第 58 卷 第 11 期 2009 年 11 月
1000-3290/2009/58(11)/7393-04

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.58,No.11,November,2009

2+1 维广义 Calogero-Bogoyavlenskii-Schiff 方程的无穷多对称及其约化*

张焕萍 陈 勇† 李 彪

(宁波大学数学系,宁波 315211)

(2008 年 12 月 30 日收到;2009 年 3 月 20 日收到修改稿)

通过潘勒卫检验,得到了 2+1 维广义 Calogero-Bogoyavlenskii-Schiff 方程可积的条件.在这个基础上,得到了 GCBS 方程的双线性形式,从而根据形式级数展开法得到了无穷多对称.根据这个对称可以得到 GCBS 方程的约化.

关键词:无穷多对称,截断对称,对称约化,GCBS 方程

PACC:0220,0340K,1130,0290

1.引 言

2+1 维广义 Calogero-Bogoyavlenskii-Schiff 方程

$$\alpha u_{xt}+\beta u_x u_{xy}+\delta u_y u_{xx}+u_{xxxy}=0, \tag{1}$$

其中 $u\equiv u(x,y,t)$,$\alpha\neq 1$,β 和 δ 是任意非零的常数.

有很多作者已经研究过这个方程,例如,Li 和 Chen[1] 通过广义的 Riccati 方程展开法获得了一些精确解.当令 $\alpha=4$,$\beta=4$,$\delta=2$,(1)式变成 Bogoyavlenskii-Schiff(BS)方程[2,3]

$$4u_{xt}+4u_x u_{xy}+2u_y u_{xx}+u_{xxxy}=0. \tag{2}$$

如果令 $\alpha=4$,$\beta=8$,$\delta=4$,(1)式变成 Calogero-Bogoyavlenskii-Schiff(CBS)方程[4,5]

$$4u_{xt}+8u_x u_{xy}+4u_y u_{xx}+u_{xxxy}=0. \tag{3}$$

当做一个变换 $u\to-\frac{1}{2}u$,$t\to\frac{1}{4}t$,那么(3)式可以约化为爆破孤子方程[6—8]

$$u_{xt}-4u_x u_{xy}-2u_y u_{xx}+u_{xxxy}=0. \tag{4}$$

通过这个变换的逆变换,(4)式可以包括在(1)式中.

最近,对称[9—11] 在非线性物理中起着越来越重要的作用.对于 1+1 维的非线性模型,可以通过强对称算子作用于平凡对称后,得到一系列无穷多对称,但是这个方法对于 2+1 维可积模型就非常困难.幸运的是 Lou 提出了形式级数对称方法[12—13],从而可以 获得无穷多对称.他们对 2+1 维 KP 方程,sinh-Gordon 方程,KZ 方程,SK 方程,Toda 模型用这个方法给出了无穷多对称[14—18].

本文首先用潘勒卫检验给出了 GCBS 方程可积的条件,然后得到了它的双线性形式,最后用形式级数对称方法得到了它的无穷多对称,再根据截断对称得到了方程的约化.

2.GCBS 方程的可积条件和双线性形式

潘勒卫检验是由 WTC[19—22] 提出用来证明模型可积的最重要方法之一.

首先,潘勒卫展开的形式可表示为

$$u=\sum_{j=0}^{\infty}w_j f^{j-n}, \tag{5}$$

其中 $f\equiv f(x,y,t)$ 在不同的方法中有不同的形式,$w_j=w_j(x,y,t)$ $(j=0,1,2,\cdots,\infty)$.但是用其中的任何一个形式,最后的结果是一样的.在这里为了简化,可以用 Kruskal 简化,例如,

$$f=x+\psi(y,t), \tag{6}$$

其中 $\psi(y,t)\equiv\psi$ 是关于 y 和 t 的任意函数.

