

# 融合复杂动态网络的模型参考自适应同步研究<sup>\*</sup>

罗 群<sup>†</sup> 高 雅 齐雅楠 高 雅 吴 桐 许 欢 李丽香 杨义先

(北京邮电大学网络与交换技术国家重点实验室信息安全中心, 网络与信息攻防技术教育部重点实验室,  
灾备技术国家工程实验室, 北京 100876)

(2008 年 6 月 4 日收到, 2009 年 3 月 4 日收到修改稿)

本文根据融合复杂网络边性质的不同, 运用网络拆分的思想研究了多重边融合复杂网络的自适应同步问题。基于 Lyapunov 稳定性理论, 采用自适应反馈控制方法, 在网络节点相同和不同的情况下, 分别给出了网络全局同步的准则以及相应的控制器。最后, 数值仿真验证了本文方法的有效性。

关键词: 融合网络, 自适应同步, Lyapunov 稳定性理论

PACC: 0545

## 1. 引 言

长期以来, 通信网络、电力网络、生物网络、金融网络和社会网络等分别是通信科学、电力科学、生命科学、经济学和社会学等不同学科的研究对象。而复杂网络理论所要研究的则是各种看上去互不相同的复杂网络之间的共性和处理它们的普适方法。从 20 世纪末开始, 复杂网络研究正渗透到数理、生命和工程学科等众多不同的领域, 对复杂网络的定量与定性特征的科学研究, 已成为网络时代科学研究中一个极其重要的挑战性课题, 取得了许多重要进展<sup>[1-6]</sup>。

近年来, 融合复杂网络也受到人们越来越多的关注。在现实生活中, 存在着由多个不同性质的子网络构成的多重边融合复杂网络。以交通网为例, 把每个城市看作一个节点, 其间的交通线为边, 则两城市之间可能存在多种交通方式, 如公路、铁路、航空线等, 这样的交通网就形成了一个多重边的复杂网络<sup>[7]</sup>。2007 年, 信息产业部强调要加大“三网融合”的基础性研究力度。所谓三网融合, 在现阶段并不意味着电信网、计算机网和广播电视网这三大网络的物理合一, 而是指高层业务应用的融合, 即通过技术

改造, 能够提供包括语音、数据、图像等综合多媒体的通信业务。三网融合技术上表现为趋向一致: 网络层上可以实现互相联通和无缝覆盖, 业务层上互相渗透和交叉, 应用层上趋向使用统一的 IP 协议。在理论研究时, 融合复杂网络比复杂网络的含义更加宽泛, 更强调从多个层面、多个角度进行融合的思考。例如, 融合网络不但可以具有性质截然不同的边<sup>[7,8]</sup>, 还可以含有性质不同的节点<sup>[9]</sup>。目前这方面的文章还比较少, 多数研究还是集中在相同节点的单边网络模型。

网络拓扑和单个节点的动力学性质决定整个网络的动力行为——网络同步。同步是一个典型的集体行为, 网络同步的理论研究可以应用于保密通信、防范网络信息拥塞等许多领域。复杂网络的小世界和无标度特性的发现, 使得人们开始关注网络的拓扑结构与网络的同步化行为之间的关系<sup>[3-12]</sup>。由于实际动态网络的模型往往是未知的或含有不确定因素, 动态网络的拓扑结构有时也是未知或不确定的, 这使得对不确定复杂网络动力学节点的同步研究更有意义。

对于网络的模型函数未知、拓扑结构也是未知的融合复杂网络的处理, 本文继续文献 [7, 8] 中网络拆分的思想, 将一个融合网络拆分成多个性质不同

<sup>\*</sup> 国家自然科学基金(批准号: 60805043, 60821001)、高等学校博士学科点专项科研基金(批准号: 200800131028)、国家重点基础研究发展计划(批准号: 2007CB310704)、高等学校学科创新引智计划(批准号: B08004)和全国优秀博士学位论文作者专项基金(批准号: 200951)资助的课题。

<sup>†</sup> E-mail: luoqun@bupt.edu.cn

注: 第二作者和第四作者为同一单位的不同两人

的子网络. 采用自适应反馈控制方法, 在网络含相同和不同节点的情况下, 基于 Lyapunov 稳定性理论, 给出了动态网络模型参考自适应同步的准则和相应的控制器. 最后, 通过仿真验证了结果的正确性.

## 2. 融合多边复杂网络模型

考虑一个由  $N$  个节点构成的耗散耦合  $k$  重边融合动态网络, 其中网络中边的性质有  $m$  种, 根据网络边的不同性质, 我们把这个  $k$  重边融合动态网络拆分成  $m$  个子网络. 这里需要说明的是, 拆分后的子网络依然可能是多重边的网络. 下面的图 1 显

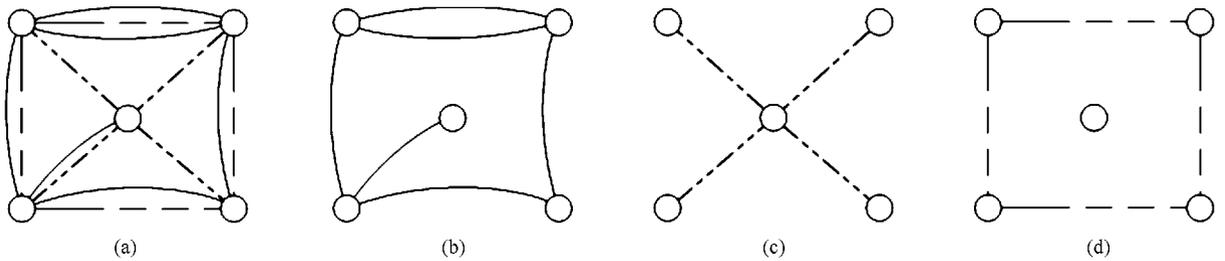


图 1 网络拆分示意图 (a)三个子网融合, (b)子网之一, (c)子网之二, (d)子网之三

状态滞后,  $\tau_l (l = 1, 2, \dots, m-1)$  是第  $l$  个子网络相对于不存在时滞的子网络的时滞时间,  $\mathbf{H}_l \in R^{n \times n} (l = 0, 1, \dots, m-1)$  为各个节点状态变量之间的内部耦合函数, 耦合矩阵  $A^l = (a_{ij}^l)_{N \times N} \in R^{N \times N} (l = 0, 1, 2, \dots, m-1)$  表示第  $l$  个子网络的拓扑结构. 满足耗散耦合条件  $\sum_{j=1}^N a_{ij}^l = 0$ , 其中  $a_{ij}^l$  的具体定义如下: 若第  $l$  个子网络中的节点  $i$  和节点  $j (i \neq j)$  之间有连接且连接权数为  $q$ , 则  $a_{ij}^l = a_{ji}^l = q$ , 若两点之间无连接, 则  $a_{ij}^l = a_{ji}^l = 0 (i \neq j)$ , 且矩阵  $A^l$  的对角元的定义为  $a_{ii}^l = -\sum_{j=1, j \neq i}^N a_{ij}^l = -\sum_{j=1, j \neq i}^N a_{ji}^l (i = 1, 2, \dots, N, l = 0, 1, 2, \dots, m-1)$ .

