第 58 卷 第 11 期 2009 年 11 月
1000-3290/2009/58(11)/7421-05

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.58, No.11, November, 2009

相空间中离散完整系统的 Noether 对称性和 Mei 对称性*

路 凯[1)] 方建会[1)†] 张明江[1)] 王 鹏[2)]

1)(中国石油大学(华东)物理科学与技术学院,东营 257061)

2)(新疆师范大学数学物理和信息科学学院,乌鲁木齐 830054)

(2008 年 12 月 22 日收到;2009 年 3 月 21 日收到修改稿)

研究相空间中离散完整系统的 Noether 对称性、Mei 对称性及其导致的守恒量.利用差分离散变分方法,给出相空间中离散完整系统的差分离散变分原理,建立系统的离散正则方程和能量演化方程.给出系统 Noether 对称性和 Mei 对称性的判定条件,得到系统离散形式的 Noether 守恒量和 Mei 守恒量及其存在的条件.举例说明结果的应用.

关键词:相空间,离散完整系统,对称性,守恒量

PACC:0320

1. 引 言

力学系统对称性与守恒量理论的研究是现代数学、力学、物理学等领域的重要课题.利用对称性寻求力学系统的守恒量是分析力学的一个近代发展方向.近代对称性理论主要有 Noether 对称性理论、Lie 对称性理论和 Mei 对称性理论. Noether 对称性是 Hamilton 作用量在无限小变换下的不变性. Lie 对称性是运动微分方程在无限小变换下的不变性. Mei 对称性是梅凤翔提出的一种新的对称性,是指运动微分方程中出现的动力学函数在经历无限小变换后仍满足原来方程的一种不变性.连续力学系统对称性与守恒量理论的研究已取得了一系列重要成果[1—3].

关于离散力学系统动力学理论及对称性与守恒量理论的研究具有重要的理论意义和实际价值. 1970 年,Cadzow[4] 在研究离散系统的最优化问题时,提出离散变分原理,给出了离散的 Euler-Lagrange 方程.上世纪 80 年代初李政道[5] 将时间视作一个动力学变量进行离散,给出一种新的离散变分原理,得到了保守系统的离散运动方程和离散形式的能量守恒定律. Kane, Marsden 和 Ortiz[6] 采用变时间步长的离散变分原理构造了保守系统的辛-能量-动量积分子. Zhang, Fu 等[7—10] 研究了离散动力学系统的离散变分原理和第一积分. Dorodnitsyn[11] 建立了离散 Lagrange 系统的 Noether 理论. Fu, Shi 等[12—15] 研究了位形空间中变时间步长下离散机电系统、离散非保守系统等离散系统的 Noether 对称性、Lie 对称性和 Mei 对称性及其守恒量. 2002 年,Guo 等[16—20] 提出了一种新的离散变分方法——差分离散变分方法,将差分看作一个独立的变分变量,由差分离散变分原理得到了离散 Lagrange 系统的运动微分方程和能量演化方程,并通过引入离散形式的勒让德变换,得到了相空间中相应的结果.目前,对相空间中离散力学系统对称性与守恒量理论的研究还很少.本文利用差分离散变分方法研究相空间中离散完整系统的 Noether 对称性和 Mei 对称性,给出系统 Noether 对称性和 Mei 对称性的判定条件,得到系统离散形式的 Noether 守恒量和 Mei 守恒量.

2. 差分离散变分原理和离散运动方程

相空间中完整系统的运动方程为

$$\dot{q}_s = \frac{\partial H}{\partial p_s}, \dot{p}_s = -\frac{\partial H}{\partial q_s} + Q_s,$$
$$(s = 0, 1, \cdots, n), \tag{1}$$

* 中国石油大学(华东)研究生创新基金(批准号:S2009-19)资助的课题.

† E-mail: fangjh@upc.edu.cn

其中,$H(t,q_s,p_s)$是系统的 Hamilton 函数,$Q_s(t,q_s,p_s)$为非势广义力.

系统的 Hamilton 作用量为

$$S=\int_{t_1}^{t_2}(p_s\dot{q}_s-H)\mathrm{d}t. \tag{2}$$

引入时间和正则变量的无限小变换

$$\begin{aligned} t^* &= t+\delta_t t = t+\varepsilon\tau(t,q_s,p_s),\\ q_s^* &= q_s+\delta_t q_s = q_s+\varepsilon\xi_s(t,q_s,p_s),\\ p_s^* &= p_s+\delta_t p_s = p_s+\varepsilon\eta_s(t,q_s,p_s), \end{aligned}\tag{3}$$

其中 ε 为无限小参数,τ,ξ_s 和 η_s 为无限小变换的生成元函数,δ_t 表示全变分.

