

# 利用蜂拥控制算法的反馈方法控制时空混沌\*

周建槐 邓敏艺 唐国宁 孔令江 刘慕仁†

(广西师范大学物理科学与技术学院, 桂林 541004)

(2008 年 9 月 25 日收到, 2009 年 2 月 20 日收到修改稿)

以一维复数 Ginzburg-Landau 方程系统为模型, 研究时空混沌系统的可控性. 基于蜂拥控制算法思想, 提出了一种反馈控制方法. 数值模拟结果表明, 无论是选择空间均匀周期解, 还是选择行波解为控制目标态, 只要选择合适的控制强度, 被研究的时空混沌系统都能被控制到有序的状态. 最后, 利用空间的关联函数解析其控制机制.

关键词: Ginzburg-Landau 方程, 时空混沌, 关联函数

PACC: 0545 A752

## 1. 引言

近年来, 随着人们对混沌运动的规律及其在自然科学各个领域的表现的认识的不断丰富<sup>[1-4]</sup>, 混沌研究也由最初研究简单混沌向研究复杂的时空混沌迈进. 复数 Ginzburg-Landau 方程 (CGLE) 是一个重要的非线性偏微分方程, 随着选择参数的变化, CGLE 展现了丰富的动力学行为. 围绕 CGLE, 人们做了许多的研究, 文献 [5-7] 在理论和数值上详细地讨论了一维和二维 CGLE 在不同参数下的状态和相图. 长期以来, 研究者都在寻找各种方法去控制 CGLE 系统的时空混沌, 例如: 利用钉轧<sup>[8]</sup>控制二维复数 Ginzburg-Landau 方程斑图的形状, 利用时间延迟与空间移位反馈<sup>[9]</sup>通过调整反馈强度和延时时间控制混沌状态. 本文基于 Olfati-Saber 的蜂拥控制算法思想<sup>[10, 11]</sup>, 提出了用一种耦合反馈控制方法来控制 CGLE 系统的时空混沌. 数值模拟和解析结果表明, 只要选择合适的控制参数, 该方法就能有效地将时空混沌态控制到有序的周期态.

## 2. 模型和数值模拟方法

一维复数 Ginzburg-Landau 方程系统为

$$\partial_t A = A + (1 + ic_1) \partial_x^2 A - (1 + ic_2) |A|^2 A. \quad (1)$$

它可以描述各类反应扩散系统发生超临界均匀 Hopf 分岔时在分叉点附近的行为, 是研究时空混沌和湍流的常用模型<sup>[12-14]</sup>, 其中  $A$  为方程的复变量,

$c_1$  和  $c_2$  均为方程的两个可变的实数参数. 方程 (1) 具有以下的行波解<sup>[15]</sup>:

$$A(x, t) = A_0 e^{ikx + i\omega t},$$
$$k = \frac{2n\pi}{L} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad (2)$$

其中  $A_0 = \sqrt{1 - k^2}$ ,  $\omega = c_2 + (c_1 - c_2)k^2$ .

对于 CGLE 系统, 在本文中数值模拟选取参数  $c_1 = 2.1$ ,  $c_2 = -1.5$ , 系统尺寸  $L = 50$ , 采用周期边界条件  $A(x, t) = A(x + L, t)$ . 同时空间离散成  $N = 100$  个网格点, 即空间步长始终取为  $\Delta x = L/N = 0.5$ , 时间步长取为  $\Delta t = 0.005$ . 演化初始值取  $A(x, 0) = \sqrt{1 - k^2} e^{ikx}$  (其中  $k = \frac{2n\pi}{L}$ ,  $n = 2$ ), 如图 1(a) 所示. 而图 1(b) 给出了方程 (1) 所描述的复数  $A$  的实部的时空图, 从图中可以看到, CGLE 系统处于缺陷湍流态<sup>[15]</sup>. 系统的行为在时间和空间上都呈现出非常混乱的运动形态. 以下我们将利用基于蜂拥控制算法思想的反馈方法来控制图 1(b) 所描述的混沌态.