注 1 为研究的需要, 将网络拆分成不同性质的子网络后, 我们将子网络中两节点间边的权值进行了合并, 即  $a_{ij}^l = a_{ji}^l = q$  表示两节点间的权值总和.

当网络节点不同时, 整个网络可以通过下述状态方程 (2) 来研究:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i = & g_1(x_i) + g_2(x_i(t-\tau)) \\ & + \sum_{j=1}^N a_{ij}^0 \mathbf{H}_0 x_j + \sum_{j=1}^N a_{ij}^1 \mathbf{H}_1 x_j(t-\tau_1) \end{aligned}$$

示了  $N = 5, m = 3$  时的网络拆分.

当  $N$  个网络节点相同时, 整个动态网络的状态方程为

$$\begin{aligned} \dot{x}_i = & f_1(x_i) + f_2(x_i(t-\tau)) \\ & + \sum_{j=1}^N a_{ij}^0 \mathbf{H}_0 x_j + \sum_{j=1}^N a_{ij}^1 \mathbf{H}_1 x_j(t-\tau_1) + \dots \\ & + \sum_{j=1}^N a_{ij}^{m-1} \mathbf{H}_{m-1} x_j(t-\tau_{m-1}) \end{aligned} \quad (i = 1, 2, \dots, N), \quad (1)$$

式中  $f_1, f_2: R^n \rightarrow R^n$  是连续可微的函数,  $x_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in})^T \in R^n$  为节点  $i$  的状态变量,  $\tau$  为节点的

$$\begin{aligned} & + \dots + \sum_{j=1}^N a_{ij}^{m-1} \mathbf{H}_{m-1} x_j(t-\tau_{m-1}) (1 \leq i \leq N^*), \\ \dot{x}_i = & h_1(x_i) + h_2(x_i(t-\tau)) \\ & + \sum_{j=1}^N a_{ij}^0 \mathbf{H}_0 x_j + \sum_{j=1}^N a_{ij}^1 \mathbf{H}_1 x_j(t-\tau_1) \\ & + \dots + \sum_{j=1}^N a_{ij}^{m-1} \mathbf{H}_{m-1} x_j(t-\tau_{m-1}) \end{aligned} \quad (N^* + 1 \leq i \leq N), \quad (2)$$

式中  $g_1, g_2, h_1, h_2: R^n \rightarrow R^n$  是连续可微的函数,  $N^*$  为第一类节点的个数.

在下一部分, 我们将研究多重边融合复杂动态网络在节点相同和不同时的模型参考自适应同步, 得出满足网络同步的充分条件, 给出相应的控制器.

## 3. 融合复杂动态网络的模型参考自适应同步准则

对于网络的模型函数未知、拓扑结构也是未知的多重边融合复杂动态网络, 我们分别对子网络个数  $m = 2$  及  $m \geq 3$  时的情形, 给出了网络模型参考自适应同步的准则以及证明.

### 3.1. $m = 2$ 时的网络自适应同步

当  $m = 2$  时,融合复杂网络的模型(1)可描述如下:

$$\dot{\mathbf{x}}_i = f_1(\mathbf{x}_i) + f_2(\mathbf{x}_i(t - \tau)) + \sum_{j=1}^N a_{ij}^0 \mathbf{H}_0 \mathbf{x}_j + \sum_{j=1}^N a_{ij}^1 \mathbf{H}_1 \mathbf{x}_j(t - \tau_1). \quad (3)$$

下面我们研究网络(3)的模型参考自适应控制问题,构造如下的网络参考模型:

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}_i = f_1(\hat{\mathbf{x}}_i) + f_2(\hat{\mathbf{x}}_i(t - \tau)) + \sum_{j=1}^N \hat{a}_{ij}^0 \mathbf{H}_0 \hat{\mathbf{x}}_j + \sum_{j=1}^N \hat{a}_{ij}^1 \mathbf{H}_1 \hat{\mathbf{x}}_j(t - \tau_1) + \mathbf{u}_i, \quad (4)$$

其中,  $1 \leq i \leq N$ ,  $\hat{\mathbf{x}}_i = (\hat{x}_{i1}, \hat{x}_{i2}, \dots, \hat{x}_{in})^T \in R^n$  表示第  $i$  个节点的参考状态向量,  $\mathbf{u}_i \in R^n$  是控制输入,而  $\hat{a}_{ij}^0, \hat{a}_{ij}^1$  是权重  $a_{ij}^0, a_{ij}^1$  的估计.

我们的目标是:设计控制器  $\mathbf{u}_i$  以及参数估计器  $\hat{a}_{ij}^0, \hat{a}_{ij}^1$  使当  $t \rightarrow \infty$  时,  $\hat{\mathbf{x}}_i \rightarrow \mathbf{x}_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ). 实现参考网络系统(4)和网络系统(3)的自适应控制.

为了研究的需要,对网络的未知模型函数给出如下假设:

假设 1 存在正数常量  $\alpha, \beta$  满足

$$\|f_1(\mathbf{y}) - f_1(\mathbf{x})\| \leq \alpha \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|,$$

$$\|f_2(\mathbf{y}) - f_2(\mathbf{x})\| \leq \beta \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|,$$

这里  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  是向量,  $\|\cdot\|$  表示 2-范数.

对定理进行证明时,我们需要用到下面的引理.

引理 对于任意的  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in R^n, \mu > 0$ , 有下式成立:

$$2\mathbf{x}^T \mathbf{y} \leq \mu \mathbf{x}^T \mathbf{x} + \frac{1}{\mu} \mathbf{y}^T \mathbf{y}.$$

基于 Lyapunov 稳定性理论,我们得出下面的网络同步准则.

定理 1 若假设 1 成立,那么存在如下控制器和参数估计器,使参考网络(4)与原始网络(3)同步:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{a}}_{ij}^0 &= -\tilde{\mathbf{x}}_i^T \mathbf{H}_0 \hat{\mathbf{x}}_j \quad (1 \leq i, j \leq N), \\ \dot{\hat{a}}_{ij}^1 &= -\tilde{\mathbf{x}}_i^T \mathbf{H}_1 \hat{\mathbf{x}}_j(t - \tau_1) \quad (1 \leq i, j \leq N), \\ \mathbf{u}_i &= -d_i \tilde{\mathbf{x}}_i \quad (1 \leq i \leq N), \end{aligned} \quad (5)$$

其中,  $k_i$  ( $1 \leq i \leq N$ ) 是正常数.

