

一个超混沌六阶蔡氏电路及其硬件实现*

李 亚† 张正明 陶志杰

(电子科技大学中山学院, 中山 528402)

(2008 年 9 月 15 日收到, 2008 年 11 月 26 日收到修改稿)

文章构建了一个新的超混沌六阶蔡氏电路, 计算了该系统的 Lyapunov 指数和维数, 给出了系统的数值仿真相图. 同时, 设计了相应的电子电路并进行了硬件实现, 实验结果与仿真结果完全吻合, 由此证实了该系统不仅存在而且可物理实现.

关键词: 六阶蔡氏电路, 超混沌, 硬件实验, 混沌发生器

PACC: 0545

1. 引 言

蔡氏电路因其开启了从理论研究走向物理实验、应用混沌的大门而成为混沌发展史上的一个重要里程碑. 此后的二十多年来, 围绕典型蔡氏电路的研究取得了一系列的成果^[1-4]. 与此同时, 许多改进的蔡氏电路相继提出, 如变形蔡氏电路^[5]、对偶蔡氏电路^[6]、多涡卷蔡氏电路等^[7,8]. 但研究表明, 利用混沌加密的保密通信中, 低维混沌系统可以被破译而高维的超混沌系统还难以破译^[9,10]. 因此, 围绕超混沌系统的产生与应用成为人们研究的一个热点, 并提出了在四维系统产生混沌与超混沌的若干方法^[11,12], 四阶多涡卷超混沌蔡氏电路^[13]、五阶蔡氏电路^[14]、六阶耦合蔡氏电路^[15]等成果也随之出现.

本文在三阶蔡氏电路的基础上, 借鉴现有高阶电路的研究成果, 构建了一个新的六阶蔡氏电路. 该系统含有六个独立的变量, 仅有一个非线性项. 文章通过计算 Lyapunov 指数和维数, 分析了系统产生混沌的可能性, 并进行了 MATLAB 仿真, 给出了 MATLAB 仿真结果, 同时, 设计了相应的硬件电路, 也给出了硬件电路实验结果. 实验结果与理论分析完全符合, 进一步证实了系统能够产生双涡卷混沌吸引子.

2. 超混沌六阶蔡氏电路

本文在三阶蔡氏电路的基础上, 构建了一个超

混沌六阶蔡氏电路, 其数学模型为

$$\dot{X} = AX + B\Phi(X), \quad (1)$$

其中,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -15 & 0.15 & 15 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.045 & 0 & -0.045 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 90 & -0.9 & -90 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.05 & -3 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} -10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix}, \quad \Phi(X) = \begin{bmatrix} h(x_1) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

系统中只有一个非线性项 $h(x_1) = x_1^3 - 0.015x_1$, 它区别于典型蔡氏电路中的分段线性函数.

由混沌理论可知, Lyapunov 指数是定量描述系统轨线扩张和压缩的量, 通常用其来判断系统是否存在混沌现象. 根据文献[16]提出的算法, 借助 MATLAB 软件计算出该系统的 6 个 Lyapunov 指数如图 1 所示. $\lambda_1 = 0.159343$, $\lambda_2 = 0.154967$, $\lambda_3 = -1.110311$, $\lambda_4 = -1.108888$, $\lambda_5 = -1.532599$, $\lambda_6 =$

* 广东省自然科学基金(批准号: 8152840301000008)资助的课题.

† E-mail: liya2829@163.com

-6.279528. 可以看出随着时间的演化,系统的 Lyapunov 指数趋于一个固定的常数. 该系统的 Lyapunov 维数为

$$D = j + \frac{1}{|\ln L_j|} \sum_{i=1}^j \lambda_i$$

$$= 2 + \frac{0.159343 + 0.154967}{1.110311} = 2.283. \quad (2)$$

系统存在大于零的 Lyapunov 指数,并且 Lyapunov 维数为分数,由此进一步证实了该系统能够产生混沌吸引子.同时,根据超混沌的定义,含有多个正的 Lyapunov 指数的四阶或四阶以上的混沌系统统称为超混沌系统^[13].由此可知,本系统不仅存在混沌现象,而且能产生超混沌.

