第 58 卷 第 11 期 2009 年 11 月
1000-3290/2009/58(11)/7402-08

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.58,No.11,November,2009

(G'/G)展开法在高维非线性物理方程中的新应用*

马玉兰 李帮庆† 孙践知

(北京工商大学计算机与信息工程学院,北京 100048)

(2009 年 2 月 12 日收到;2009 年 3 月 18 日收到修改稿)

将(G'/G)展开首次法扩展到构造高维非线性物理方程的精确非行波通解、研究解的特殊孤子结构和混沌行为. 作为(G'/G)展开法的新应用,获到了$(3+1)$维非线性 Burgers 系统的新非行波通解,对通解中的任意函数进行适当的设置,探讨了特殊孤子结构的激发和演化、解的混沌行为和演化.

关键词:(G'/G)展开法,Burgers 系统,孤子结构,混沌行为

PACC:0230,0340,0290

1. 引 言

发现非线性物理方程的新求解方法、获得新形式解、探索解的不同结构与演化规律是非线性物理研究中的重要内容. 形态各异的孤子结构是非线性物理方程的一类特殊形式解. 目前孤子理论已经广泛应用于光纤通讯、流体力学、等离子体物理、超导、量子场论等物理领域,以及化学、生物、大气动力等学科. 近些年,对非线性物理方程的研究不断有新的突破,尤其是不少行之有效的求解方法被开发出来,如齐次平衡法[1—3],Jacobi 椭圆函数展开法[4—7],F-展开法[8—11],辅助方程法[12—14],分离变量法[15—20],Riccati 函数法[21—23],扩展的 Riccati 映射法[24—29]等.

新近,由 Wang 等提出了(G'/G)展开法[30],并成功应用于构造多个非线性方程的精确解[30—34]. 然而,已有仅文献局限于应用(G'/G)展开法构造非线性方程的新精确解. 受文献[17,22—29]的启发,本文通过对(G'/G)展开法求解过程和解的结构进行研究,发现可以应用(G'/G)展开法研究高维非线性物理方程的局域孤子结构的激发和演化,探索解的混沌行为和演化,并以著名的$(3+1)$非线性 Burgers 系统为例展示了(G'/G)展开法的这一新应用.

考虑如下$(3+1)$维非线性 Burgers 系统:

$$u_t = 2uu_y + 2vu_x + 2wu_z + u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}, \tag{1}$$

$$u_x = v_y, \tag{2}$$

$$u_z = w_y. \tag{3}$$

文献[21]应用多线性分离变量法得到了 Burgers 系统(1)—(3)的分离变量解,文献[28]和[29]应用扩展 Riccati 方程映射法获得了新形式的精确解,并深入研究了其特殊孤子结构的激发与演化、孤子间的相互作用等.

本文通过扩展(G'/G)展开法构造出 Burgers 系统的新非行波通解,文献[28]应用扩展的 Riccati 映射法得到的解成为本文所获通解的一组特解. 因此应用(G'/G)展开法构造出的精确解更为丰富. 由于通解中含有一个任意函数,通过设置这个任意函数为某些特定函数,能够获得 Burgers 系统新的局域孤子结构和演化过程,探索解的混沌行为和演化过程. 本文对(G'/G)展开法的新应用也能够拓展到其他高维非线性物理方程.

2. $(3+1)$维非线性 Burgers 系统的新精确通解

(G'/G)展开法的基本思想是假设非线性物理方程的解可以表示为(G'/G)的一个代数多项式,其中 $G=G(q)$满足二阶线性常微分方程

$$G'' + \lambda G' + \mu = 0, \tag{4}$$

其中 $G'=\frac{\mathrm{d}G(q)}{\mathrm{d}q}$, $G''=\frac{\mathrm{d}^2G(q)}{\mathrm{d}q^2}$, $q=x-Vt$ 为行波

* 北京市优秀骨干教师项目(批准号:19004811009,PXM2007-014213-044566)资助的课题.

† E-mail:libq@th.btbu.edu.cn

变换，V 为常数．然后将假设解代入到原方程，应用齐次平衡法可求得非线性物理方程的通解．对于高维非线性物理方程，可以扩展(G'/G)展开法，假设 q 为方程所含变量的任意函数，行波变换 $q=x-Vt$ 仅为这个任意函数的特例．当 q 为任意函数时得到的通解称为非行波通解．

假设 Burgers 系统(1)—(3)有如下形式的解：

$$u=\sum_{i=0}^{m} f_i(x,y,z,t)\left[\frac{G'(q)}{G(q)}\right]^i, \tag{5}$$

$$v=\sum_{i=0}^{n} g_i(x,y,z,t)\left[\frac{G'(q)}{G(q)}\right]^i, \tag{6}$$

$$w=\sum_{i=0}^{l} h_i(x,y,z,t)\left[\frac{G'(q)}{G(q)}\right]^i, \tag{7}$$

其中 $q=q(x,y,z,t)$为任意函数．

将(5)—(7)式代入(1)—(3)式后，应用齐次平衡原则可得 $m=n=l=1$．因此(5)—(7)式应为

$$u=f_0(x,y,z,t)+f_1(x,y,z,t)\frac{G'(q)}{G(q)}, \tag{8}$$

$$v=g_0(x,y,z,t)+g_1(x,y,z,t)\frac{G'(q)}{G(q)}, \tag{9}$$

$$w=h_0(x,y,z,t)+h_1(x,y,z,t)\frac{G'(q)}{G(q)}. \tag{10}$$

注意到(4)式，因此

$$\left(\frac{G'}{G}\right)'=\frac{GG''-G'^2}{G^2}=-\mu-\lambda\frac{G'}{G}-\left(\frac{G'}{G}\right)^2. \tag{11}$$