证明 设  $\tilde{\mathbf{x}}_i = \hat{\mathbf{x}}_i - \mathbf{x}_i, \tilde{a}_{ij}^0 = \hat{a}_{ij}^0 - a_{ij}^0, \tilde{a}_{ij}^1 = \hat{a}_{ij}^1 - a_{ij}^1, a_i = \sum_{j=1}^N (a_{ij}^1)$  ( $1 \leq i, j \leq N$ ). 由(3)和(4)式, 可得如下的误差系统:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\mathbf{x}}}_i &= f_1(\hat{\mathbf{x}}_i) - f_1(\mathbf{x}_i) + f_2(\hat{\mathbf{x}}_i(t - \tau)) \\ &\quad - f_2(\mathbf{x}_i(t - \tau)) + \sum_{j=1}^N \tilde{a}_{ij}^0 \mathbf{H}_0 \tilde{\mathbf{x}}_j \\ &\quad + \sum_{j=1}^N a_{ij}^0 \mathbf{H}_0 \tilde{\mathbf{x}}_j + \sum_{j=1}^N \tilde{a}_{ij}^1 \mathbf{H}_1 \hat{\mathbf{x}}_j(t - \tau_1) \\ &\quad + \sum_{j=1}^N a_{ij}^1 \mathbf{H}_1 \tilde{\mathbf{x}}_j(t - \tau_1) + \mathbf{u}_i \quad (1 \leq i \leq N). \end{aligned}$$

选择如下的 Lyapunov 函数:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \tilde{\mathbf{x}}_i^T \tilde{\mathbf{x}}_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (\tilde{a}_{ij}^0)^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (\tilde{a}_{ij}^1)^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \frac{1}{k_i} (d_i - d^*)^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N a_i \int_{t-\tau_1}^t \tilde{\mathbf{x}}_i^T(s) \tilde{\mathbf{x}}_i(s) ds \\ &\quad + \beta \sum_{i=1}^N \int_{t-\tau}^t \tilde{\mathbf{x}}_i^T(s) \tilde{\mathbf{x}}_i(s) ds, \end{aligned}$$

这里  $d^*$  是足够大的确定的正常数.

因为假设 1 成立,我们得到  $V$  沿系统轨线对  $t$  的导数如下:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \sum_{i=1}^N \tilde{\mathbf{x}}_i^T \dot{\tilde{\mathbf{x}}}_i + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \tilde{a}_{ij}^0 \dot{\tilde{a}}_{ij}^0 \\ &\quad + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \tilde{a}_{ij}^1 \dot{\tilde{a}}_{ij}^1 + \sum_{i=1}^N \frac{1}{k_i} (d_i - d^*) \dot{d}_i \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N a_i [\tilde{\mathbf{x}}_i^T(t) \tilde{\mathbf{x}}_i(t) \\ &\quad - \tilde{\mathbf{x}}_i^T(t - \tau_1) \tilde{\mathbf{x}}_i(t - \tau_1)] \\ &\quad + \beta \sum_{i=1}^N [\tilde{\mathbf{x}}_i^T(t) \tilde{\mathbf{x}}_i(t) - \tilde{\mathbf{x}}_i^T(t - \tau) \tilde{\mathbf{x}}_i(t - \tau)] \\ &\leq \sum_{i=1}^N \alpha \|\tilde{\mathbf{x}}_i\|^2 + \sum_{i=1}^N \beta \|\tilde{\mathbf{x}}_i\| \|\tilde{\mathbf{x}}_i(t - \tau)\| \\ &\quad + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \tilde{a}_{ij}^0 \tilde{\mathbf{x}}_i^T \mathbf{H}_0 \hat{\mathbf{x}}_j + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_{ij}^0 \tilde{\mathbf{x}}_i^T \mathbf{H}_0 \tilde{\mathbf{x}}_j \\ &\quad + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \tilde{a}_{ij}^1 \tilde{\mathbf{x}}_i^T \mathbf{H}_1 \hat{\mathbf{x}}_j(t - \tau_1) \\ &\quad + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_{ij}^1 \tilde{\mathbf{x}}_i^T \mathbf{H}_1 \tilde{\mathbf{x}}_j(t - \tau_1) \\ &\quad - \sum_{i=1}^N d_i \|\tilde{\mathbf{x}}_i\|^2 + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \tilde{a}_{ij}^0 \dot{\tilde{a}}_{ij}^0 + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \tilde{a}_{ij}^1 \dot{\tilde{a}}_{ij}^1 \\ &\quad + \sum_{i=1}^N (d_i - d^*) \|\tilde{\mathbf{x}}_i\|^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N a_i [\tilde{\mathbf{x}}_i^T \tilde{\mathbf{x}}_i - \tilde{\mathbf{x}}_i^T(t - \tau_1) \tilde{\mathbf{x}}_i(t - \tau_1)] \\ &\quad + \beta \sum_{i=1}^N [\tilde{\mathbf{x}}_i^T \tilde{\mathbf{x}}_i - \tilde{\mathbf{x}}_i^T(t - \tau) \tilde{\mathbf{x}}_i(t - \tau)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{i=1}^N (\alpha - d^*) \|\tilde{x}_i\|^2 + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_{ij}^0 \tilde{x}_i^T \mathbf{H}_0 \tilde{x}_j \\
&+ \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_{ij}^1 \tilde{x}_i^T \mathbf{H}_1 \tilde{x}_j(t - \tau_1) + \frac{5}{4} \beta \sum_{i=1}^N \tilde{x}_i^T \tilde{x}_i \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N a_i [\tilde{x}_i^T \tilde{x}_i - \tilde{x}_i^T(t - \tau_1) \tilde{x}_i(t - \tau_1)] \\
&\leq \sum_{i=1}^N \left( \alpha - d^* + \frac{5}{4} \beta + \frac{a_i}{2} \right) \|\tilde{x}_i\|^2 \\
&+ \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_{ij}^0 \tilde{x}_i^T \mathbf{H}_0 \tilde{x}_j + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \|\tilde{x}_i\|^2 \|\mathbf{H}_1\|^2 \\
&= \tilde{\mathbf{X}}^T \mathbf{P} \tilde{\mathbf{X}}.
\end{aligned}$$

其中,

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{X}} &= (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_N)^T, \\
\mathbf{P} &= (\alpha - d^* + \frac{5}{4} \beta + \frac{N}{2} \|\mathbf{H}_1\|^2) \mathbf{I}_{nN} \\
&+ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a_1 \mathbf{I}_n & \dots & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & \dots & a_N \mathbf{I}_n \end{pmatrix} + \mathbf{A}^0 \otimes \mathbf{H}_0,
\end{aligned}$$

这里  $\mathbf{I}_{nN}$  表示  $n \times N$  维的单位矩阵. 显然矩阵  $\mathbf{P}$  在足够大的常数  $d^*$  下是负定的, 所以, 当  $t \rightarrow \infty$  时,  $\tilde{x}_i \rightarrow 0$  ( $i=1, 2, \dots, N$ ). 定理得证.

注 2 当  $f_2(\hat{x}_i(t - \tau)) = 0$  以及  $\sum_{j=1}^N \hat{a}_{ij}^1 \mathbf{H}_1 \hat{x}_j(t - \tau_1) = 0$  时, 系统退化为文献 [9] 中对于单边网络的研究.