把 $u=w_0 f^{-n}$ 代入(1)式中,取出 $f\to 0$ 时最高项的系数,得到了一个可能的分支

* 国家自然科学基金(批准号:10747141,10735030),宁波自然科学基金(批准号:2007A610049,2008A610017),国家重点基础研究发展计划(973)项目(批准号:2007CB814800),宁波大学王宽诚教育基金和教育部长江学者与创新团队项目(批准号:IRT0734)资助的课题.

† E-mail:chenyong@nbu.edu.cn

$$w_0 = \frac{12 f_x}{(\delta + \beta)}. \tag{7}$$

然后取出 f^{j-1} 的系数,得到关于 j 的多项式

$$(j-1)(j-4)(j-6)(j+1) = 0. \tag{8}$$

由(8)式知,其共振点为

$$j = -1, 1, 4, 6.$$

通过复杂的计算,可以发现当(1)式可积时当且仅当 $\beta = 2\delta$. 对于 $j = 1, 4$ 和 6, w_1, w_4 和 w_6 是任意函数. 对于 $j = 2, 3$ 和 5,我们得到

$$w_2 = -\frac{1}{3}\frac{(2\delta w_{1x}\psi_y + \delta w_{1y} + \alpha\psi_t)}{\psi_y \delta}, \tag{9}$$

$$w_3 = \frac{1}{6}\frac{(2w_{1xy} + w_{1xx} + \psi_y)}{\psi_y}, \tag{10}$$

$$\begin{aligned} w_5 = -\frac{1}{216\psi_y^4\delta}(&-5\psi_y\alpha\psi_{yt}\delta w_{1y} - 2\delta\alpha\psi_t\psi_y w_{1yy} \\ &+ 90\delta w_{4y}\psi_y^3 + 126 w_{4x}\psi_y^4\delta + 15\delta\psi_y^2 w_{1xxyy} \\ &+ 9\delta\psi_y^3 w_{1xxxy} + 3\delta\psi_y^4 w_{1xxxx} + 2\alpha^2\psi_t^2\psi_{yy} \\ &+ 2\delta^2 w_{1y}^2\psi_{yy} + 3\psi_y^2\alpha^2\psi_{tt} - 5\psi_y\alpha^2\psi_{yt}\psi_t + 3\alpha\delta\psi_y^2 w_{1yt} \\ &- 3\alpha w_{1xt}\psi_y^3\delta - 15\psi_y\psi_{yy}\delta w_{1xxy} - 4\delta^2 w_{1x}w_{1xy}\psi_y^3 \\ &+ 4\delta^2\psi_y^2 w_{1y}w_{1xy} + 2\delta^2\psi_y^4 w_{1xx}w_{1x} + 2\delta^2 w_{1x}\psi_y^2 w_{1yy} \\ &- 2\delta^2 w_{1y}w_{1xx}\psi_y^3 - 2\delta^2 w_{1y}\psi_y w_{1yy} + \psi_y^2\alpha\psi_t\delta w_{1xy} \\ &+ \delta\psi_y^3 w_{1xx}\alpha\psi_t - 2\delta\alpha w_{1x}\psi_y\psi_{yy}\psi_t + 4\delta\alpha\psi_t\psi_{yy}w_{1y} \\ &- 2\delta^2 w_{1x}\psi_y\psi_{yy}w_{1y} + 2\delta w_{1x}\psi_y^2\alpha\psi_{yt}). \end{aligned} \tag{11}$$

综上,证明了这个分支的共振条件都满足. 从而,可以得出(1)式可以通过潘勒卫检验当且仅当 $\beta = 2\delta$. 这也说明了(2),(3)和(4)式[23]可以通过潘勒卫检验. 在 $\beta = 2\delta$ 这个条件下,(1)式变为

$$\alpha u_{xt} + 2\delta u_x u_{xy} + \delta u_y u_{xx} + u_{xxxy} = 0. \tag{12}$$

根据(12)式的第一个共振点,可以假设

$$u = \frac{4}{\delta}\frac{\phi_x}{\phi} = \frac{4}{\delta}(\ln\phi)_x, \tag{13}$$