一个动力系统是否是混沌运动,还可以通过系统的 $K-S$ 熵作出准确判断.因为对确定的规则系统而言,其系统状态是可预测的,故有 $K=0$.对不确定的随机系统,因系统状态是不可预测的,故 $K \rightarrow \infty$.混沌系统属于确定系统,其机理是确定性系统的内在随机性,由于存在 $\lambda_i > 0$,意味着信息量的损失,故 K 为一确定的正数.在高维系统, $K-S$ 熵等于系统所有正的 Lyapunov 指数之和,本系统的 $K = 0.31431$,故本系统是一个混沌系统.

对系统(1)采用龙格-库塔法积分,时间长度 $t = [0 \ 500]$,初始值 $X_0 = [0.01 \ 0.02 \ 0.03 \ -0.01$,

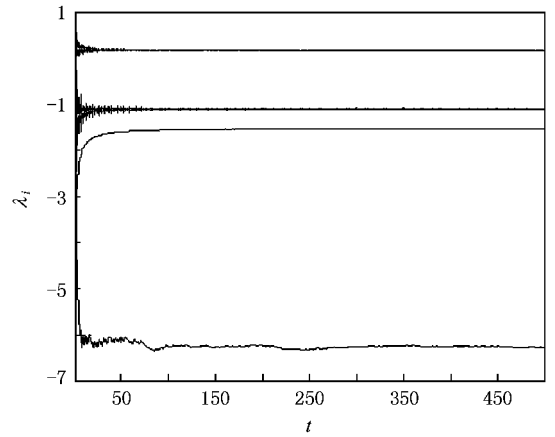


图1 六阶蔡氏系统的 Lyapunov 指数谱

-0.02, -0.03]. 其 MATLAB 仿真结果如图 2 所示 (a)-(f)分别为 $x_1-x_2, x_2-x_3, x_1-x_3, x_3-x_4, x_4-x_5, x_5-x_6$ 六个方向的相图.仿真结果表明,该系统可以产生双涡卷混沌吸引子.