在上面研究的所有  $N$  个网络节点都含有相同动力学方程的基础上, 我们扩展到研究网络节点不同步的同步问题.

当  $m=2$  时, 含有不同的动态节点的融合复杂动态网络模型 (2) 可描述如下:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_i &= \mathbf{g}_1(x_i) + \mathbf{g}_2(x_i(t - \tau)) \\
&+ \sum_{j=1}^N a_{ij}^0 \mathbf{H}_0 x_j + \sum_{j=1}^N a_{ij}^1 \mathbf{H}_1 x_j(t - \tau_1) \\
&\quad (1 \leq i \leq N^*), \\
\dot{x}_i &= \mathbf{h}_1(x_i) + \mathbf{h}_2(x_i(t - \tau)) \\
&+ \sum_{j=1}^N a_{ij}^0 \mathbf{H}_0 x_j + \sum_{j=1}^N a_{ij}^1 \mathbf{H}_1 x_j(t - \tau_1) \\
&\quad (N^* + 1 \leq i \leq N), \quad (6)
\end{aligned}$$

其中,  $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2: R^n \rightarrow R^n$  是不同的连续可微函数.

类似地给出如下假设:

假设 2 存在正的常数  $\beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2$  满足

$$\|\mathbf{g}_1(y) - \mathbf{g}_1(x)\| \leq \beta_1 \|y - x\|,$$

$$\|\mathbf{h}_1(y) - \mathbf{h}_1(x)\| \leq \gamma_1 \|y - x\|,$$

$$\|\mathbf{g}_2(y) - \mathbf{g}_2(x)\| \leq \beta_2 \|y - x\|,$$

$$\|\mathbf{h}_2(y) - \mathbf{h}_2(x)\| \leq \gamma_2 \|y - x\|,$$

这里  $x, y$  是向量.

构造如下的参考网络模型:

$$\begin{aligned}
\dot{\hat{x}}_i &= \mathbf{g}_1(\hat{x}_i) + \mathbf{g}_2(\hat{x}_i(t - \tau)) \\
&+ \sum_{j=1}^N \hat{a}_{ij}^0 \mathbf{H}_0 \hat{x}_j + \sum_{j=1}^N \hat{a}_{ij}^1 \mathbf{H}_1 \hat{x}_j(t - \tau_1) \\
&+ \mathbf{u}_i \quad (1 \leq i \leq N^*), \\
\dot{\hat{x}}_i &= \mathbf{h}_1(\hat{x}_i) + \mathbf{h}_2(\hat{x}_i(t - \tau)) \\
&+ \sum_{j=1}^N \hat{a}_{ij}^0 \mathbf{H}_0 \hat{x}_j + \sum_{j=1}^N \hat{a}_{ij}^1 \mathbf{H}_1 \hat{x}_j(t - \tau_1) \\
&+ \mathbf{u}_i \quad (N^* + 1 \leq i \leq N),
\end{aligned} \quad (7)$$

则有如下结论:

定理 2 若假设 2 成立, 那么存在如下控制器和参数估计器, 使网络 (7) 和 (6) 同步:

$$\begin{aligned}
\dot{\hat{a}}_{ij}^0 &= -\tilde{x}_i^T \mathbf{H}_0 \hat{x}_j \quad (1 \leq i, j \leq N), \\
\dot{\hat{a}}_{ij}^1 &= -\tilde{x}_i^T \mathbf{H}_1 \hat{x}_j(t - \tau_1) \quad (1 \leq i, j \leq N), \\
\mathbf{u}_i &= -e_i \tilde{x}_i \quad (1 \leq i \leq N), \\
\dot{e}_i &= l_i \|\tilde{x}_i\|^2 \quad (1 \leq i \leq N), \quad (8)
\end{aligned}$$

其中,  $l_i (1 \leq i \leq N)$  是正常数.

证明 由 (7) 和 (6), 可得到如下误差系统:

$$\begin{aligned}
\dot{\tilde{x}}_i &= \mathbf{g}_1(\hat{x}_i) - \mathbf{g}_1(x_i) + \mathbf{g}_2(\hat{x}_i(t - \tau)) \\
&- \mathbf{g}_2(x_i(t - \tau)) + \sum_{j=1}^N \tilde{a}_{ij}^0 \mathbf{H}_0 \hat{x}_j + \sum_{j=1}^N a_{ij}^0 \mathbf{H}_0 \tilde{x}_j \\
&+ \sum_{j=1}^N \tilde{a}_{ij}^1 \mathbf{H}_1 \hat{x}_j(t - \tau_1) \\
&+ \sum_{j=1}^N a_{ij}^1 \mathbf{H}_1 \tilde{x}_j(t - \tau_1) + \mathbf{u}_i \quad (1 \leq i \leq N^*), \\
\dot{\tilde{x}}_i &= \mathbf{h}_1(\hat{x}_i) - \mathbf{h}_1(x_i) + \mathbf{h}_2(\hat{x}_i(t - \tau)) \\
&- \mathbf{h}_2(x_i(t - \tau)) + \sum_{j=1}^N \tilde{a}_{ij}^0 \mathbf{H}_0 \hat{x}_j + \sum_{j=1}^N a_{ij}^0 \mathbf{H}_0 \tilde{x}_j \\
&+ \sum_{j=1}^N \tilde{a}_{ij}^1 \mathbf{H}_1 \hat{x}_j(t - \tau_1) + \sum_{j=1}^N a_{ij}^1 \mathbf{H}_1 \tilde{x}_j(t - \tau_1) \\
&+ \mathbf{u}_i \quad (N^* + 1 \leq i \leq N).
\end{aligned}$$

选择 Lyapunov 函数如下:

$$\begin{aligned}
V &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \tilde{x}_i^T \tilde{x}_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (\tilde{a}_{ij}^0)^2 \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (\tilde{a}_{ij}^1)^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \frac{1}{l_i} (e_i - e^*)^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \beta_2 \sum_{i=1}^{N^*} \int_{t-\tau}^t \tilde{\mathbf{x}}_i^T(s) \tilde{\mathbf{x}}_i(s) ds \\
 & + \gamma_2 \sum_{i=1+N^*}^N \int_{t-\tau}^t \tilde{\mathbf{x}}_i^T(s) \tilde{\mathbf{x}}_i(s) ds \\
 & + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N a_i \int_{t-\tau_1}^t \tilde{\mathbf{x}}_i^T(s) \tilde{\mathbf{x}}_i(s) ds ,
 \end{aligned}$$

这里  $e^*$  是个足够大的确定的正常数.