## 3. 数值模拟结果

为了控制 CGLE 系统的缺陷湍流态, 我们把混沌控制问题转化为复杂网络的控制问题. 其思想方法如下: 把计算网格中每个格点的  $A$  形象比作一个智能体的运动速度,  $A$  的空间分布代表这个多智能体网络的速度分布, 在网络中选择一个智能体作为引导者, 让其他的智能体以它为首共同地随它一起运动. 也就是说, 每一个智能体通过将自己的速度与

\* 国家自然科学基金 (批准号: 10765002, 10762005, 10562001) 和广西省研究生教育创新计划 (批准号: 2008106020702M241) 资助的课题.

† 通讯联系人, E-mail: jmlmr@mailbox.gxnu.edu.cn

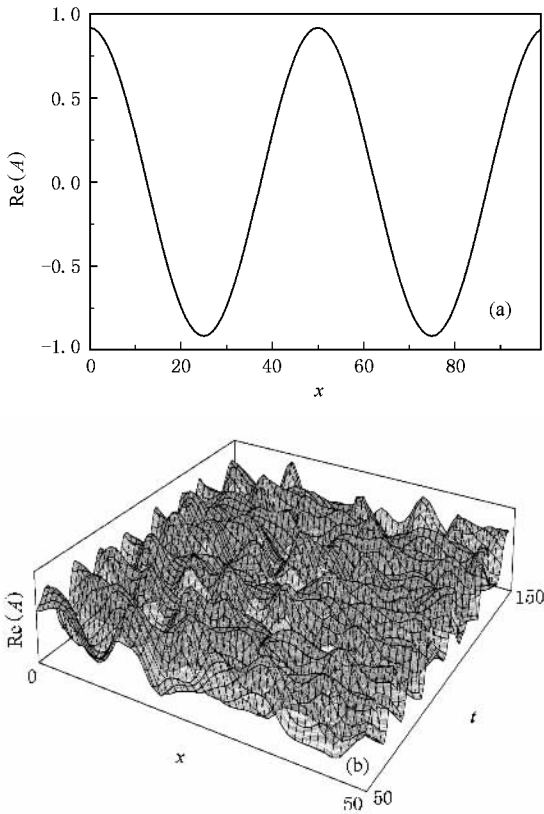


图1 方程(1)的动力学行为  $c_1 = 2.1, c_2 = -1.5$  (a)  $\text{Re}(A(x, 0))$  的初始值 (b) 系统变量  $\text{Re}(A(x, t))$  的时空演化图

引导者的速度比较来自动调节自己的速度. 显然, 这种行为可以导致网络中的所有个体具有相同的运动速度, 从而使智能体做有序运动. 基于此控制思想, 方程(1)在加入反馈控制项后可写为

$$\partial_t A = A + (1 + ic_1) \partial_x^2 A - (1 + ic_2) |A|^2 A - g \sum_{q=1}^{N/M} \alpha(x_i - x_{Mq}) (A - \phi), \quad (3)$$

其中  $g$  是反馈控制强度,  $M$  是反馈控制间隔长度,  $N/M$  是控制器的数目,  $\phi$  是要选取的控制目标态. 同时, 为了刻画控制 CGLE 系统的时空混沌态到有序状态的程度, 定义控制效果因子为

$$\rho(g) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \left| |A_i(t)| - \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} |A_i(t)| \right| dt \quad (4)$$

当  $\rho \rightarrow 0$  时, 说明处于强时空混沌态的系统得到很好的控制; 若  $\rho$  保持较大的值, 则说明控制是无效的. 以下讨论了以两种解为目标态研究 CGLE 时空混沌系统的可控性.