3. 系统的硬件电路设计与实验

根据文献[17]介绍的蔡氏电路设计新方法,对(1)式分别进行了比例压缩变换、微分-积分转换、时间尺度变换,最终得到基于模块化设计的硬件电路

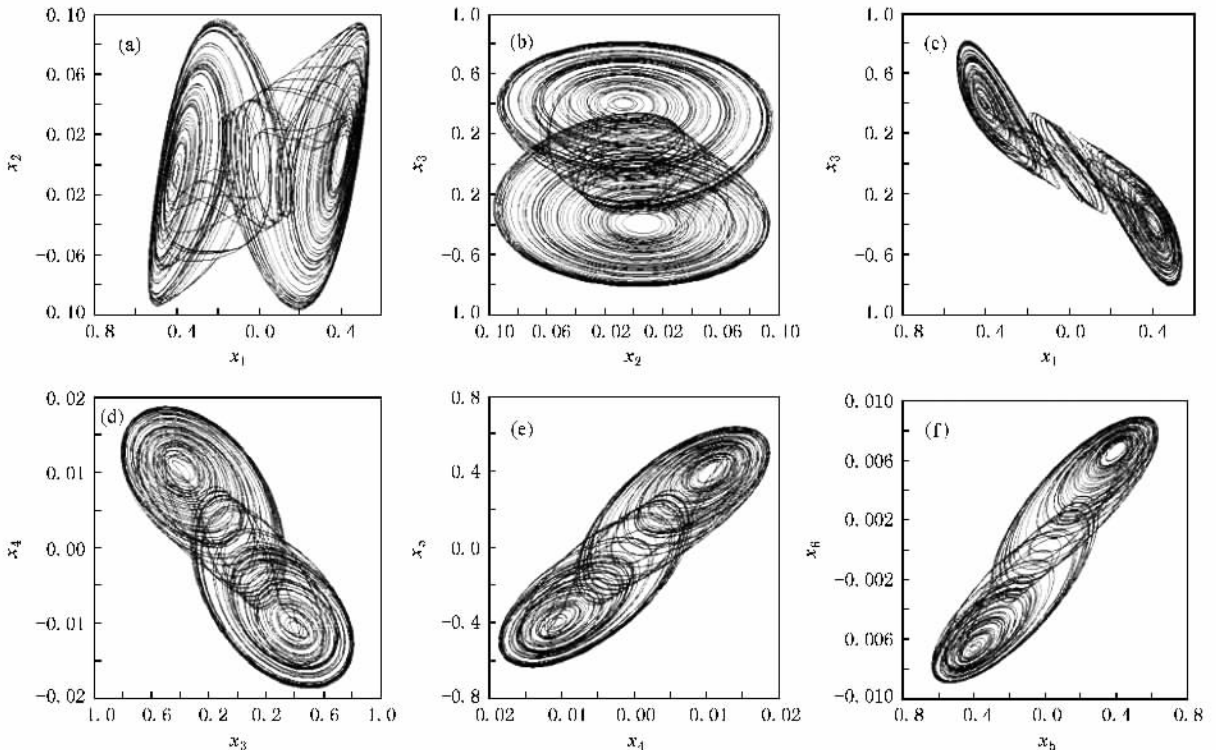


图2 六阶蔡氏电路 MATLAB 仿真结果 (a) x_1-x_2 相图 (b) x_2-x_3 相图 (c) x_1-x_3 相图 (d) x_3-x_4 相图 (e) x_4-x_5 相图 (f) x_5-x_6 相图,

如图 3 所示.

图 3 中的 OP 为运算放大器, 型号为 TL082, 乘法器采用 AD633, 在实验中应注意到 AD633 的增益

为 0.1. 图中所有有源器件的电源电压均为 $\pm 15\text{ V}$, 所有电阻均采用精密可调电阻. 虚线框部分为非线性函数 $h(x_1)$ 产生电路.