由假设 2 成立,可得到沿系统轨线  $V$  对  $t$  的导数如下:

$$\begin{aligned}
 \dot{V} = & \sum_{i=1}^{N^*} \tilde{\mathbf{x}}_i^T \dot{\tilde{\mathbf{x}}}_i + \sum_{i=N^*+1}^N \tilde{\mathbf{x}}_i^T \dot{\tilde{\mathbf{x}}}_i + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \tilde{a}_{ij}^0 \dot{\tilde{a}}_{ij}^0 \\
 & + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \tilde{a}_{ij}^1 \dot{\tilde{a}}_{ij}^1 + \sum_{i=1}^N \frac{1}{l_i} (e_i - e^*) \dot{e}_i \\
 & + \beta_2 \sum_{i=1}^{N^*} [ \tilde{\mathbf{x}}_i^T \tilde{\mathbf{x}}_i - \tilde{\mathbf{x}}_i^T(t-\tau) \tilde{\mathbf{x}}_i(t-\tau) ] \\
 & + \gamma_2 \sum_{i=1+N^*}^N [ \tilde{\mathbf{x}}_i^T \tilde{\mathbf{x}}_i - \tilde{\mathbf{x}}_i^T(t-\tau) \tilde{\mathbf{x}}_i(t-\tau) ]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N a_i [ \tilde{\mathbf{x}}_i^T \tilde{\mathbf{x}}_i - \tilde{\mathbf{x}}_i^T(t-\tau_1) \tilde{\mathbf{x}}_i(t-\tau_1) ] \\
 \leq & \sum_{i=1}^{N^*} \beta_1 \| \tilde{\mathbf{x}}_i \|^2 + \sum_{i=1}^{N^*} \beta_2 \| \tilde{\mathbf{x}}_i \| \| \tilde{\mathbf{x}}_i(t-\tau) \| \\
 & + \sum_{i=N^*+1}^N \gamma_1 \| \tilde{\mathbf{x}}_i \|^2 + \sum_{i=N^*+1}^N \gamma_2 \| \tilde{\mathbf{x}}_i \| \| \tilde{\mathbf{x}}_i(t-\tau) \| \\
 & + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_{ij}^0 \tilde{\mathbf{x}}_i^T \mathbf{H}_0 \tilde{\mathbf{x}}_j + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_{ij}^1 \tilde{\mathbf{x}}_i^T \mathbf{H}_1 \tilde{\mathbf{x}}_j(t-\tau_1) \\
 & - \sum_{i=1}^N e_i \| \tilde{\mathbf{x}}_i \|^2 + \sum_{i=1}^N (e_i - e^*) \| \tilde{\mathbf{x}}_i \|^2 \\
 & + \beta_2 \sum_{i=1}^{N^*} [ \tilde{\mathbf{x}}_i^T \tilde{\mathbf{x}}_i - \tilde{\mathbf{x}}_i^T(t-\tau) \tilde{\mathbf{x}}_i(t-\tau) ] \\
 & + \gamma_2 \sum_{i=1+N^*}^N [ \tilde{\mathbf{x}}_i^T \tilde{\mathbf{x}}_i - \tilde{\mathbf{x}}_i^T(t-\tau) \tilde{\mathbf{x}}_i(t-\tau) ] \\
 & + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N a_i [ \tilde{\mathbf{x}}_i^T \tilde{\mathbf{x}}_i - \tilde{\mathbf{x}}_i^T(t-\tau_1) \tilde{\mathbf{x}}_i(t-\tau_1) ] \\
 \leq & \tilde{\mathbf{X}}^T \mathbf{Q} \tilde{\mathbf{X}} ,
 \end{aligned}$$

这里,

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \left( \beta_1 - e^* + \frac{5}{4} \beta_2 + \frac{N^*}{2} \| \mathbf{H}_1 \|^2 \right) \mathbf{I}_{N^*} + \mathbf{B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \left( \gamma_1 - e^* + \frac{5}{4} \gamma_2 + \frac{N-N^*}{2} \| \mathbf{H}_1 \|^2 \right) \mathbf{I}_{(N-N^*)} + \mathbf{C} \end{pmatrix} + \mathbf{A}^0 \otimes \mathbf{H}_0$$

其中,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{B} & = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a_1 \mathbf{I}_n & \dots & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & \dots & a_{N^*} \mathbf{I}_n \end{pmatrix}, \\
 \mathbf{C} & = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a_{N^*+1} \mathbf{I}_n & \dots & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & \dots & a_N \mathbf{I}_n \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

显然,当正的常数  $e^*$  足够大时,矩阵  $\mathbf{Q}$  是负定的,所以,定理得证.

### 3.2. $m \geq 3$ 时的网络自适应同步

子网络个数  $m=2$  的结论,同理可推广到  $m \geq 3$  时的融合复杂动态网络.

当  $m \geq 3$  的时候,对于系统(1),可构造如下的网络参考模型:

$$\begin{aligned}
 \dot{\hat{\mathbf{x}}}_i & = f_1(\hat{\mathbf{x}}_i) + f_2(\hat{\mathbf{x}}_i(t-\tau)) \\
 & + \sum_{j=1}^N \hat{a}_{ij}^0 \mathbf{H}_0 \hat{\mathbf{x}}_j + \sum_{j=1}^N \hat{a}_{ij}^1 \mathbf{H}_1 \hat{\mathbf{x}}_j(t-\tau_1) \\
 & + \dots + \sum_{j=1}^N \hat{a}_{ij}^{m-1} \mathbf{H}_{m-1} \hat{\mathbf{x}}_j(t-\tau_{m-1})
 \end{aligned}$$

$$+ \mathbf{u}_i \quad (i = 1, 2, \dots, N). \tag{9}$$

与定理 1 的证明思想相同,可有如下结论:

**定理 3** 若假设 1 成立,那么存在如下控制器和参数估计器,使网络(9)和(1)同步:

$$\begin{aligned}
 \dot{\hat{a}}_{ij}^0 & = - \tilde{\mathbf{x}}_i^T \mathbf{H}_0 \hat{\mathbf{x}}_j \quad (1 \leq i, j \leq N), \\
 \dot{\hat{a}}_{ij}^1 & = - \tilde{\mathbf{x}}_i^T \mathbf{H}_1 \hat{\mathbf{x}}_j(t-\tau_1) \quad (1 \leq i, j \leq N),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{\hat{a}}_{ij}^{m-1} & = - \tilde{\mathbf{x}}_i^T \mathbf{H}_{m-1} \hat{\mathbf{x}}_j(t-\tau_{m-1}) \quad (1 \leq i, j \leq N), \\
 \mathbf{u}_i & = - d_i \tilde{\mathbf{x}}_i \quad (1 \leq i \leq N), \\
 \dot{d}_i & = k_i \| \tilde{\mathbf{x}}_i \|^2 \quad (1 \leq i \leq N),
 \end{aligned} \tag{10}$$

其中  $k_i (1 \leq i \leq N)$  是正常数.

证明 略.