将(8)—(10)式代入(1)—(3)式，并注意到(11)式，我们有

$$\begin{aligned}
&f_{0t}+f_{1t}\left(\frac{G'}{G}\right)-f_1q_t\left[\mu+\lambda\left(\frac{G'}{G}\right)+\left(\frac{G'}{G}\right)^2\right]\\
&=\left[2f_0+2f_1\left(\frac{G'}{G}\right)\right]\left[f_{0y}-\mu f_1q_y\right.\\
&\quad\left.+(f_{1y}-\lambda f_1q_y)\left(\frac{G'}{G}\right)-f_1q_y\left(\frac{G'}{G}\right)^2\right]\\
&\quad+\left[2g_0+2g_1\left(\frac{G'}{G}\right)\right]\left[f_{0x}-\mu f_1q_x\right.\\
&\quad\left.+(f_{1x}-\lambda f_1q_x)\left(\frac{G'}{G}\right)-f_1q_x\left(\frac{G'}{G}\right)^2\right]\\
&\quad+\left[2h_0+2h_1\left(\frac{G'}{G}\right)\right]\left[f_{0z}-\mu f_1q_z\right.\\
&\quad\left.+(f_{1z}-\lambda f_1q_z)\left(\frac{G'}{G}\right)-f_1q_z\left(\frac{G'}{G}\right)^2\right]\\
&\quad+f_{0xx}+f_{1xx}\left(\frac{G'}{G}\right)+\left[2f_{1x}q_x+f_1q_{xx}\right.\\
&\quad\left.-\lambda f_1q_x^2-2f_1q_x^2\left(\frac{G'}{G}\right)\right]\left[-\mu-\lambda\left(\frac{G'}{G}\right)-\left(\frac{G'}{G}\right)^2\right]\\
&\quad+f_{0yy}+f_{1yy}\left(\frac{G'}{G}\right)+\left[2f_{1y}q_y+f_1q_{yy}-\lambda f_1q_y^2\right.\\
&\quad\left.-2f_1q_y^2\left(\frac{G'}{G}\right)\right]\left[-\mu-\lambda\left(\frac{G'}{G}\right)-\left(\frac{G'}{G}\right)^2\right]\\
&\quad+f_{0zz}+f_{1zz}\left(\frac{G'}{G}\right)+\left[2f_{1z}q_z+f_1q_{zz}-\lambda f_1q_z^2\right.\\
&\quad\left.-2f_1q_z^2\left(\frac{G'}{G}\right)\right]\left[-\mu-\lambda\left(\frac{G'}{G}\right)-\left(\frac{G'}{G}\right)^2\right].
\end{aligned}\tag{12}$$

$$\begin{aligned}
&f_{0x}+f_{1x}\left(\frac{G'}{G}\right)+f_1q_x\left[-\mu-\lambda\left(\frac{G'}{G}\right)-\left(\frac{G'}{G}\right)^2\right]\\
&=g_{0y}+g_{1y}\left(\frac{G'}{G}\right)\\
&\quad+g_1q_y\left[-\mu-\lambda\left(\frac{G'}{G}\right)-\left(\frac{G'}{G}\right)^2\right]=0.
\end{aligned}\tag{13}$$

$$\begin{aligned}
&f_{0z}+f_{1z}\left(\frac{G'}{G}\right)+f_1q_z\left[-\mu-\lambda\left(\frac{G'}{G}\right)-\left(\frac{G'}{G}\right)^2\right]\\
&=h_{0y}+h_{1y}\left(\frac{G'}{G}\right)\\
&\quad+h_1q_y\left[-\mu-\lambda\left(\frac{G'}{G}\right)-\left(\frac{G'}{G}\right)^2\right]=0.
\end{aligned}\tag{14}$$

将(12)式化为含$\left(\frac{G'}{G}\right)$的多项式，令方程两边同幂次$\left(\frac{G'}{G}\right)$项的系数相等，可得到如下的非线性代数方程组：

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{G'}{G}\right)^0: f_{0t}-\mu f_1q_t\\
&=2f_0(f_{0y}-\mu f_1q_y)+2g_0(f_{0x}-\mu f_1q_x)\\
&\quad+2h_0(f_{0z}-\mu f_1q_z)+f_{0xx}+f_{0yy}+f_{0zz}\\
&\quad-2\mu(f_{1x}q_x+f_{1y}q_y+f_{1z}q_z)\\
&\quad-\mu f_1(q_{xx}+q_{yy}+q_{zz})\\
&\quad+\lambda\mu f_1(q_x^2+q_y^2+q_z^2),
\end{aligned}\tag{15}$$

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{G'}{G}\right): f_{1t}-\lambda f_1q_t\\
&=2f_0(f_{1y}-\lambda f_1q_y)+2f_1(f_{0y}-\mu f_1q_y)\\
&\quad+2g_0(f_{1x}-\lambda f_1q_x)+2g_1(f_{0x}-\mu f_1q_x)\\
&\quad+2h_0(f_{1z}-\lambda f_1q_z)+2h_1(f_{0z}-\mu f_1q_z)\\
&\quad+f_{1xx}+f_{1yy}+f_{1zz}-2\lambda(f_{1x}q_x+f_{1y}q_y\\
&\quad+f_{1z}q_z)-\lambda f_1(q_{xx}+q_{yy}+q_{zz})\\
&\quad+(\lambda^2+2\mu)f_1(q_x^2+q_y^2+q_z^2),
\end{aligned}\tag{16}$$