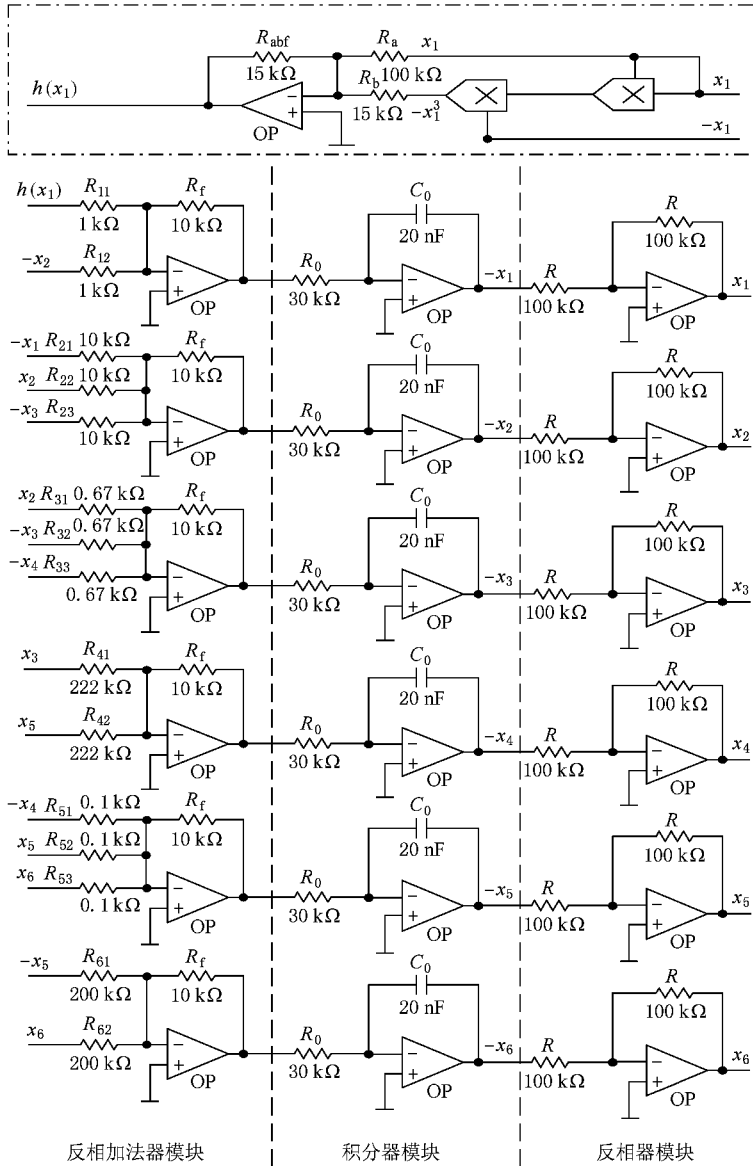


图 3 六阶蔡氏电路硬件电路图

根据图 3, 可得系统的状态方程

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= \frac{1}{R_0 C_0} \int f_1 dt \\
 &= \frac{1}{R_0 C_0} \int \left[-\frac{R_f}{R_{11}} h(x_1) - \frac{R_f}{R_{12}} (-x_2) \right] dt, \\
 \dot{x}_2 &= \frac{1}{R_0 C_0} \int f_2 dt \\
 &= \frac{1}{R_0 C_0} \int \left[-\frac{R_f}{R_{21}} (-x_1) - \frac{R_f}{R_{22}} x_2 - \frac{R_f}{R_{23}} (-x_3) \right] dt, \\
 \dot{x}_3 &= \frac{1}{R_0 C_0} \int f_3 dt
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{R_0 C_0} \int \left[-\frac{R_f}{R_{31}} x_2 - \frac{R_f}{R_{32}} (-x_3) - \frac{R_f}{R_{33}} (-x_4) \right] dt, \\
 \dot{x}_4 &= \frac{1}{R_0 C_0} \int f_4 dt \\
 &= \frac{1}{R_0 C_0} \int \left[-\frac{R_f}{R_{41}} x_3 - \frac{R_f}{R_{42}} x_5 \right] dt, \\
 \dot{x}_5 &= \frac{1}{R_0 C_0} \int f_5 dt \\
 &= \frac{1}{R_0 C_0} \int \left[-\frac{R_f}{R_{51}} (-x_4) - \frac{R_f}{R_{52}} x_5 - \frac{R_f}{R_{53}} x_6 \right] dt,
 \end{aligned}$$

$$x_6 = \frac{1}{R_0 C_0} \int f_6 dt$$

$$= \frac{1}{R_0 C_0} \int \left[-\frac{R_f}{R_{61}}(-x_5) - \frac{R_f}{R_{62}}x_6 \right] dt. \quad (3)$$

进一步对(3)式作时间尺度变换,令 $\tau = t(R_0 C_0)$, 其中 $1/(R_0 C_0)$ 为时间尺度变换因子,同时也是图 3 中积分器的积分常数. 根据实际需要,通过改变 R_0 或 C_0 的大小,从而可改变混沌信号的频谱范围.

