y S，Guo G C 2006 *Phys*. *Rev*. A **73** 032337

[15] Groisman B，Reznik B 2005 *Phys*. *Rev*. A **71** 032322

[16] Chen L，Chen Y X 2005 *Phys*. *Rev*. A **71** 054302

[17] Chen L B，Lu H 2004 *Chin*. *Phys*. **13** 14

[18] Nielsen M A，Chuang I L 2000 *Quantum Computation and Quantum Information* (Cambridge：Cambridge University Press) pp191，277

[19] Jin R B，Chen L B，Wang F Q，Lu Y Q，Liu S H 2007 *Chin*. *Phys*. *Lett*. **24** 1799

[20] Jin R B，Chen L B，Wang F Q，Liang R S 2008 *Chin*. *Phys*. *Lett*. **25** 386

[21] Zhao Z，Chen Y A，Zhang A N，Yang T，Briegel H J，Pan J W，2004 *Nature* **430** 54

[22] Chen L B，Jin R B，Lu H 2009 *Chin*. *Phys*. B **18** 30

Controlled implementation of a nonlocal and open-target destination quantum controlled-Not (CNOT) gate using partially entangled pairs*

Chen Li-Bing† Tan Peng Dong Shao-Guang Lu Hong

(*Department of Optoelectronics and Physics*, *Foshan University*, *Foshan* 528000, *China*)

(Received 8 October 2008; revised manuscript received 17 December 2008)

Abstract

We show how a nonlocal and open-target destination quantum controlled-Not (CNOT) gate can be probabilistically implemented by using partially entangled pairs of particles. We first investigate the controlled implementation of a nonlocal and three-target destination CNOT gate using three partially entangled pairs, and then generalize the scheme to the case of N-target destination. In this scheme, Alice's local generalized measurement described by a positive operator valued measurement (POVM) plays a key role. We construct the required POVM. It is worth noting that deterministic and exact implementation of a nonlocal CNOT gate can be realized using partially entangled pairs.

Keywords: partially entangled pair, nonlocal controlled-Not gate, open-target destination, positive operator valued measurement

PACC: 0365

* Project supported by the Natural Science Foundation of Guangdong Province, China (Grant No. 06029431).

† E-mail: chlibing@foshan.net