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{G'}{G}\right)^2: -f_1q_t\\
&=2f_1(f_{1y}-\lambda f_1q_y)-2f_0f_1q_y\\
&\quad+2g_1(f_{1x}-\lambda f_1q_x)-2g_0f_1q_x\\
&\quad+2h_1(f_{1z}-\lambda f_1q_z)-2h_0f_1q_z\\
&\quad+3\lambda f_1(q_x^2+q_y^2+q_z^2)-2(f_{1x}q_x\\
&\quad+f_{1y}q_y+f_{1z}q_z)-f_1(q_{xx}+q_{yy}+q_{zz}),
\end{aligned}\tag{17}$$

$$\left(\frac{G'}{G}\right)^3: -2f_1^2 q_y - 2f_1 g_1 q_x$$
$$-2f_1 h_1 q_z + 2f_1\left(q_x^2 + q_y^2 + q_z^2\right) = 0. \quad (18)$$

解方程组(15)—(18)式可得

$$f_0 = -q_y, g_0 = -q_x, h_0 = -q_z, \lambda + \mu = -1,$$
$$q_x^2 + q_y^2 + q_z^2 = f_1 q_y + g_1 q_x + h_1 q_z. \quad (19)$$

同理，由(13)式可得如下代数方程组：

$$f_{0x} - g_{0y} - \mu\left(f_1 q_x - g_1 q_y\right) = 0, \quad (20)$$
$$f_{1x} - g_{1y} - \lambda\left(f_1 q_x - g_1 q_y\right) = 0, \quad (21)$$
$$f_1 q_x - g_1 q_y = 0. \quad (22)$$

解方程组(20)—(22)式可得

$$f_{0x} = g_{0y}, f_{1x} = g_{1y}, f_1 q_x = g_1 q_y. \quad (23)$$

由(14)式可得如下代数方程组：

$$f_{0z} - h_{0z} - \mu\left(f_1 q_z - h_1 q_y\right) = 0, \quad (24)$$
$$f_{1z} - h_{1y} - \lambda\left(f_1 q_z - h_1 q_y\right) = 0, \quad (25)$$
$$f_1 q_z - h_1 q_y = 0. \quad (26)$$

解方程组(24)—(26)式可得

$$f_{0z} = h_{0z}, f_{1z} = h_{1y}, f_1 q_z = h_1 q_y. \quad (27)$$

综合(23)和(27)式可得

$$f_1 = q_y, g_1 = q_x, h_1 = q_x. \quad (28)$$

因此我们可得(3+1)维非线性 Burgers 系统(1)—(3)的新非行波通解为

$$u(x,y,z,t) = -q_y + q_y\frac{G'}{G}, \quad (29)$$
$$v(x,y,z,t) = -q_x + q_x\frac{G'}{G}, \quad (30)$$
$$w(x,y,z,t) = -q_z + q_z\frac{G'}{G}. \quad (31)$$

下面就 $\lambda^2 - 4\mu$ 分二种情形讨论.

情形 1 当 $\lambda + \mu = -1$ 时，$\lambda^2 - 4\mu = [-(1+\mu)]^2 - 4\mu = (1-\mu)^2 \geqslant 0$. 因此当 $\mu \neq 1$ 时，(4)式中的 $G(q)$ 满足

$$\frac{G'(q)}{G(q)} = -\frac{\lambda}{2} + \frac{|\lambda+2|}{2} \times \frac{C_1\cosh\left(\frac{|\lambda+2|}{2}q\right) + C_2\sinh\left(\frac{|\lambda+2|}{2}q\right)}{C_1\sinh\left(\frac{|\lambda+2|}{2}q\right) + C_2\cosh\left(\frac{|\lambda+2|}{2}q\right)}. \quad (32)$$

将(32)式代入(29)—(31)式可得到(3+1)维非线性 Burgers 系统(1)—(3)的一组双曲函数通解为

$$u = -\frac{\lambda+2}{2}q_y + \delta q_y\frac{C_1\cosh(\delta q) + C_2\sinh(\delta q)}{C_1\sinh(\delta q) + C_2\cosh(\delta q)}, \quad (33)$$

$$v = -\frac{\lambda+2}{2}q_x + \delta q_x\frac{C_1\cosh(\delta q) + C_2\sinh(\delta q)}{C_1\sinh(\delta q) + C_2\cosh(\delta q)}, \quad (34)$$

$$w = -\frac{\lambda+2}{2}q_z + \delta q_z\frac{C_1\cosh(\delta q) + C_2\sinh(\delta q)}{C_1\sinh(\delta q) + C_2\cosh(\delta q)}, \quad (35)$$

其中 $\delta = \frac{|\lambda+2|}{2}$，$C_1$，$C_2$ 为积分常数.