若无限小变换(3)是系统(1)的广义准对称变换,则应有

$$\delta_t S=-\int_{t_1}^{t_2}Q_s\delta q_s\mathrm{d}t. \tag{4}$$

在离散情况下,时间区间(t_1,t_2)被离散化为一个点序列 $\{t_k\}$,$k=0,1,\cdots,N$,相应地,正则变量$q_s(t)$,$p_s(t)$离散为 $q_s^k=q_s(t_k)$,$p_s^k=p_s(t_k)$,非势广义力 $Q_s(t,q_s,p_s)$和 Lagrange 函数 $L(t,q_s,\dot{q}_s)$分别离散为 $Q_s^k=Q_s(t_k,q_s^k,p_s^k)$和 $L_D^k=L_D\left(t_k,q_s^k,\dfrac{q_s^{k+1}-q_s^k}{t_{k+1}-t_k}\right)$,正则变量的差分表示为

$$\Delta q_s^k=\frac{q_s^{k+1}-q_s^k}{t_{k+1}-t_k},\Delta p_s^k=\frac{p_s^{k+1}-p_s^k}{t_{k+1}-t_k}. \tag{5}$$

引入离散 Hamilton 函数

$$\begin{aligned} H_D^k &= H_D(t_k,q_s^k,p_s^k)\\ &= p_s^k\Delta q_s^k-L_D(t_k,q_s^k,\Delta q_s^k), \end{aligned}\tag{6}$$

其中

$$p_s^k=\frac{\partial L_D^k}{\partial\Delta q_s^k} \tag{7}$$

为离散广义动量,则离散 Hamilton 作用量可表示为

$$S_D=\sum_k(t_{k+1}-t_k)(p_s^k\Delta q_s^k-H_D^k). \tag{8}$$

取离散时间和正则变量的无限小变换

$$\begin{aligned} t_k^* &= t_k+\delta_t t_k = t_k+\varepsilon\tau_k(t_k,q_s^k,p_s^k),\\ q_s^{k*} &= q_s^k+\delta_t q_s^k = q_s^k+\varepsilon\xi_s^k(t_k,q_s^k,p_s^k),\\ p_s^{k*} &= p_s^k+\delta_t p_s^k = p_s^k+\varepsilon\eta_s^k(t_k,q_s^k,p_s^k), \end{aligned}\tag{9}$$

其中 τ_k,ξ_s^k 和 η_s^k 为离散生成元函数.

在无限小变换(9)下,与(4)式相应的离散形式为

$$\delta_t S_D=-\sum_k(t_{k+1}-t_k)(Q_s^k\delta q_s^k), \tag{10}$$

其中,δq_s^k 为离散虚位移,满足如下关系式[19]:

$$\delta q_s^k=\delta_t q_s^k-\delta_t t_k\Delta q_s^k. \tag{11}$$

由(10)式可得

$$\begin{aligned} &\delta_t\sum_k(t_{k+1}-t_k)(p_s^k\Delta q_s^k-H_D^k)\\ &\quad+\sum_k(t_{k+1}-t_k)(Q_s^k\delta q_s^k)\\ &=\sum_k\{(p_s^k\Delta q_s^k-H_D^k)\delta_t(t_{k+1}-t_k)\\ &\quad+(t_{k+1}-t_k)\delta_t(p_s^k\Delta q_s^k-H_D^k)\\ &\quad+(t_{k+1}-t_k)Q_s^k(\delta_t q_s^k-\delta_t t\Delta q_s^k)\}\\ &=\sum_k(t_{k+1}-t_k)\{p_s^k\Delta q_s^k\Delta\delta_t t_k-H_D^k\Delta\delta_t t_k\\ &\quad+\Delta q_s^k\delta_t p_s^k+p_s^k\delta_t\Delta q_s^k-\delta_t H_D^k\\ &\quad+Q_s^k(\delta_t q_s^k-\delta_t t_k\Delta q_s^k)\}=0. \end{aligned}\tag{12}$$