其中 $\phi \equiv \phi(x, y, t)$. 把(13)式代入(12)式,可以得到其 Hirota 双线性形式[24,25]

$$(\alpha D_x D_t + D_x^3 D_y)\phi \cdot \phi = 0, \tag{14}$$

其中 Hirota 双线性算子必须满足

$$\begin{aligned} D_x^m D_y^n D_t^k = \partial_{\xi_1}^m \partial_{\xi_2}^n \partial_{\xi_3}^k F(&x + \xi_1, y + \xi_2, t + \xi_3) \\ \times G(&x - \xi_1, y - \xi_2, t \\ &- \xi_3)\,|_{\xi_1 = 0, \xi_2 = 0, \xi_3 = 0}. \end{aligned} \tag{15}$$

接下来我们讨论(14)式.

3. GCBS 方程的无穷多对称及其对称约化

任何一个方程的对称可以定义为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}H(u + \varepsilon\sigma) = 0 \tag{16}$$

的一个解. 其中 $H(u)$ 必须满足 $H(u) = 0$, σ 就是方程的对称.

根据对称的定义,可以得到(14)式的对称

$$(\alpha D_x D_t + D_x^3 D_y)\phi \cdot \sigma = 0, \tag{17}$$

其中 $\sigma \equiv \sigma(x, y, t)$. 接着将 σ 对其自变量 t 做形式级数展开,

$$\sigma = \sum_{k=0}^{+\infty} g^{(n-k)}\delta_n[k], \tag{18}$$

其中任意函数 $g = g(t)$, $g^{(n-k)}$ 表示关于 t 的 $(n-k)$ 阶导数, $\sigma_n[k]$ 是 x, y, ϕ 以及 ϕ 任意阶导数的函数,但不显含 t.

注 在做形式级数展开时对称 σ 也可以关于变量 x 或 y 展开.

把(18)式代入(17)式,得到

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{+\infty} g^{(n-k+1)}(\alpha D_x D_t + D_x^2 D_y)\phi \cdot \sigma_n[k-1] \\ &+ \sum_{k=0}^{+\infty} g^{(n-k+1)}(\phi\sigma_{nx}[k] - \phi_x\sigma_n[k]) = 0. \end{aligned} \tag{19}$$

因为 ϕ 与 g 是独立的,所以可以收集(19)式中 g 的系数,就可以得到

$$-\phi_x\sigma_n[0] + \phi\sigma_{nx}[0] = 0, \tag{20}$$

$$\begin{aligned} &(\alpha D_x D_t + D_x^2 D_y)\phi \cdot \sigma_n[k-1] - \phi_x\sigma_n[k] \\ &+ \phi\sigma_{nx}[k] = 0, \quad k = 1 \cdots + \infty. \end{aligned} \tag{21}$$

通过求解(20)和(21)式,得到

$$\sigma_1[0] = \phi p_n(y, t), \sigma_n[k] = \phi\int -\frac{\alpha}{\phi^2}\mathrm{d}x, \tag{22}$$

其中

$$\alpha = (\alpha D_x D_t + D_x^3 D_y)\phi \cdot \sigma_n[k-1].$$

为了更清楚地理解(22)式,我们写出了(22)式的一种等价形式

$$\begin{aligned} \sigma_n[k] = (-\phi\partial_x^{-1}\phi^{-2}\Delta\phi)^k p_n(y, t)\phi, \\ k = 0, 1, 2, \cdots \end{aligned} \tag{23}$$

其中 $\Delta = \alpha D_x D_t + D_x^3 D_y$.