情形 1 选取  $\phi = A(0, t)$  ( $A(x, t) = A_0 e^{(kx + \omega t)}$ ,  $k=0$ ) 的空间均匀周期解为目标态的情况. 首先考虑全局控制, 即反馈控制间隔长度  $M=1$ . 图 2(a) 给出了控制效果因子  $\rho$  随控制强度  $g$  的变化, 从图中

可看出, 当控制强度  $g \geq 0.3$  时, 效果因子  $\rho$  大约等于 0. 为了从直观上观察系统的控制效果, 在取控制强度  $g=1.0$  的情况下, 图 2(b) 给出了系统变量  $A$  的实部时空图. 从图中的结果可知, 这种以空间均匀周期解为目标态的全局耦合控制能有效抑制时空混沌, 当时空混沌被抑制后, 系统达到一个均匀的周期振荡的有序态.

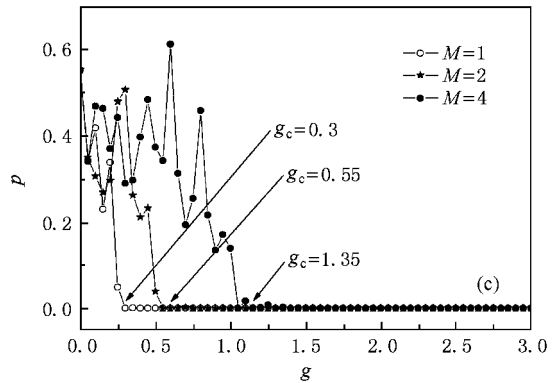
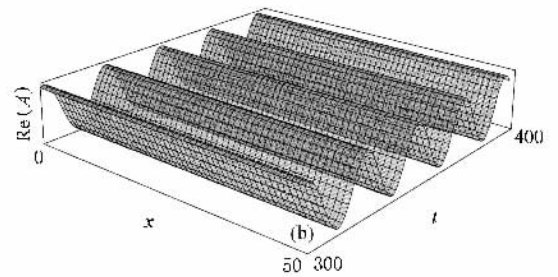
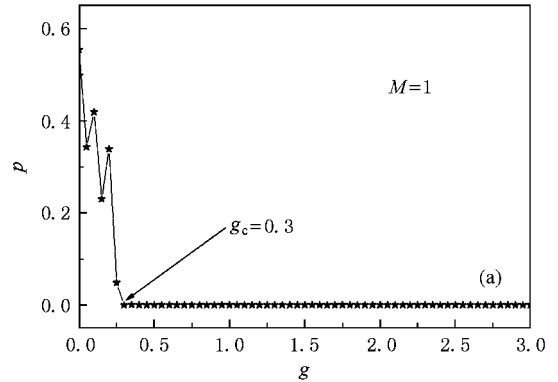


图2 以空间均匀周期解为目标态的控制结果 (a) 控制因子  $\rho$  随  $g$  的变化情况 ( $M=1$ ) (b) 系统变量  $\text{Re}(A(x, t))$  的时空演化图 (c) 控制因子  $\rho$  随  $g$  的变化情况 ( $M=1, 2, 4$ )

另外, 为了了解控制器的数量  $N/M$  对控制效果的影响, 我们取  $M=2$  和  $M=4$  来研究局域耦合控制的可行性. 图 2(c) 给出了控制效果因子  $\rho$  随控制强度  $g$  的变化, 数值结果表明: 在局域耦合控制下, 时空混沌同样可以被抑制, 只是所付出的代价有所增加, 因为控制强度的临界值  $g_c$  有所增加, 从全局  $(M, g_c) = (1, 0.3)$  的耦合反馈变化到局域  $(M,$

$g_c$ )=(1, 0.55)和 $(M, g_c)$ =(1, 1.35)的耦合反馈, 这是因为控制器的数量  $N/M$  减少的缘故. 同时通过进一步计算机数值模拟发现, 随着控制器的数量的进一步减少, 时空混沌不能被完全控制.