利用莱布尼兹法则

$$\Delta(f_kg_k)=\Delta f_k\cdot g_k+f_{k+1}\cdot\Delta g_k, \tag{13}$$

以及关系式[19]

$$\delta_t\Delta q_s^k=\Delta\delta_t q_s^k-\Delta q_s^k\Delta\delta_t t_k. \tag{14}$$

(12)式可变为

$$\begin{aligned} &\sum_k(t_{k+1}-t_k)\Big\{\Big(\Delta q_s^k-\frac{\partial H_D^k}{\partial p_s^k}\Big)\delta_t p_s^k\\ &-\Big(\Delta p_s^{k-1}+\frac{\partial H_D^k}{\partial q_s^k}-Q_s^k\Big)\delta_t q_s^k\\ &+\Big(\Delta H_D^{k-1}-\frac{\partial H_D^k}{\partial t_k}-\Delta q_s^kQ_s^k\Big)\delta_t t_k\\ &+\Delta(p_s^{k-1}\delta_t q_s^k-H_D^{k-1}\delta_t t_k)\Big\}=0. \end{aligned}\tag{15}$$

采用固定的边界条件 $\delta_t t_0=\delta_t t_N=0$,$\delta_t q_s^0=\delta_t q_s^N=0$ 和 $\delta_t p_s^0=\delta_t q_s^N=0$,由(15)式可得离散完整系统的正则方程

$$\Delta q_s^k=\frac{\partial H_D^k}{\partial p_s^k},\ \Delta p_s^{k-1}=-\frac{\partial H_D^k}{\partial q_s^k}+Q_s^k, \tag{16}$$

以及能量演化方程

$$\Delta H_D^{k-1}-\frac{\partial H_D^k}{\partial t_k}-\Delta q_s^kQ_s^k=0. \tag{17}$$

3. 相空间中离散完整系统的 Noether 对称性和守恒量

根据(12)式可得

$$\begin{aligned} &p_s^k\Delta q_s^k\Delta\delta_t t_k-H_D^k\Delta\delta_t t_k+\Delta q_s^k\delta_t p_s^k+p_s^k\delta_t\Delta q_s^k\\ &-\delta_t H_D^k+Q_s^k(\delta_t q_s^k-\delta_t t_k\Delta q_s^k)=0. \end{aligned}\tag{18}$$

将(16)式的第一个方程和(17)式代入(18)式,并注

意到

$$\delta_t t_k = \varepsilon\tau_k,\delta_t q_s^k = \varepsilon\xi_s^k, \tag{19}$$

由 ε 的任意性可得

$$p_s^k\Delta\xi_s^k - \frac{\partial H_D^k}{\partial t_k}\tau_k - \frac{\partial H_D^k}{\partial q_s^k}\xi_s^k - H_D^k\Delta\tau_k + Q_s^k(\xi_s^k - \Delta q_s^k\tau_k) = 0. \tag{20}$$

命题 1　对于相空间中的离散完整系统(16)和(17)，若存在离散规范函数 $G_N^k = G_N(t_k,q_s^k,p_s^k)$，使无限小变换的生成元 τ_k，ξ_s^k 和 η_s^k 满足

$$p_s^k\Delta\xi_s^k - \frac{\partial H_D^k}{\partial t_k}\tau_k - \frac{\partial H_D^k}{\partial q_s^k}\xi_s^k - H_D^k\Delta\tau_k + Q_s^k(\xi_s^k - \Delta q_s^k\tau_k) + \Delta G_N^k = 0. \tag{21}$$

则系统的 Noether 对称性可导致离散形式的 Noether 守恒量

$$I_D = p_s^{k-1}\xi_s^k - H_D^{k-1}\tau_k + G_N^k = \mathrm{const}. \tag{22}$$

(21)式称为离散形式的 Noether 等式.