从而无穷多形式级数对称可表示为

$$\sigma = \sum_{k=0}^{+\infty} g^{(n-k)}(-\phi\partial_x^{-1}\phi^{-2}\Delta\phi)^k p_n(y, t)\phi. \tag{24}$$

而根据无穷多形式级数对称,可以得到截断到 n 的截断对称. 下面给出截断对称的定义:如果 $\sigma_n[M_n]$ 满足

$$(\alpha D_x D_t + D_x^3 D_y)\phi \cdot \sigma_n[M_n] = 0, \tag{25}$$

那么 $\sigma_n[g]$ 就叫做截断对称,其形式可表示为

$$\sigma_n[g] = \sum_{k=0}^{+\infty} g^{(n-k)} \sigma_n[M_n], \tag{26}$$

它的截断点是 $k = M_n$,因为当 $k > M_n$ 时,有 $\sigma_n[k] = 0$. 经验猜想和详细运算,得到 $p_n(y,t)$ 的形式为

$$p_n(y,t) = \frac{y^n}{n!},\ n = 0,1,2,\cdots, \tag{27}$$

截断点为

$$M_0 = 0,\ M_n = n-1. \tag{28}$$

从而得到了无穷多形式级数截断对称

$$\sigma_n[g] = \sum_{k=0}^{M_n} g^{(n-k)}(-\phi\partial_x^{-1}\phi^{-2}\Delta\phi)^k \frac{y^n}{n!}\phi,$$
$$(n = 1,2,\cdots,\infty),\ \sigma_0[g] = g\phi. \tag{29}$$

为了便于理解,下面给出(29)式的前 4 个截断对称:

$$\sigma_0[g] = g\phi,\ \sigma_1[g] = \dot{g}\, y\phi, \tag{30}$$

$$\sigma_2[g] = \ddot{g}\frac{y^2}{2}\phi - \dot{g}\, y^2\left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right)\phi_t, \tag{31}$$

$$\sigma_3[g] = \frac{1}{6}g^{(3)}y^3\phi - \frac{1}{3}y^3\ddot{g}\left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right)\phi_t + \frac{1}{y}\dot{g}\left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right)\phi\left[gy^2\int\frac{\phi_{xx}\phi_{xt} - \phi_{xxt}\phi_x}{\phi^2}\mathrm{d}x + 3y^2\int\frac{\phi_{xxxt}\phi - \phi_{xxx}\phi_t}{\phi^2}\mathrm{d}x - y^3\left(\frac{1}{\alpha} - \alpha\right)\frac{\phi_{tt}}{\phi}\right]. \tag{32}$$

同理,在做形式级数展开时,在(18)式中 g 也可以按照 y 或 x 展开. 但是从开始计算就相当复杂,所以选择这俩个自变量展开是不合适的,不过,还是可以得到一些截断对称结果的:

$$\sigma_0(h) = \phi h, \tag{33}$$

其中 h 是关于 y 的任意函数. 关于 x 展开的截断对称不存在.

根据截断对称(30),(31)和(33)式,可以得到(14)式的一般对称

$$\sigma = \left[b(t) + c_t(t)y + q_{tt}(t)\frac{y^2}{2}\right]\phi - q_t y^2\left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right)\phi_t + s(y)\phi. \tag{34}$$

通过求解(34)式,可以得到

$$\phi = F(x,y)\mathrm{e}^{p(y,t)},$$

$$p(y,t) = \int\frac{b(t) + c_t(t)y + \frac{1}{2}q_{tt}y^2 + s(y)}{q_t y^2\left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right)}\mathrm{d}t. \tag{35}$$

那么(14)式可以约化为

$$D_x^3 D_y F(x,y)\cdot F(x,y) = 0. \tag{36}$$

(36)式包括了(2),(3)[26]和(4)式的约化. 根据约化化方程(36),我们可以得到不同的解.

4. 结 论

本文首先用潘勒卫检验得到了 2+1 维广义 Calogero-Bogoyavlenskii-Schiff 方程可积的条件,在这个基础上,得到了它的双线性形式. 然后用形式级数对称方法得到了无穷多形式级数对称. 最后根据截断对称得到了 GCBS 方程的一种约化,这个约化包括 BS,CBS 和爆破方程的约化.