对于具有不同的动态节点组成的融合复杂动态网络(2),可构造如下的参考网络模型:

$$\begin{aligned}
 \dot{\hat{\mathbf{x}}}_i & = \mathbf{g}_1(\hat{\mathbf{x}}_i) + \mathbf{g}_2(\hat{\mathbf{x}}_i(t-\tau)) \\
 & + \sum_{j=1}^N \hat{a}_{ij}^0 \mathbf{H}_0 \hat{\mathbf{x}}_j + \sum_{j=1}^N \hat{a}_{ij}^1 \mathbf{H}_1 \hat{\mathbf{x}}_j(t-\tau_1) +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \dots + \sum_{j=1}^N \hat{a}_{ij}^{m-1} \mathbf{H}_{m-1} \hat{\mathbf{x}}_j(t - \tau_{m-1}) \\
& + \mathbf{u}_i \quad (1 \leq i \leq N^*), \\
\dot{\hat{\mathbf{x}}}_i & = \mathbf{h}_1(\hat{\mathbf{x}}_i) + \mathbf{h}_2(\hat{\mathbf{x}}_i(t - \tau)) \\
& + \sum_{j=1}^N \hat{a}_{ij}^0 \mathbf{H}_0 \hat{\mathbf{x}}_j + \sum_{j=1}^N \hat{a}_{ij}^1 \mathbf{H}_1 \hat{\mathbf{x}}_j(t - \tau_1) + \\
& \dots + \sum_{j=1}^N \hat{a}_{ij}^{m-1} \mathbf{H}_{m-1} \hat{\mathbf{x}}_j(t - \tau_{m-1}) \\
& + \mathbf{u}_i \quad (N^* + 1 \leq i \leq N). \quad (11)
\end{aligned}$$

与定理 2 的证明思想相同,可有如下结论:

**定理 4** 若假设 2 成立,那么存在如下控制器和参数估计器,使网络 (11) 和 (2) 同步:

$$\begin{aligned}
\dot{\hat{a}}_{ij}^0 & = -\tilde{\mathbf{x}}_i^T \mathbf{H}_0 \hat{\mathbf{x}}_j \quad (1 \leq i, j \leq N), \\
\dot{\hat{a}}_{ij}^1 & = -\tilde{\mathbf{x}}_i^T \mathbf{H}_1 \hat{\mathbf{x}}_j(t - \tau_1) \quad (1 \leq i, j \leq N), \\
\dot{\hat{a}}_{ij}^{m-1} & = -\tilde{\mathbf{x}}_i^T \mathbf{H}_{m-1} \hat{\mathbf{x}}_j(t - \tau_{m-1}) \quad (1 \leq i, j \leq N), \\
\mathbf{u}_i & = -e_i \tilde{\mathbf{x}}_i \quad (1 \leq i \leq N), \\
\dot{e}_i & = l_i \|\tilde{\mathbf{x}}_i\|^2 \quad (1 \leq i \leq N), \quad (12)
\end{aligned}$$

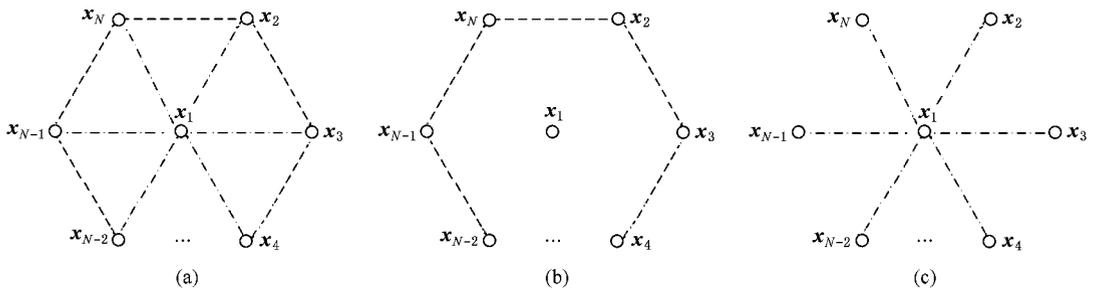


图 2 模型 (13) 及拆分后的网络拓扑结构 (a) 二个子网融合 (b) 环型子网 (c) 星射线子网

$$\begin{aligned}
\dot{\hat{\mathbf{x}}}_i & = \mathbf{f}_1(\hat{\mathbf{x}}_i) + \mathbf{f}_2(\hat{\mathbf{x}}_i(t - \tau)) + \\
& \sum_{j=1}^{1000} \hat{a}_{ij}^0 \mathbf{H}_0 \hat{\mathbf{x}}_j + \sum_{j=1}^{1000} \hat{a}_{ij}^1 \mathbf{H}_1 \hat{\mathbf{x}}_j(t - \tau_1) \\
& + \mathbf{u}_i \quad (1 \leq i \leq 1000). \quad (14)
\end{aligned}$$

由定理 1,采用如下控制器和参数估计器时,参考网络 (14) 与原始网络 (13) 能达到同步,有

$$\begin{aligned}
\dot{\hat{a}}_{ij}^0 & = -\tilde{\mathbf{x}}_i^T \mathbf{H}_0 \hat{\mathbf{x}}_j \quad (1 \leq i, j \leq 1000), \\
\dot{\hat{a}}_{ij}^1 & = -\tilde{\mathbf{x}}_i^T \mathbf{H}_1 \hat{\mathbf{x}}_j(t - \tau_1) \quad (1 \leq i, j \leq 1000), \\
\mathbf{u}_i & = -e_i \tilde{\mathbf{x}}_i \quad (1 \leq i \leq 1000), \\
\dot{e}_i & = l_i \|\tilde{\mathbf{x}}_i\|^2 \quad (1 \leq i \leq 1000), \quad (15)
\end{aligned}$$

其中  $l_i = 1000000$  ( $1 \leq i \leq 1000$ ),  $e_i(0) = 1$ ,  $\hat{a}_{ij}^0(0) = \hat{a}_{ij}^1(0) = 0$  ( $1 \leq i, j \leq 1000$ ), 得到误差  $\tilde{\mathbf{x}}_i = \hat{\mathbf{x}}_i - \mathbf{x}_i$  ( $1 \leq i \leq 1000$ ) 的曲线如图 3 所示. 可见  $\tilde{\mathbf{x}}_i \rightarrow 0$ ,  $1 \leq$

其中,  $l_i$  ( $1 \leq i \leq N$ ) 是正常数.

证明 略.

## 4. 数值仿真

### 4.1. $m = 2$ 时含有相同节点的融合复杂网络

考虑一个由  $N = 1000$  个相同节点系统组成的融合复杂网络,当  $m = 2$  时网络方程 (3) 可写为

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{x}}_i & = \mathbf{f}_1(\mathbf{x}_i) + \mathbf{f}_2(\mathbf{x}_i(t - \tau)) + \sum_{j=1}^{1000} a_{ij}^0 \mathbf{H}_0 \mathbf{x}_j \\
& + \sum_{j=1}^{1000} a_{ij}^1 \mathbf{H}_1 \mathbf{x}_j(t - \tau_1) \quad (1 \leq i \leq 1000) \quad (13)
\end{aligned}$$

其中  $\mathbf{f}_1(\mathbf{x}_i) = -2\mathbf{x}_i$ ,  $\mathbf{f}_2(\mathbf{x}_i(t - \tau)) = 9 \sin(\mathbf{x}_i(t - \tau))$ ,  $\tau = \tau_1 = 0.05$ , 取  $\mathbf{H}_0 = \mathbf{H}_1 = \mathbf{1}$ . 两个子网的连接方式分别取环网和星射线网,  $\mathbf{A}^l = (a_{ij}^l)_{N \times N}$  ( $l = 0, 1$ ) 为满足耗散耦合条件的对称矩阵,连接权值随机选取,最大不超过 0.1, 网络拓扑及其拆分后的网络如图 2 所示.