情形 2 选取  $\phi = A(x, t)$  ( $A(x, t) = A_0 e^{i(kx + \omega t)}$ ,  $k = \frac{2n\pi}{L}$ ,  $n = 2$ ) 的行波解为目标态的情况. 为了更进一步了解采用不同的目标态对控制结果有哪些影响, 我们选取  $\phi = A(x, t)$  ( $A(x, t) = A_0 e^{i(kx + \omega t)}$ ,  $k = \frac{2n\pi}{L}$ ,  $n = 2$ ) 的行波解作为目标态进行控制. 下面研究在这样的目标态下由方程 (3) 给出的耦合反馈控制方法的控制效果. 在这里, 先考虑在全局控制下研究控制强度对控制效果的影响, 图 3(a) 给出了控制效果因子  $p$  随控制强度  $g$  的变化曲线.

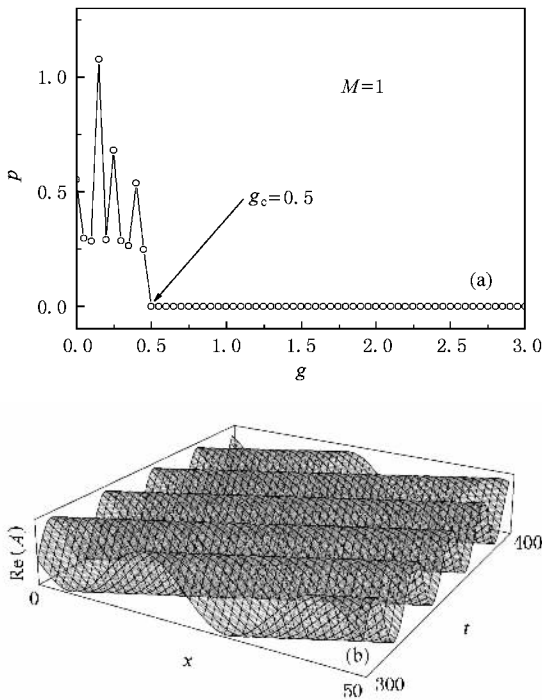


图 3 以行波解为目标态的控制结果 (a) 控制因子  $p$  随  $g$  的变化情况 ( $M=1$ ) (b) 系统变量  $\text{Re}(A(x, t))$  的时空演化图 (c) 控制因子  $p$  随  $g$  的变化情况 ( $M=1, 2, 4$ )

同时, 在控制强度  $g = 1.0$  的情况下, 图 3(b) 给出了系统变量  $A$  的实部时空图. 从图中的结果可知, 当施加控制后, 这种以行波解为目标态的全局耦合控制也能有效抑制时空混沌, 当时空混沌被抑制后, 系统达到有序的行波态. 为了进一步了解以此种行波解为目标态的局域控制的可行性, 我们仍取两个相邻控制点之间的距离  $M = 2$  和  $M = 4$  进行研究. 图 3(c) 给出了这三种情况的控制效果因子  $p$  随控制强度  $g$  的变化曲线. 可见, 随  $g$  的变化规律与全局控制相似, 只要控制强度达到某一值时, 局域控制也能够很好地抑制时空混沌. 同时, 为了比较以空间均匀周期解为目标态和以行波解为目标态的控制情况, 图 4 给出了基于这两种控制信号下  $g_c$ - $M$  参数平面的可控区和不可控区. 从图中可看到, 对于空间均匀周期解为目标态和以行波解为目标态, 可控区都是在各自线的上区域, 同时以空间均匀周期解的可控区域比以行波解为目标态的可控区域大.