[1] Li B, Chen Y 2004 *Czech. J. Phys.* **54** 5
[2] Bogoyavlenskii O I 1990 *Math. USSR. Izv.* **34** 245
[3] Toda K, Yu S J, Fukuyama F 1999 *Rep. Math. Phys.* **44** 247
[4] Estvez P G, Hernaez G A 2000 *J. Phys.* A **33** 2131
[5] Yan Z Y 2003 *Czech. J. Phys.* **53** 89
[6] Yan Z Y, Zhang H Q 2002 *Comput. Math. Appl.* **44** 1430
[7] Calogero F, Degasperis A 1976 *Nuovo. Cimento.* B **32** 201
[8] Elwakil S A, El-labany S K, Zahran M A, Sabry R 2003 *Z. Naturforsch.* A **58** 39
[9] Fan E G 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 1000 (in Chinese) [范恩贵 2000 物理学报 **49** 1000]
[10] Qian X M, Lou S Y 1996 *Acta Phys. Sin.* **45** 721 (in Chinese) [钱贤民、楼森岳 1996 物理学报 **45** 721]
[11] Yan Z Y, Zhang H Q 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 2 113 (in Chinese) [闫振亚、张鸿庆 2000 物理学报 **49** 2 113]
[12] Lou S Y 1993 *J. Phys.* A **26** 4387
[13] Lou S Y 1993 *Phys. Rev. Lett.* **71** 4099
[14] Yu J 1995 *Acta Phys. Sin.* **44** 673 (in Chinese) [俞 军 1995 物理学报 **44** 673]
[15] Lou S Y, Yu J, Weng J P, Qian X M 1995 *Acta Phys. Sin.* **43** 1050 (in Chinese) [楼森岳、俞 军、翁建平、钱贤民 1995 物理学报 **43** 1050]
[16] Lou S Y 1993 *J. Phys.* A **27** 3235
[17] Lou S Y 1994 *J. Math. Phys.* A **35** 1755
[18] Li J H, Jia M, Lou S Y 2007 *J. Phys.* A: *Math. Theor.* **40** 1585
Li J H, Lou S Y 2008 *Chin. Phys.* B **17** 3
[19] Jimbo M, Kruskal M D, Miwa T 1982 *Phys. Lett.* A **92** 59
[20] Fordy A P, Pickering A 1991 *Phys. Lett.* A **160** 347
[21] Conte R 1989 *Phys. Lett.* A **140** 383
[22] Lou S Y 1998 *Phys. Rev. Lett.* **80** 5027
[23] Alagesan T, Chung Y, Nakkeeran K 2005 *Chaos. Soliton.* Fract. **26** 1203

[24] Hu X B 1997 *J. Phys. A: Math. Gen.* **30** 619
[25] Hu X B 1994 *J. Phys. A: Math. Gen.* **27** 2497
[26] Bruzón M S, Gandarias M L, Muriel C, Ramírez J, Saez S, Romero F R 2003 *Theor. Math. Phys.* **137** 1367

Infinitely many symmetries and symmetry reduction of (2+1)-dimensional generalized Calogero-Bogoyavlenskii-Schiff equation *

Zhang Huan-Ping Chen Yong† Li Biao
(*Department of Mathematics, Ningbo University, Ningbo* 315211, *China*)
(Received 31 December 2008; revised manuscript received 20 March 2009)

Abstract

Integrability condition of (2+1)-dimensional generalized Calogero-Bogoyavlenskii-Schiff equation are obtained by Painléve-test. Based on this condition and Painléve-test, the bilinear form of GCBS equation is found. Towards this bilinear form infinitely many formal series symmetries are found by the formal series symmetry method, the obtained symmetries are used to get the symmetry reductions of GCBS equation.

Keywords: infinitely many symmetries, truncated symmetries, symmetry reduction, generalized Calogero-Bogoyavlenskii-Schiff equation
PACC: 0220, 0340K, 1130, 0290

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 10747141, 10735030), the Natural Science Foundation of Ningbo, China (Grant Nos. 2007A610049, 2008A610017), the National Basic Research Program of China (Grant No. 2007CB814800), the K. C. Wang Education Foundation of Ningbo University, and the Program for Changjiang Scholars and Innovative Research Team in University (Grant No. IRT0734).
† E-mail: chenyong@nbu.edu.cn