构造如下参考网络模型:

$i \leq 1000$ , 实现了网络同步.

### 4.2. $m \geq 3$ 时含有不同节点的融合复杂网络

考虑由 1000 个不同节点系统组成的融合复杂网络,当  $m = 3$  时模型可以写为

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{x}}_i & = \mathbf{g}_1(\mathbf{x}_i) + \mathbf{g}_2(\mathbf{x}_i(t - \tau)) \\
& + \sum_{j=1}^{1000} a_{ij}^0 \mathbf{H}_0 \mathbf{x}_j + \sum_{j=1}^{1000} a_{ij}^1 \mathbf{H}_1 \mathbf{x}_j(t - \tau_1) \\
& + \sum_{j=1}^{1000} a_{ij}^2 \mathbf{H}_2 \mathbf{x}_j(t - \tau_2) \quad (1 \leq i \leq 600),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{x}}_i & = \mathbf{h}_1(\mathbf{x}_i) + \mathbf{h}_2(\mathbf{x}_i(t - \tau)) \\
& + \sum_{j=1}^{1000} a_{ij}^0 \mathbf{H}_0 \mathbf{x}_j + \sum_{j=1}^{1000} a_{ij}^1 \mathbf{H}_1 \mathbf{x}_j(t - \tau_1) \\
& + \sum_{j=1}^{1000} a_{ij}^2 \mathbf{H}_2 \mathbf{x}_j(t - \tau_2) \quad (601 \leq i \leq 1000) \quad (16)
\end{aligned}$$

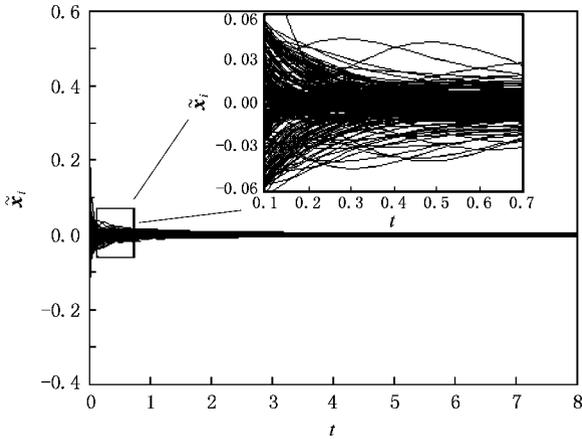


图 3 相同节点时的误差曲线  $\tilde{x}_i$  ( $1 \leq i \leq 1000$ ) 内插图是  $0.1 \leq t \leq 0.7$  上  $\tilde{x}_i$  的放大

其中  $g_1(x_i) = h_1(x_i) = -2x_i$ ,  $g_2(x_i(t - \tau)) = 9 \times \sin(x_i(t - \tau))$ ,  $h_2(x_i(t - \tau)) = 2x_i(t - \tau)$ ,  $\tau = \tau_1 = 0.05$ ,  $\tau_2 = 0.1$ , 仍取  $H_0 = H_1 = H_2 = 1$ .

$A^l$  ( $l = 0, 1, 2$ ) 为满足耗散耦合条件的对称矩阵, 连接权值随机选取, 最大不超过 0.1, 该网络拓扑及其拆分后三个子网的网络拓扑如图 4 所示.

构造如下参考网络模型:

$$\dot{\hat{x}}_i = g_1(\hat{x}_i) + g_2(\hat{x}_i(t - \tau))$$

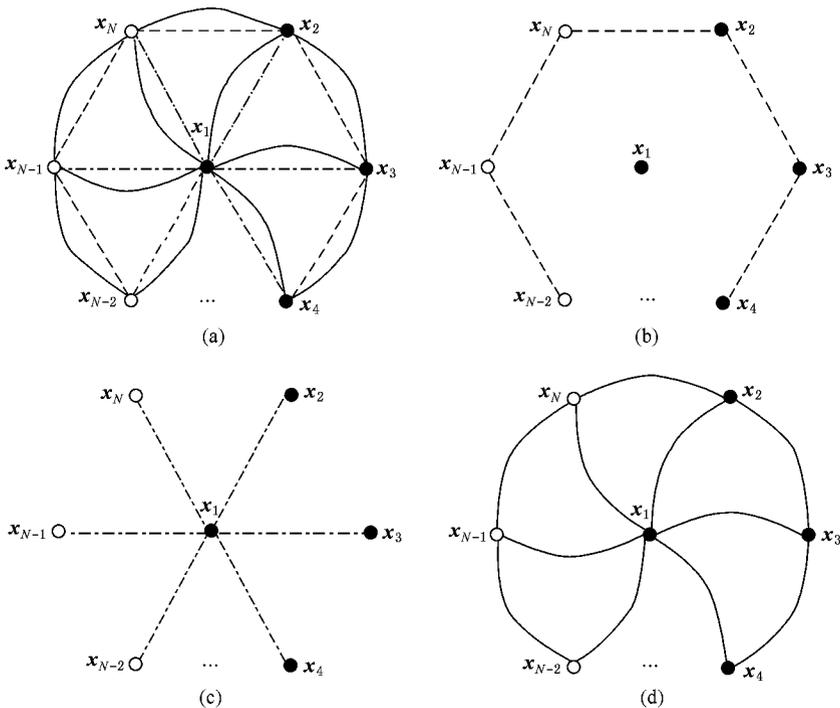


图 4 模型 (16) 及拆分后的网络拓扑结构 (a) 不同节点三个子网融合 (b) 环型子网 (c) 星射线子网 (d) 环与星线子网

$$\begin{aligned} & + \sum_{j=1}^{1000} \hat{a}_{ij}^0 H_0 \hat{x}_j + \sum_{j=1}^{1000} \hat{a}_{ij}^1 H_1 \hat{x}_j(t - \tau_1) \\ & + \sum_{j=1}^{1000} \hat{a}_{ij}^2 H_2 \hat{x}_j(t - \tau_2) + u_i \quad (1 \leq i \leq 600), \\ \dot{\hat{x}}_i & = h_1(\hat{x}_i) + h_2(\hat{x}_i(t - \tau)) \\ & + \sum_{j=1}^{1000} \hat{a}_{ij}^0 H_0 \hat{x}_j + \sum_{j=1}^{1000} \hat{a}_{ij}^1 H_1 \hat{x}_j(t - \tau_1) \\ & + \sum_{j=1}^{1000} \hat{a}_{ij}^2 H_2 \hat{x}_j(t - \tau_2) + u_i \\ & \quad (601 \leq i \leq 1000). \end{aligned} \tag{17}$$