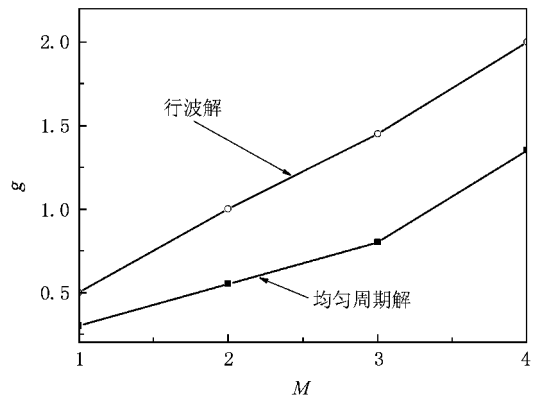


图 4 不同的控制目标态下, 最小控制强度  $g_c$  随  $M$  的变化情况

### 4. 基于关联函数方法的控制机制分析

从以上数值结果可以看出, 全局耦合控制与局域耦合控制的机制是相同的, 但选择不同的目标态, 控制强度的临界值有所变化. 为了了解产生上述控制结果的原因, 下面我们来分析空间相距最远的两个格点  $i = 0$  和  $j = 50$  的系统变量  $\text{Re}(A_i(t))$ ,  $\text{Re}(A_j(t))$  之间的关联函数随控制强度  $g$  的变化情况. 选择这两个点, 是由于采用了周期边界条件, 不失一般性, 选其他对应点计算关联函数的结果是相同的. 又由于通常的关联函数的定义只适用于线性情况, 在此我们先将  $\text{Re}(A_i(t))$ ,  $\text{Re}(A_j(t))$  的值离散化, 定义如下:

$$\begin{aligned} & \text{Re}(A'_x(t)) \\ &= \begin{cases} 1 & (\text{Re}(A_x(t)) \geq \text{Re}(A_x(t))) \\ -1 & (\text{Re}(A_x(t)) < \text{Re}(A_x(t))) \end{cases}, \quad (5) \end{aligned}$$

其中  $\text{Re}(A_i(t))$  为时间序列  $\text{Re}(A_i(t))$  的平均值, 利用(5)式可分别求出  $\text{Re}(A_i(t)), \text{Re}(A_j(t))$  所对应的离散化时间序列  $\text{Re}(A'_i(t)), \text{Re}(A'_j(t))$ . 根据 Wolfram 的文献 16 对关联函数的描述, 定义表达式可写为

$$r(g) = \text{Re}(A'_i(t)) \cdot \text{Re}(A'_j(t + \tau)) - \text{Re}(A'_i(t)) \cdot \text{Re}(A'_j(t + \tau)) \quad (6)$$

式中  $\tau$  为关联时间, 显然, 如果选取合适的  $\tau$  则能够得到关联系数为 1, 这说明  $\text{Re}(A_i(t)), \text{Re}(A_j(t))$  是完全相关的, 系统处于有序的状态. 如果系统处于强混沌态, 则不存在这样一个  $\tau$  使  $r = 1$ , 这时  $r$  无规律变化, 所以  $r$  大小反映了系统两个格点的相关程度.

在数值计算关联函数的过程中, 先求出系统在加入控制信号后达到稳定后的变量值  $\text{Re}(A_i(t))$  和  $\text{Re}(A_j(t))$ , 利用(5)式可分别求出  $\text{Re}(A_i(t)), \text{Re}(A_j(t))$  所对应的离散化的时间序列  $\text{Re}(A'_i(t)), \text{Re}(A'_j(t))$ . 若  $\text{Re}(A'_i(t_0)) = -1, \text{Re}(A'_i(t_0 + \Delta t)) = 1$  而  $\text{Re}(A'_j(t_0 + \tau)) = -1, \text{Re}(A'_j(t_0 + \Delta t + \tau)) = 1$  时, 就可得到关联时间  $\tau$  值. 最后代入(6)式可计算到关联函数的结果. 先以单点周期解为目标态进行刻画, 图 5(a)(b) 给出了在采用全局耦合控制

情况下,  $r$  和  $\tau$  随控制强度  $g$  的变化. 图 6 与图 5 类似, 给出了以行波解为目标态和采用全局耦合控制时  $r$  和  $\tau$  随控制强度  $g$  的变化曲线.