特别地，当 $C_1 = 0, C_2 \neq 0$ 时，可得到 Burgers 系统(1)—(3)的一组孤子解

$$u = \frac{\lambda+2}{2}q_y + \delta q_y\tanh(\delta q), \quad (36)$$
$$v = \frac{\lambda+2}{2}q_x + \delta q_x\tanh(\delta q), \quad (37)$$
$$w = \frac{\lambda+2}{2}q_z + \delta q_z\tanh(\delta q). \quad (38)$$

或当 $C_1 \neq 0, C_2 = 0$ 时，得到另一组孤子解

$$u = \frac{\lambda+2}{2}q_y + \delta q_y\coth(\delta q), \quad (39)$$
$$v = \frac{\lambda+2}{2}q_x + \delta q_x\coth(\delta q), \quad (40)$$
$$w = \frac{\lambda+2}{2}q_z + \delta q_z\coth(\delta q). \quad (41)$$

当解(36)—(38)和(39)—(41)中取 $\delta = 1$ 且 $\lambda = 1$ 时，对应的退化形式与文献[28]使用扩展 Riccati 方程映射法得到 Burgers 系统(1)—(3)的解(30)—(35)完全一致.

情形 2 当 $\lambda + \mu = -1$ 且 $\lambda = -2$ 时，因 $\lambda^2 - 4\mu = 0$，则(4)式中的 $G(q)$ 满足

$$\frac{G'(q)}{G(q)} = 1 + \frac{C_2}{C_1 + C_2 q}. \quad (42)$$

将(42)式代入(29)—(31)式可得到(3+1)维非线性 Burgers 系统(1)—(3)的一组解为

$$u = \frac{C_2 q_y}{C_1 + C_2 q}, v = \frac{C_2 q_x}{C_1 + C_2 q}, w = \frac{C_2 q_z}{C_1 + C_2 q}. \quad (43)$$

而当 $C_1 = 0, C_2 \neq 0$ 时，解(43)的退化形式与文献[illegible]的解(27)—(29)完全一致.

3. (3+1)维非线性 Burgers 系统特殊孤子结构的激发与演化

应用扩展的 (G'/G) 展开法获得的非线性 Burgers 系统(1)—(3)的通解(33)—(43)中均含有一个任意函数 q，这就使激发丰富的孤子结构变得简便易行. 不失一般性，本文以通解(33)为例来说明特殊孤子结构的激发与演化过程. 在通解中设

$$q(x,y,z,t) = ky + 1 + \exp(-x^2 - z^2 - t^2) \times \exp(x^2 + z^2 + t^2)\,\mathrm{sn}(x^2 + z^2 + t, 0.6), \quad (44)$$

其中 $\mathrm{sn}(\cdot, m)$ 为雅可比椭圆函数，m 为模数. 令 $y = 1$，设置参数为 $C_1 = 10$，$C_2 = 2$，$k = 2$，$\lambda = 1$. 图 1

(a)为我们获得的新孤子结构，形状为一柱状孤子垂直嵌入峰状孤子. 图 1(a)—(f) 展示了孤子解 $u(x,y,z,t)$ 在特定设置下沿 x,z 方向的演化过程. 从图中可以看出，孤子的形态随着时间变化由二个孤子逐渐聚合为一个峰孤子，然后变化为内嵌孤子，最后变化为峰顶向下的峰孤子.