证明　由莱布尼兹法则(13)和方程(16)，(17)，使(21)式可变为

$$\begin{aligned}
&p_s^k\Delta\xi_s^k - \frac{\partial H_D^k}{\partial t_k}\tau_k - \frac{\partial H_D^k}{\partial q_s^k}\xi_s^k - H_D^k\Delta\tau_k + Q_s^k(\xi_s^k - \Delta q_s^k\tau_k) + \Delta G_N^k \\
&= \Delta(p_s^{k-1}\xi_s^k) - \Delta p_s^{k-1}\xi_s^k - \frac{\partial H_D^k}{\partial t_k}\tau_k - \frac{\partial H_D^k}{\partial q_s^k}\xi_s^k - \Delta(H_D^{k-1}\tau_k) + \Delta H_D^{k-1}\tau_k \\
&\quad + Q_s^k(\xi_s^k - \Delta q_s^k\tau_k) + \Delta G_N^k \\
&= \tau_k\left(\Delta H_D^{k-1} - \frac{\partial H_D^k}{\partial t_k} + Q_s^k\Delta q_s^k\right) - \xi_s^k\left(\Delta p_s^{k-1} + \frac{\partial H_D^k}{\partial q_s^k} + Q_s^k\right) \\
&\quad + \Delta(p_s^{k-1}\xi_s^k - H_D^{k-1}\tau_k + G_N^k) \\
&= \Delta(p_s^{k-1}\xi_s^k - H_D^{k-1}\tau_k + G_N^k) = 0.
\end{aligned} \tag{23}$$

4. 相空间中离散完整系统的 Mei 对称性和守恒量

取离散变量和离散函数的递推算符为

$$R_\pm f(z_k) = f(z_{k\pm1}), \tag{24}$$

生成元矢量为

$$X_D^{(0)} = \tau_k\frac{\partial}{\partial t_k} + \xi_s^k\frac{\partial}{\partial q_s^k} + \eta_s^k\frac{\partial}{\partial p_s^k}. \tag{25}$$

在无限小变换(9)下，动力学函数 H_D^k，H_D^{k-1} 和 Q_s^k 分别变为 H_D^{k*}，H_D^{k-1*} 和 Q_s^{k*}. 将其展开，有

$$\begin{aligned}
H_D^{k*} &= H_D(t_k^*,q_s^{k*},p_s^{k*}) \\
&= H_D^k + \varepsilon X_D^{(0)}(H_D^k) + O(\varepsilon^2) + \cdots,
\end{aligned} \tag{26}$$

$$\begin{aligned}
H_D^{k-1*} &= H_D(t_{k-1}^*,q_s^{k-1*},p_s^{k-1*}) \\
&= H_D^{k-1} + \varepsilon R_- X_D^{(0)}(H_D^k) + O(\varepsilon^2) + \cdots,
\end{aligned} \tag{27}$$

$$\begin{aligned}
Q_s^{k*} &= Q_s(t_k^*,q_s^{k*},p_s^{k*}) \\
&= Q_s^k + \varepsilon X_D^{(0)}(Q_s^k) + O(\varepsilon^2) + \cdots.
\end{aligned} \tag{28}$$

如果用无限小变换后的动力学函数 H_D^{k*}，H_D^{k-1*} 和 Q_s^{k*} 分别代替变换前的 H_D^k，H_D^{k-1} 和 Q_s^k 时，方程(16)和(17)的形式保持不变，则称这种不变性为相空间中离散完整系统的 Mei 对称性.

将(26)—(28)式代入方程(16)和(17)，忽略二阶小量，可得

$$\frac{\partial X_D^{(0)}(H_D^k)}{\partial p_s^k} = 0,\quad \frac{\partial X_D^{(0)}(H_D^k)}{\partial q_s^k} = X_D^{(0)}(Q_s^k), \tag{29}$$

$$\Delta R_- X_D^{(0)}(H_D^k) - \frac{\partial X_D^{(0)}(H_D^k)}{\partial t_k} - \Delta q_s^k X_D^{(0)}(Q_s^k) = 0. \tag{30}$$

于是，有

判据　对于相空间中的离散完整系统(16)和(17)，如果无限小变换的生成元 τ_k，ξ_s^k 和 η_s^k 满足方程(29)和(30)，则系统具有 Mei 对称性.

命题 2　对于相空间中的离散完整系统(16)和(17)，如果 Mei 对称性的生成元 τ_k，ξ_s^k，η_s^k 和离散规范函数 $G_M^k = G_M(t_k,q_s^k,p_s^k)$满足下列等式：

$$\begin{aligned}
&X_D^{(0)}(p_s^k)\Delta\xi_s^k + \Delta R_- X_D^{(0)}(p_s^k)\xi_s^k \\
&- X_D^{(0)}[X_D^{(0)}(H_D^k)] - X_D^{(0)}(H_D^k)\Delta\tau_k \\
&+ X_D^{(0)}(Q_s^k)(\xi_s^k - \Delta q_s^k\tau_k) + \Delta G_M^k = 0,
\end{aligned} \tag{31}$$

则系统的 Mei 对称性可导致离散形式的 Mei 守恒量

$$\begin{aligned}
I_D &= R_- X_D^{(0)}(p_s^k)\xi_s^k - R_- X_D^{(0)}(H_D^k)\tau_k \\
&\quad + G_M^k = \mathrm{const}.
\end{aligned} \tag{32}$$

(31)式称为系统 Mei 对称性的离散形式的结构方程(或称为离散形式的 Mei 等式).