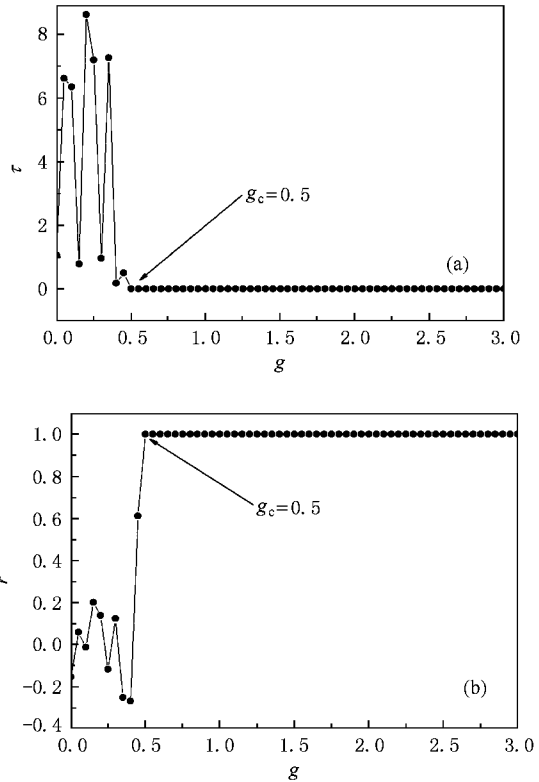


图 6 在以行波解为目标态和采用全局耦合控制的情况下 (a) 关联时间  $\tau$  随  $g$  的变化情况 (b) 关联函数  $r$  随  $g$  的变化情况

比较图 5 和图 6, 我们还可以看出, 无论是选择空间均匀周期解, 还是选择行波解为目标态, 关联时间  $\tau$  和关联函数  $r$  随控制强度  $g$  的变化是相似的. 在  $g$  较小的情况下, 变化是无规律的, 当  $g$  大于临界值  $g_c$  后, 随  $g$  的增加,  $\tau$  和  $r$  呈不变直线. 这些结果表明, 在  $g$  较小的情况下,  $g$  的增加不但不能使系统变得有序, 相反还可能使系统更无序.

### 5. 结 论

通过上述的数值模拟和分析, 对于以蜂拥控制算法为思想的耦合反馈控制方法, 只要选取恰当的控制强度, 不论是全局控制还是局域控制, 该方法都能有效抑制 CGLE 系统的时空混沌态到有序态. 而且当我们选择不同控制目标态时, 得到的不同控制结果, 也可以通过基于关联函数方法的控制机制来进行合理的分析.

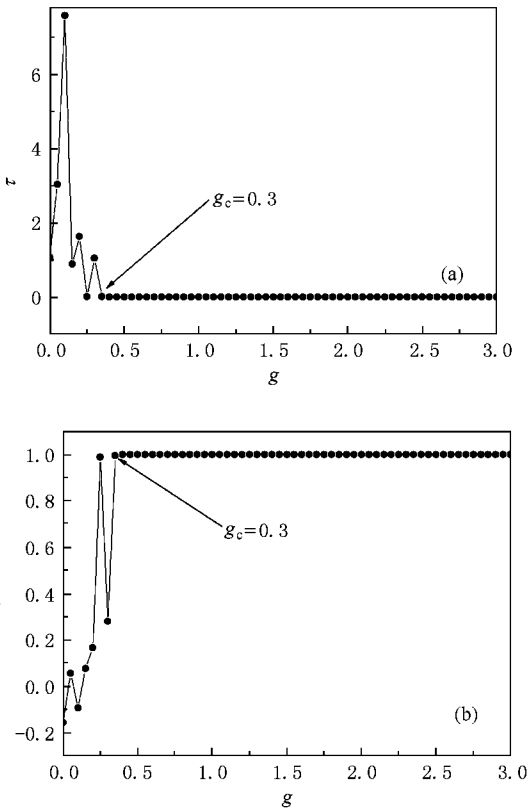


图 5 在以空间均匀周期解为目标态和采用全局耦合控制的情况下, (a) 关联时间  $\tau$  随  $g$  的变化情况 (b) 关联函数  $r$  随  $g$  的变化情况