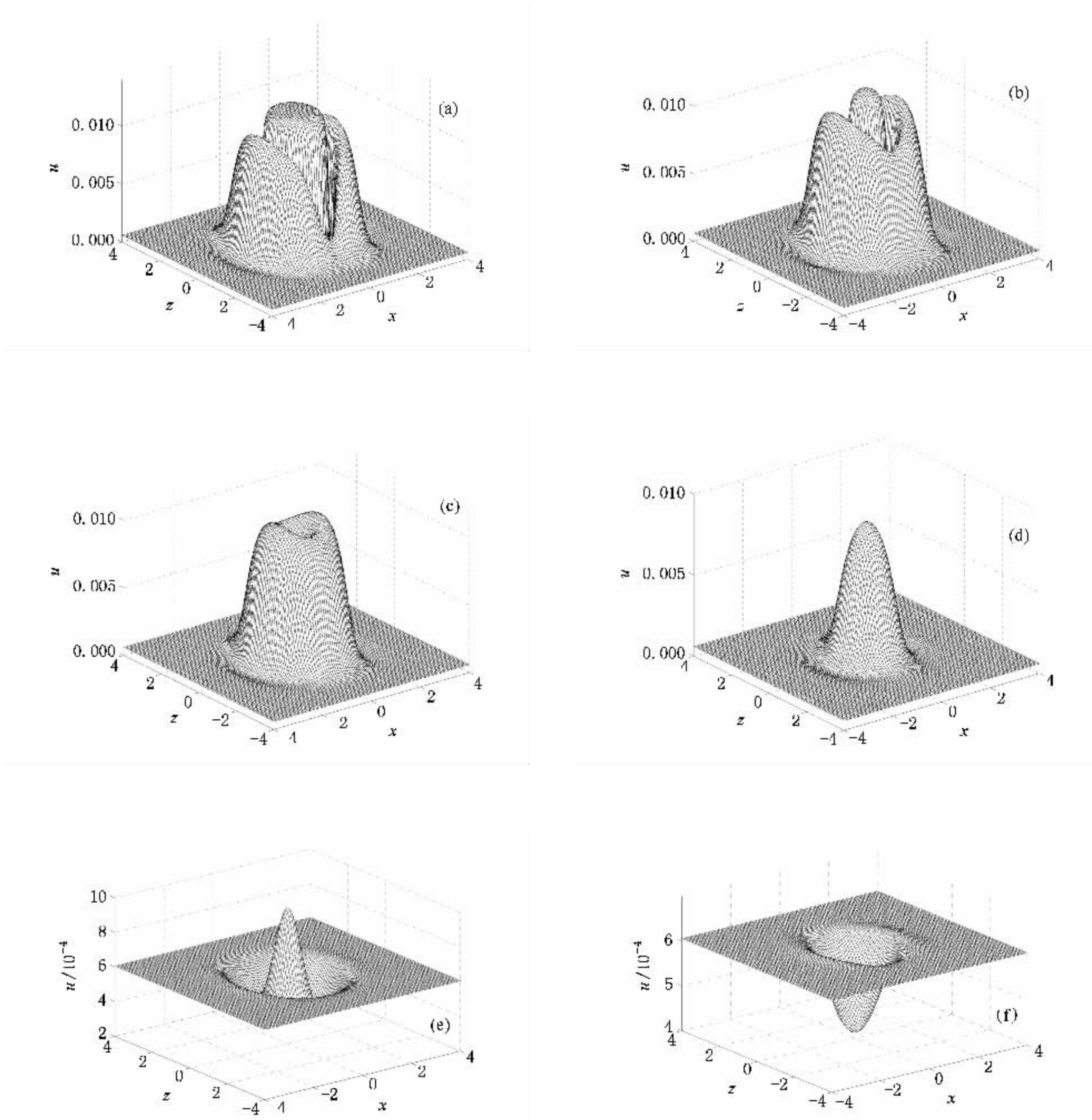

图 1　由解(33)和式(34)确定的孤子结构及其演化($C_1=10$，$C_2=2$，$k=2$，$\lambda=1$，$y=1$)　(a) $t=0$；(b) $t=0.8$；(c) $t=1.2$；(d) $t=1.8$；(e) $t=2.2$；(f) $t=2.6$

4. (3+1)维非线性 Burgers 系统的一类混沌行为与演化

混沌是在确定的非线性系统中，不需要附加随机因素也可以出现类似随机的行为，是物质世界一种普遍而本质的非线性现象. 非线性 Burgers 系统(1)—(3)的通解(33)—(43)中的任意函数 q 不仅能够激发丰富的局域孤子，也能够揭示系统的混沌行为. 本文通过受迫振动 Duffing 系统来研究 Burgers 系统的混沌现象. Duffing 系统的描述如下：

$$\frac{\mathrm{d}^2 X}{\mathrm{d}t^2} + \alpha \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} + \beta X^3 = \rho \cos t. \tag{45}$$

Duffing 系统在参数 $\alpha = 0.05$，$\beta = 1$，$\rho = 0.75$，以及初始条件 $X'(0) = 1$，$X(0) = 1$ 时的混沌解如图 2 所示.

设置 q 函数形式仍为(44)式，令(44)式中 $x = X(t)$，$y = 1$，$z = X(t)$，其中 $X(t)$是(45)式的混沌解. 我们得到了非线性 Burgers 系统(1)—(3)沿 x，z 方向的混沌解和随时间演化，如图 3 所示. 从图中能够看出，非线性 Burgers 系统(1)—(3)在受到混