基于时间尺度变换,可将(3)式表示为如下无量纲状态方程的形式:

$$x_1 = \int \left[-\frac{R_f}{R_{11}}h(x_1) - \frac{R_f}{R_{12}}(-x_2) \right] d\tau,$$

$$x_2 = \int \left[-\frac{R_f}{R_{21}}(-x_1) - \frac{R_f}{R_{22}}x_2 - \frac{R_f}{R_{23}}(-x_3) \right] d\tau,$$

$$x_3 = \int \left[-\frac{R_f}{R_{31}}x_2 - \frac{R_f}{R_{32}}(-x_3) - \frac{R_f}{R_{33}}(-x_4) \right] d\tau,$$

$$x_4 = \int \left[-\frac{R_f}{R_{41}}x_3 - \frac{R_f}{R_{42}}x_5 \right] d\tau,$$

$$x_5 = \int \left[-\frac{R_f}{R_{51}}(-x_4) - \frac{R_f}{R_{52}}x_5 - \frac{R_f}{R_{53}}x_6 \right] d\tau,$$

$$x_6 = \int \left[-\frac{R_f}{R_{61}}(-x_5) - \frac{R_f}{R_{62}}x_6 \right] d\tau. \quad (4)$$

比较(1)和(4)式,并取 $R_f = 10 \text{ k}\Omega$,便可得系统其他参数.限于篇幅,求解参数的过程略去,各参数取值如图 3 所示.

4. 硬件实验结果

根据图 3 进行了硬件电路实验,得到可产生 6 个双涡卷蔡氏混沌吸引子,其结果如图 4 所示.该实验结果是利用数码相机从模拟示波器上获得的.从左至右依次为 x_1-x_2 , x_2-x_3 , x_1-x_3 , x_3-x_4 , x_4-x_5 , x_5-x_6 六个方向的相图.对比图 2,可以看到,硬件实验结果与计算机仿真结果相符合,进一步证实了该系统不仅能产生混沌,而且是物理可实现的,为今后在工程中的应用提供了可能.

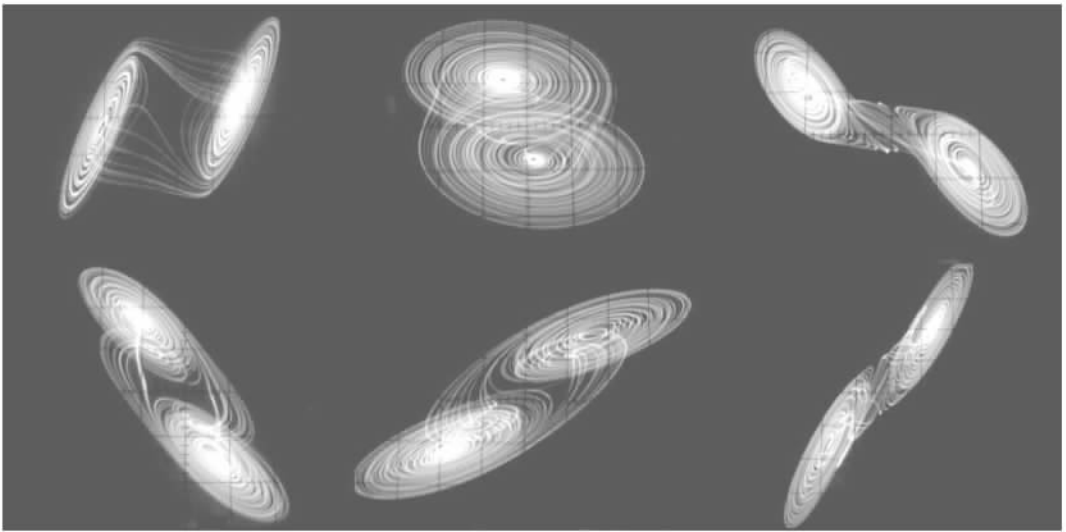


图 4 六阶蔡氏电路硬件实验结果

5. 结 论

通过理论分析、MATLAB 仿真和硬件电路实验得出如下结论:

1) 本文介绍的六阶蔡氏电路仅含一个非线性项 $h(x_1) = x_1^3 - 0.015x_1$,它区别于典型蔡氏电路的分段线性函数.同时,在三阶蔡氏电路的基础上增加了三个方程,构建了一个六阶蔡氏电路,能够产生性态

复杂的超混沌吸引子.