- [ 1 ] Ott E 1993 *Chaos in Dynamical Systems*( Cambridge : Cambridge University Press )
- [ 2 ] Tsonis A 1992 *Chaos from Theory to Application*( New York : Plenum Press )
- [ 3 ] Hao B L , Zheng W M 1998 *Applied Symbolic Dynamics and Chaos* ( Singapore :World Scientific )
- [ 4 ] Eckmann J P , Ruelle D 1985 *Rev. Mod. Phys.* **57** 617
- [ 5 ] Chate H 1994 *Nonlinearity* **7** 185
- [ 6 ] Chate H , Manneville P 1996 *Physica A* **224** 348
- [ 7 ] Wang S H , Xiao J H 2007 *J. Shenzhen Univ.* **22** 1 ( in Chinese ) 王世红、肖井华 2007 *深圳大学学报* **22** 1 ]
- [ 8 ] Hu G , Qu Z L 1994 *Phys. Rev. Lett.* **74** 68
- [ 9 ] Mizokami S , Ohishi Y , Ohashi H 1997 *Physica A* **239** 227
- [ 10 ] Olfati-Saber R , Murray R M 2004 *IEEE Transactions on Automatic Control* **49** 1520
- [ 11 ] Olfati-Saber R 2006 *IEEE Transactions on Automatic Control* **51** 401
- [ 12 ] Kuramoto Y 1984 *Chemical Oscillations , Waves and Turbulence* ( Berlin Spring Verlag )
- [ 13 ] Cross M C , Hohenberg P C 1993 *Rev. Mod. Phys.* **65** 851
- [ 14 ] Janiud B , Pumir A , Bensimon D , Croquette V , Richter H , Kramer L 1992 *Physica D* **55** 269
- [ 15 ] Hu G , Xiao J H , Zheng Z G 2000 *Chaos Control*( Shanghai : Shanghai Scientific and Technological Education Publishing House ) ( in Chinese ) 胡 岗、肖井华、郑志刚 2000 *混沌控制*( 上海 :上海科技教育出版社 )]
- [ 16 ] Wolfram S 1983 *Rev. Mod. Phys.* **55** 601

## Controll of spatiotemporal chaos by applying feedback method based on the flocking algorithms<sup>\*</sup>

Zhou Jian-Huai Deng Min-Yi Tang Guo-Ning Kong Ling-Jiang Liu Mu-Ren<sup>†</sup>

( College of Physics and Technology , Guangxi Normal University , Guilin 541004 , China )

( Received 25 September 2008 ; revised manuscript received 20 February 2009 )

### Abstract

Spatiotemporal chaos control in one-dimensional complex Ginzburg-Landau equation was described. We proposed a method of coupled feedback based on the flocking algorithms. By using the homogeneous-periodic solutions and the traveling wave solutions as our target , we showed numerically that the spatiotemporal chaos can be controlled to a regular state if appropriate control strength was chosen. The physical mechanism was analyzed based on the correlation function.

**Keywords :** Ginzburg-Landau equation ,spatiotemporal chaos ,correlation function

**PACC :** 0545 , 4752

<sup>\*</sup> Project supported by the National Natural Science Foundation of China( Grant Nos. 10765002 ,10762005 ,10562001 )and the Innovation Program of Guangxi Graduate Education , China( Grant No. 2008106020702M241 ).

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail: jmlmr@mailbox.gxnu.edu.cn