由定理 4, 采用如下控制器和参数估计器时, 参考网络 (17) 与原始网络 (16) 能达到同步.

$$\begin{aligned} \dot{\hat{a}}_{ij}^0 & = -\tilde{x}_i^T H_0 \hat{x}_j \quad (1 \leq i, j \leq 1000), \\ \dot{\hat{a}}_{ij}^1 & = -\tilde{x}_i^T H_1 \hat{x}_j(t - \tau_1) \quad (1 \leq i, j \leq 1000), \\ \dot{\hat{a}}_{ij}^2 & = -\tilde{x}_i^T H_2 \hat{x}_j(t - \tau_2) \quad (1 \leq i, j \leq 1000), \\ u_i & = -e_i \tilde{x}_i \quad (1 \leq i \leq 1000), \\ \dot{e}_i & = l_i \|\tilde{x}_i\|^2 \quad (1 \leq i \leq 1000). \end{aligned} \tag{18}$$

取  $l_i = 1000000$  ( $1 \leq i \leq 1000$ ),  $e_i(0) = 1$ ,  $\hat{a}_{ij}^0(0) = \hat{a}_{ij}^1(0) = \hat{a}_{ij}^2(0) = \alpha$  ( $1 \leq i, j \leq 1000$ ), 得到误差  $\tilde{x}_i = \hat{x}_i - x_i$  ( $1 \leq i \leq 1000$ ) 的曲线如图 5 所示, 可见  $\tilde{x}_i \rightarrow 0$  ( $1 \leq i \leq 1000$ ), 实现了网络同步.

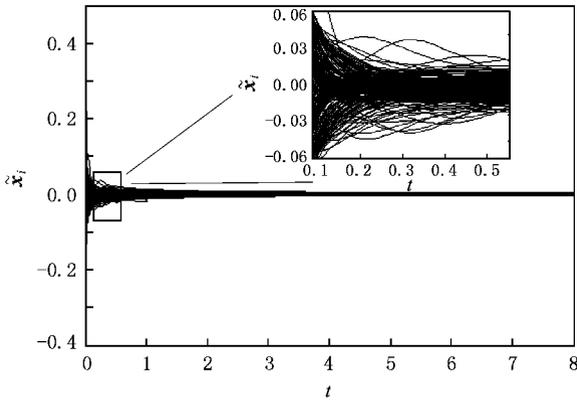


图5 不同节点时的误差曲线  $\tilde{x}_i (1 \leq i \leq 1000)$  内插图是  $0.1 \leq t \leq 0.6$  上  $\tilde{x}_i$  的放大

## 5. 结 论

本文研究了多重边融合复杂动态网络的模型参考自适应同步问题. 根据网络边的性质不同对网络进行了拆分. 运用自适应反馈控制方法, 在网络边的性质数为 2 时, 分别对网络全部节点相同和不同的情况, 给出了网络的模型函数未知并且拓扑结构也是未知的融合网络模型参考自适应全局同步的准则和相应的控制器设计方法. 随后, 将此结论推广到了网络的边具有任意多种性质的一般情况. 最后, 数值仿真验证了本文方法的有效性.

- [1] Jeong H, Tombor B, Albert R, Oltvai Z N, Barabási A L 2000 *Nature* **407** 651
- [2] Jalan S, Amritkar R E 2003 *Phys. Rev. Lett.* **90** 014101
- [3] Fang J Q, Wang X F, Zheng Z G, Li X, Di Z R, Bi Q 2007 *Adv. Phys.* **27** 361 [in Chinese] [方锦清、汪小帆、郑志刚、李翔、狄增如、毕桥 2007 物理学进展 **27** 361]
- [4] Zhao M, Wang B H, Jiang P Q, Zhou T 2005 *Adv. Phys.* **25** 273 [in Chinese] [赵明、汪秉宏、蒋品群、周涛 2005 物理学进展 **25** 273]
- [5] Guo L, Xu X M 2006 *Complex Networks* (Shanghai: Shanghai Scientific and Technological Education Press) [in Chinese] [郭雷、许晓铭. 2006 复杂网络(上海:上海科技教育出版社)]
- [6] Wang X F, Chen G 2003 *J. Systems Science and Complexity* **3** 6
- [7] Gao Y, Li L X, Peng H P, Yang Y X, Zhang X H 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 1444 [in Chinese] [高洋、李丽香、彭海朋、杨义先、张小红 2008 物理学报 **57** 1444]
- [8] Gao Y, Li L X, Peng H P, Yang Y X, Zhang X H 2008 *Acta Phys. Sin.* **58** 2081 [in Chinese] [高洋、李丽香、彭海朋、杨义先、张小红 2008 物理学报 **58** 2081]
- [9] Zhou J, Lu J A 2007 *Physica A* **386** 481
- [10] Li Z, Chen G 2006 *Phys. Lett. A* **324** 166
- [11] Lü J H 2004 *Systems Engineering—Theory & Practice* **4** 17 [in Chinese] [吕金虎 2004 系统工程理论与实践 **4** 17]
- [12] Luo Q, Wu W, Li L X, Yang Y X, Peng H P 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 1529 [in Chinese] [罗群、吴薇、李丽香、杨义先、彭海朋 2008 物理学报 **57** 1529]

# Model reference adaptive synchronization in integration complex dynamical networks<sup>\*</sup>

Luo Qun<sup>†</sup> Gao Ya Qi Ya-Nan Gao Ya Wu Tong Xu Huan Li Li-Xiang Yang Yi-Xian  
( *Information Security Center of State Key Laboratory of Networking and Switching Technology , Key Laboratory of Network  
and Information Attack and Defence Technology of Ministry of Education , National Engineering Laboratory for Disaster Backup  
and Recovery , Beijing University of Posts and Telecommunications , Beijing 100876 , China* )

( Received 4 June 2008 ; revised manuscript received 4 March 2009 )

## Abstract

The adaptive synchronization of integration complex networks is studied , and a network division scheme is introduced according to the nature of different links . Using the Lyapunov stability theory and the adaptive feedback control method , the principle of global synchronization of rather general weighted complex dynamical networks for identical nodes and different nodes and their corresponding controllers is given . Finally , numerical results verify the effectiveness of the proposed method .

**Keywords :** integration networks , adaptive synchronization , Lyapunov stability theory

**PACC :** 0545

<sup>\*</sup> Project supported by the National Natural Science Foundation of China ( Grant Nos . 60805043 , 60821001 ) , the Specialized Research Fund for the Doctoral Program of Higher Education of China ( Grant No . 200800131028 ) , the National Basic Research Program of China ( Grant No . 2007CB310704 ) , the 111 Program ( Grant No . B08004 ) , and the Foundation for the Author of National Excellent Doctoral Dissertation of China ( Grant No . 200951 ) .

<sup>†</sup> E-mail : luoqun@bupt.edu.cn