2) 通过计算 Lyapunov 指数和维数,分析了系统能够产生混沌和超混沌,并给出了 MATLAB 仿真结果,证实了系统能够产生双涡卷混沌吸引子.

3) 基于模块化的电路设计方法,设计了六阶蔡氏电路的硬件电路,并进行了硬件实验.硬件实验结果与 MATLAB 仿真结果和理论分析完全符合,进一步证实了六阶蔡氏电路不仅在理论上存在产生混沌的可能,而且可物理实现.

- [1] Dedieu H , Kennedy M P , Hasler M 1993 *IEEE Trans. Circuits Syst. (part-I)* **40** 634
- [2] Kolumban G , Kennedy M P , Chua L O 1998 *IEEE Trans. Circuits Syst. (part-I)* **45** 1129
- [3] Liu J H , Chen G R 2006 *Int. J. Bifurcat. Chaos* **16** 775
- [4] Yang T , Wu C W , Chua L O 1997 *IEEE Trans. Circuits Syst. (part-I)* **44** 469
- [5] Liu C X 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1198 (in Chinese) [刘崇新 2002 物理学报 **51** 1198]
- [6] Yin Y Z 1996 *Int. J. Bifurcat. Chaos* **6** 2101
- [7] Zhong G Q , Man K F , Chen G R 2002 *Int. J. Bifurcat. Chaos* **12** 2907
- [8] Yu S M , Qiu S S 2003 *Sci. Chin. Ser. E* **33** 365 (in Chinese) [禹思敏、丘水生 2003 中国科学 E 辑 **33** 365]
- [9] Short K M 1994 *Int. J. Bifurcat. Chaos* **4** 959
- [10] Short K M 1996 *Int. J. Bifurcat. Chaos* **6** 367
- [11] Yin Y Z 1997 *Int. J. Bifurcat. Chaos* **7** 1401
- [12] Yue L J , Chen Y Y , Peng J H 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 2097 (in Chinese) [岳丽娟、陈艳艳、彭建华 2001 物理学报 **50** 2097]
- [13] Yu S M , Lin Q H , Qiu S S 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 25 [禹思敏、林清华、丘水生 2003 物理学报 **52** 25]
- [14] Yu S M , Yu Z D 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 6859 (in Chinese) [禹思敏、禹之鼎 2008 物理学报 **57** 6859]
- [15] Cafagna D , Grassi G 2003 *Int. J. Bifurcat. Chaos* **13** 9
- [16] Wolf A , Swift J B , Swinney H L , Vastano J A 1985 *Physica D* **16** 285
- [17] Li Y , Yu S M , Dai Q Y , Liu M H , Liu Q 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3938 (in Chinese) [李 亚、禹思敏、戴青云、刘明华、刘 庆 2006 物理学报 **55** 3938]

A hyperchaotic sixth-order Chua 's circuit and its hardware implementation *

Li Ya[†] Zhang Zheng-Ming Tao Zhi-Jie

(University of Electronic Science and Technology of China Zhongshan Institute , Zhongshan 528402 , China)

(Received 15 September 2008 ; revised manuscript received 26 November 2008)

Abstract

A new sixth-order hyperchaotic Chua 's circuit is presented , and the Lyapunov exponent , the dimension , and the phase diagram are computed by MATLAB. At the same time , the corresponding electronic circuit is realized , and our results are in agreement with the results of simulation , which proves that this system exists and can be realized in physics.

Keywords : sixth-order Chua 's circuit , hyperchaotic system , hardware experiment , chaos generator

PACC : 0545

* Project supported by the Natural Science Foundation of Guangdong Province , China (Grant No. 8152840301000008).

[†] E-mail : liya2829@163.com