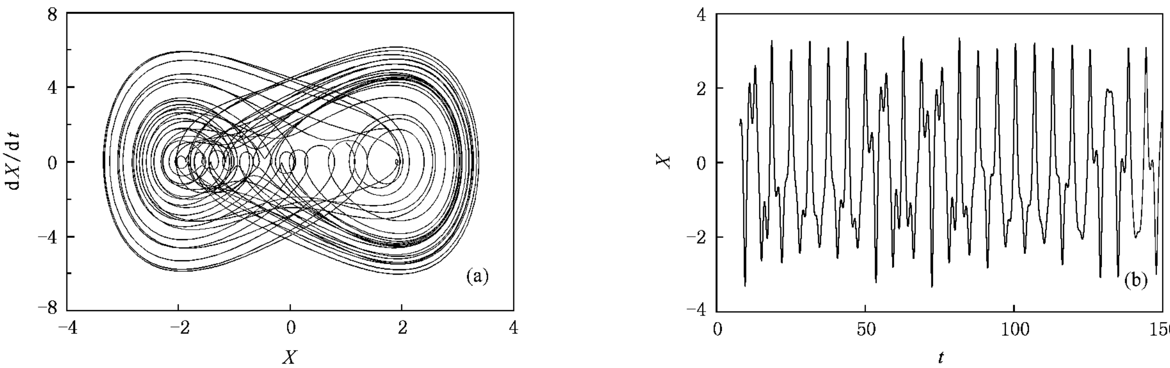

图 2 (a)由方程(45)生成的 Duffing 混沌解；(b)由方程(45)生成的 Duffing 混沌解对应的 $X-t$ 关系图

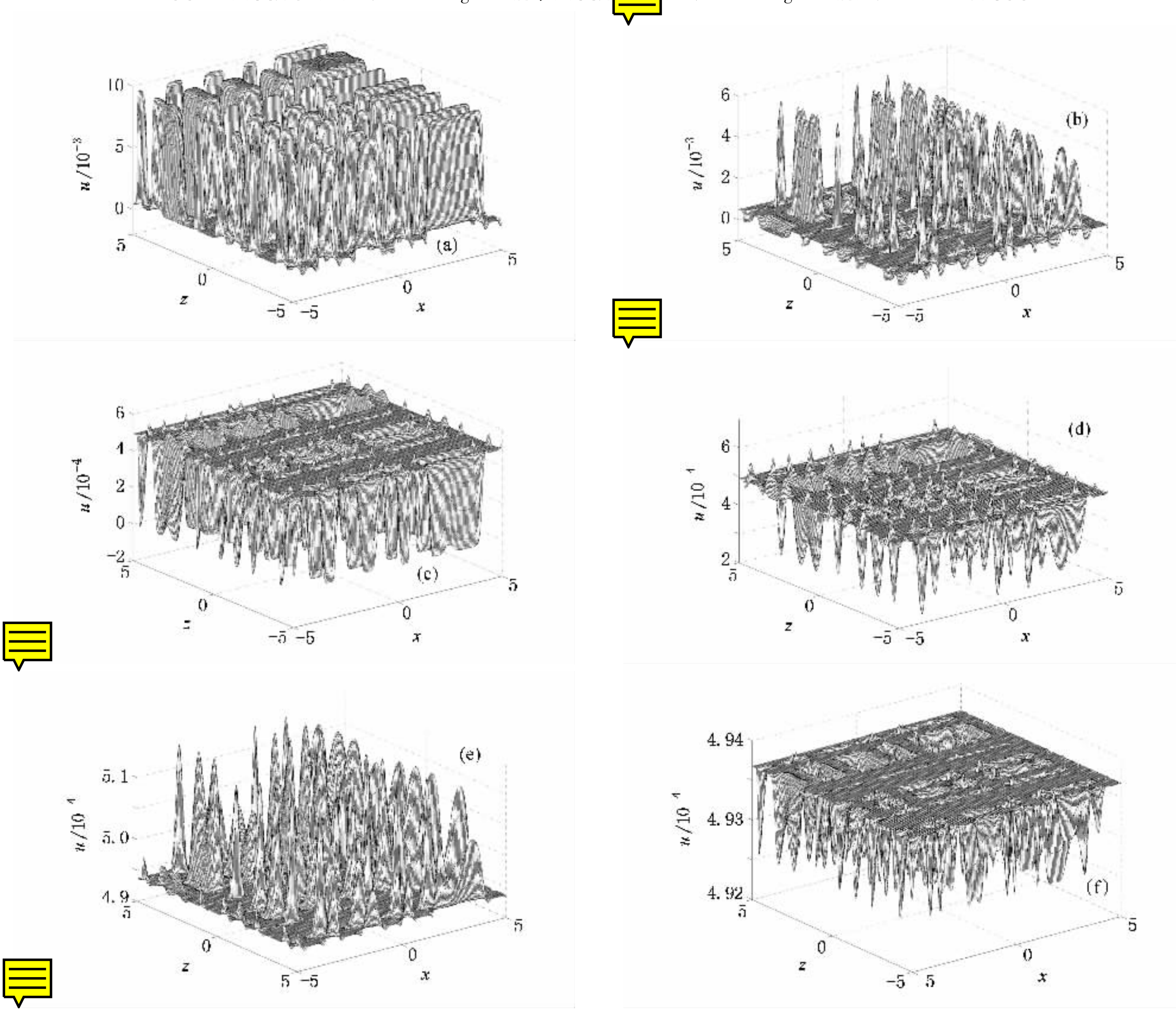

图 3 由(44)式确定的混沌解及其演化($x = X(t)$，$z = X(t)$，$y = 1$，$C_1 = 10$，$C_2 = 2$，$k = 2$，$\lambda = 1$) (a) $t = 0$；(b) $t = 0.6$；(c) $t = 2$；(d) $t = 2.4$；(e) $t = 3$；(f) $t = 3.3$

沌激发后出现整体上仍为孤子结构，但孤子结构在局域出现形态和位置上的不规则混沌．图 4(a)—(f)为图 3(a)—(f)中相应解的混沌行为的等高线图．

由于高维非线性 Burgers 系统广泛应用于大气、湍流、热传导等动力学领域，在实际应用中，物理量的变化除了遵守 Burgers 系统本身的控制方程外，还往往受到系统外部的各种因素影响．这些来自内部规律和外部因素的影响综合在一起就形成了千姿百态的非线性现象．而丰富的多孤子激发可能为解释这些非线性现象提供理论依据．

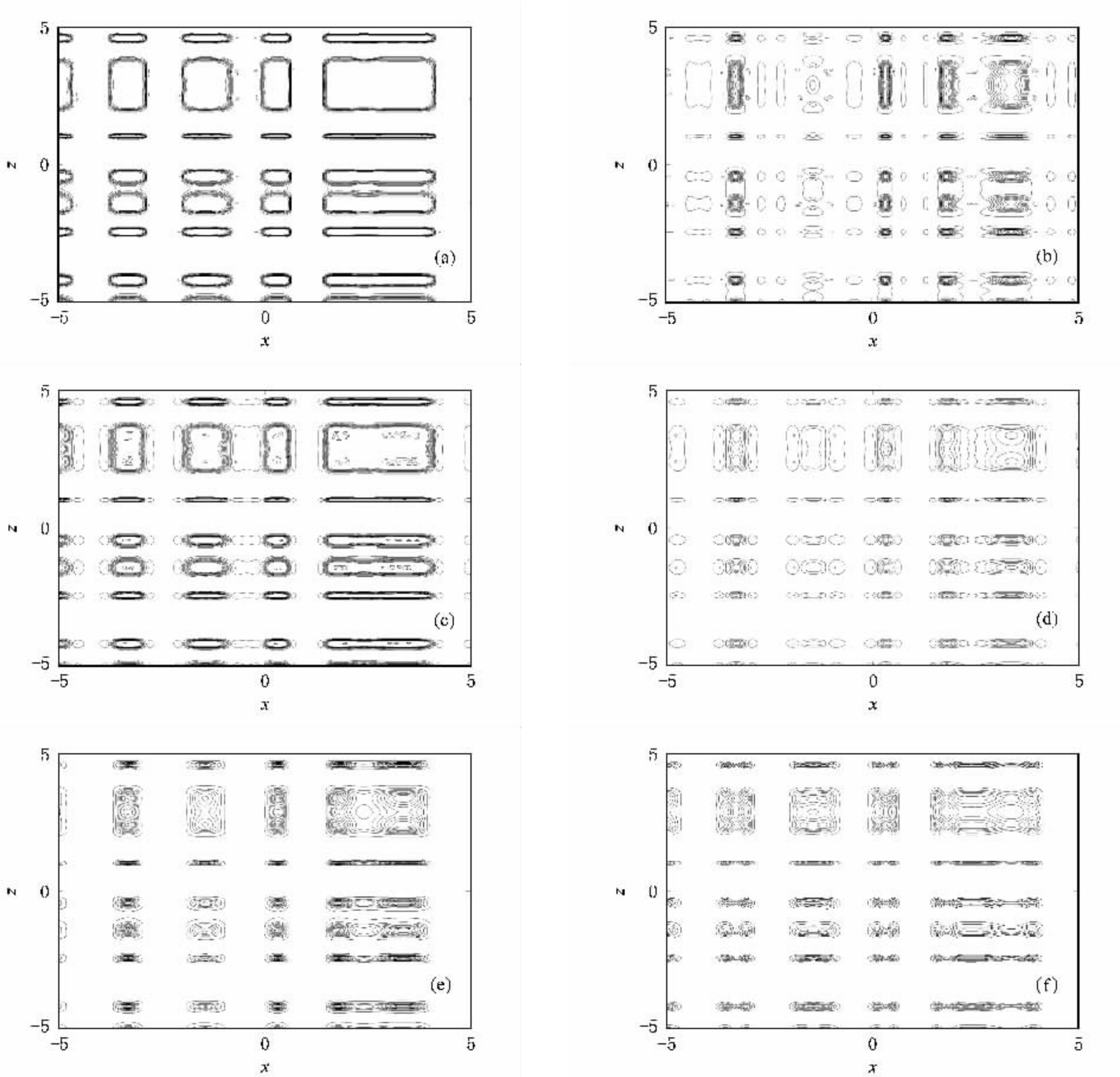

图 4　对应图 3 由(44)式确定的混沌解及其演化的等高线图($x = X(t)$，$z = X(t)$，$y = 1$，$C_1 = 10$，$C_2 = 2$，$k = 2$，$\lambda = 1$)　(a) $t = 0$；(b) $t = 0.6$；(c) $t = 2$；(d) $t = 2.4$；(e) $t = 3$；(f) $t = 3.3$

5. 结　　论

探索非线性物理方程解的孤子结构和混沌行为是非线性科学研究的主要内容之一．对于高维非性线物理方程的特殊孤子结构和混沌行为的研究，目前主要使用分离变量法和 Riccati 映射法[17—20,24—29]．而将(G'/G)展开法应用于高维非线性物理方程特殊孤子结构的激发和演化、混沌行为的生成和演化还是首次．

本文以(3+1)维非线性 Burgers 系统为例，通过对(G'/G)展开法进行扩展，获得了含任意函数的新精确非行波通解，行波解是非行波解的特例．此外，这些通解中含有待定常数，因此能够获得更为

丰富的解系，而更为丰富的解系能够为解释复杂的非线性物理现象提供更多的帮助．通过设置通解中的任意函数为特定具体函数，研究了 Burgers 系统特殊孤子结构的激发与演化，探讨了一类解的混沌行为和演化．

尽管构造高维非线性物理方程精确解的过程相对复杂，(G'/G)展开法提供了一种较为简洁和直接的求解方式．本文中对(G'/G)展开法的应用过程不失一般性，因此本文的研究方法不仅能够应用于其他高维非线性物理方程的新精确非行波通解的构造，还能够应用于发现新的特殊孤子结构，研究解的混沌行为与演化．(G'/G)展开法必将成为研究高维非线性物理方程特殊孤子、混沌与分形的又一新工具．

[1] Wang M L 1995 *Phys*. *Lett*. A **199** 169

[2] Yan Z Y，Zhang H Q 2000 *Acta Phys*. *Sin*. **49** 2113 (in Chinese) [闫振亚、张鸿庆 2000 物理学报 **49** 2 113]

[3] Fan E G 2000 *Acta Phys*. *Sin*. **49** 1409 (in Chinese) [范恩贵 2000 物理学报 **49** 1409]

[4] Liu S K，Liu S D，Fu Z T 2001 *Acta Phys*. *Sin*. **50** 2068 (in Chinese) [刘式适、刘适达、付遵涛 2001 物理学报 **50** 2068]

[5] Liu S D，Fu Z T，Liu S K，Zhao Q 2002 *Acta Phys*. *Sin*. **51** 718 (in Chinese) [刘式达、付遵涛、刘式适、赵 强 2002 物理学报 **51** 718]

[6] Wu G J，Han J H，Shi L M，Zhang M 2006 *Acta Phys*. *Sin*. **55** 3858 (in Chinese) [吴国将、韩家骅、史良马、张 苗 2006 物理学报 **55** 3858]

[7] Liu Y P，Li Z B，Wang K C 2007 *Chaos Solitons Fractals* **31** 1 172

[8] Wang M L，Zhou Y B，Li Z B 2003 *Phys*. *Lett*. A **318** 84

[9] Zhou Y B，Wang ML，Miao T D 2004 *Phys*. *Lett*. A **323** 77

[10] Zhang J L，Wang Y M，Wang M L，Fang Z D 2003 *Acta Phys*. *Sin*. **52** 1574 (in Chinese) [张金良、王跃明、王明亮、方宗德 2003 物理学报 **52** 1574]

[11] Li X Z，Zhang J L，Wang Y M，Wang M L 2004 *Acta Phys*. *Sin*. **53** 4045 (in Chinese) [李向正、张金良、王跃明、王明亮 2004 物理学报 **53** 4045]

[12] Taogetusang，Sirendaoerji 2006 *Acta Phys*. *Sin*. **55** 13 (in Chinese) [套格图桑、斯仁道尔吉 2006 物理学报 **55** 13]

[13] Taogetusang，Sirendaoerji 2006 *Acta Phys*. *Sin*. **55** 3246 (in Chinese) [套格图桑、斯仁道尔吉 2006 物理学报 **55** 3246]

[14] Li X Z，Li X Y，Zhao L Y，Zhang J L 2008 *Acta Phys*. *Sin*. **57** 22031 (in Chinese) [李向正、李修勇、赵丽英、张金良 2008 物理学报 **57** 2203]

[15] Lou S Y 2000 *Phys*. *Lett*. A **277** 94

[16] Lou S Y，Qu C Z，Zhang S L 2006 *Chin*. *Phys*. **15** 2765

[17] Lou S Y，Tang X Y 2006 *Methods of Nonlinear Mathematical Physics* (Beijing：Science Press) p120 (in Chinese) [楼森岳、唐晓艳 2006 非线性数学物理方法(北京：科学出版社) 第 120 页]

[18] Tang X Y，Liang Z F 2006 *Phys*. *Lett*. A **351** 398

[19] Zhang S L，Lou S Y，Qu C Z 2006 *Chin*. *Phys*. **15** 2765

[20] Ma H C，Ge D J，Yu Y D 2008 *Chin*. *Phys*. B **17** 1448

[21] Ying J P，Lou S Y 2003 *Chin*. *Phys*. *Lett*. **20** 1448

[22] Fang J P，Zheng C L，Zhu J M 2005 *Commun*. *Theor*. *Phys*. **44** 203

[23] Fang J P，Zheng C L 2005 *Chin*. *Phys*. **14** 670

[24] Fang J P，Zheng C L，Zhu J M 2005 *Acta Phys*. *Sin*. **54** 2990 (in Chinese) [方建平、郑春龙、朱加民 2005 物理学报 **54** 2990]

[25] Ma S H，Fang J P 2006 *Acta Phys*. *Sin*. **55** 5611 (in Chinese) [马松华、方建平 2006 物理学报 **55** 5611]

[26] Ma S H，Fang J P，Zheng C L 2008 *Chin*. *Phys*. B **17** 2767

[27] Ma S H，Fang J P，Hong B H，Zheng C L 2008 *Commun*. *Theor*. *Phys*. **49** 1245

[28] Huang L，Sun J A，Dou F Q，Duan W S，Liu X X 2007 *Acta Phys*. *Sin*. **56** 611 (in Chinese) [黄 磊、孙建安、豆福全、段文山 2007 物理学报 **56** 611]

[29] Ma S H，Wu X H，Fang J P，Zheng C L 2008 *Acta Phys*. *Sin*. **57** 11 (in Chinese) [马松华、吴小红、方建平、郑春龙 2008 物理学报 **57** 11]

[30] Wang M L，Li X Z，Zhang J L 2008 *Phys*. *Lett*. A **372** 417

[31] Zhang S，Tong J L，Wang W 2008 *Phys*. *Lett*. A **372** 2254

[32] Bekir A. 2008 *Phys*. *Lett*. A **372** 3400

[33] Zhang J，Wei X L，Lu Y J 2008 *Phys*. *Lett*. A **372** 3653

[34] Li B Q，Ma Y L 2009 *Acta Phys*. *Sin*. **58** 4373 (in Chinese) [李帮庆、马玉兰 2009 物理学报 **58** 4373]

New application of (G'/G)-expansion method to high-dimensional nonlinear physical equations*

Ma Yu-Lan　Li Bang-Qing†　Sun Jian-Zhi

(*School of Computer and Information Engineering*, *Beijing Technology and Business University*, *Beijing*　100048, *China*)

(Received 12 February 2009; revised manuscript received 18 March 2009)

Abstract

The (G'/G)-expansion method is firstly extended to construct exact non-traveling wave general solutions of high-dimensional nonlinear equations, explore special soliton-structure excitation and evolution, and investigate the chaotic patterns and evolution of these solutions. Taking as an example, new non-traveling solutions are calculated for (3 + 1)-dimensional nonlinear Burgers system by using the (G'/G)-expansion method. By setting properly the arbitrary function in the solutions, special soliton-structure excitation and evolution are observed, and the chaotic patterns and evolution are studied for the solutions.

Keywords: (G'/G)-expansion method, Burgers system, soliton structure, chaotic pattern

PACC: 0230, 0340, 0290

* Project supported by the Excellent Key Teachers Project of Beijing, China (Grant Nos. 19004811009 and PXM2007-014213-044566).

† E-mail: libq@th.btbu.edu.cn