证明　利用莱布尼兹法则(13)和方程(29)，(30)，由(31)式可得

$$\begin{aligned}
&X_D^{(0)}(p_s^k)\Delta\xi_s^k + \Delta R_- X_D^{(0)}(p_s^k)\xi_s^k \\
&- X_D^{(0)}[X_D^{(0)}(H_D^k)] - X_D^{(0)}(H_D^k)\Delta\tau_k \\
&+ X_D^{(0)}(Q_s^k)(\xi_s^k - \Delta q_s^k\tau_k) + \Delta G_M^k \\
&= \Delta[R_- X_D^{(0)}(p_s^k)\xi_s^k] - \tau_k\frac{\partial X_D^{(0)}(H_D^k)}{\partial t_k}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-\xi_s^k \frac{\partial X_D^{(0)}(H_D^k)}{\partial q_s^k}-\eta_s^k \frac{\partial X_D^{(0)}(H_D^k)}{\partial p_s^k}\\
&-\{\Delta[R_- X_D^{(0)}(H_D^k)\tau_k]-\tau_k \Delta R_- X_D^{(0)}(H_D^k)\}\\
&+X_D^{(0)}(Q_s^k)(\xi_s^k-\Delta q_s^k \tau_k)+\Delta G_M^k\\
=&\ \tau_k\left[\Delta R_- X_D^{(0)}(H_D^k)-\frac{\partial X_D^{(0)}(H_D^k)}{\partial t_k}-\Delta q_s^k X_D^{(0)}(Q_s^k)\right]\\
&+\xi_s^k\left[X_D^{(0)}(Q_s^k)-\frac{\partial X_D^{(0)}(H_D^k)}{\partial q_s^k}\right]\\
&-\eta_s^k \frac{\partial X_D^{(0)}(H_D^k)}{\partial p_s^k}+\Delta[R_- X_D^{(0)}(p_s^k)\xi_s^k\\
&-R_- X_D^{(0)}(H_D^k)\tau_k+G_M^k]\\
=&\ \Delta[R_- X_D^{(0)}(p_s^k)\xi_s^k-R_- X_D^{(0)}(H_D^k)\tau_k+G_M^k]=0.
\end{aligned}
\tag{33}
$$

5. 算　　例

设相空间中离散完整系统的 Hamilton 函数为

$$H_D^k=\frac{1}{2}[(p_1^k)^2+(p_2^k)^2]+q_1^k, \tag{34}$$

非势广义力为

$$Q_1^k=0, Q_2^k=t_k. \tag{35}$$

研究系统的 Noether 对称性和 Mei 对称性及其相应的守恒量.

根据(16)和(17)式,得到系统的离散正则方程和能量演化方程

$$
\begin{aligned}
&\Delta q_1^k=p_1^k, \Delta q_2^k=p_2^k,\\
&\Delta p_1^{k-1}=-1, \Delta p_2^{k-1}=Q_2^k=t_k,\\
&\Delta H_D^{k-1}-\Delta q_1^k Q_1^k-\Delta q_2^k Q_2^k\\
=&\ \Delta H_D^{k-1}-t_k \Delta q_2^k=0.
\end{aligned}
\tag{36}
$$

首先,研究系统的 Noether 对称性. 由(21)式可得

$$
\begin{aligned}
&p_1^k \Delta \xi_1^k+p_2^k \Delta \xi_2^k-\xi_1^k-H_D^k \Delta \tau_k\\
&+t_k(\xi_2^k-\Delta q_2^k \tau_k)+\Delta G_N^k=0,
\end{aligned}
\tag{37}
$$

(37)式有如下解:

$$
\begin{aligned}
&\tau_k=0, \xi_1^k=t_k, \xi_2^k=1,\\
&\eta_1^k=\eta_2^k=0, G_N^k=-q_1^k.
\end{aligned}
\tag{38}
$$

根据命题 1 可得系统离散形式的 Noether 守恒量

$$I_D=t_k p_1^{k-1}+p_2^{k-1}-q_1^k=\text{const}. \tag{39}$$

其次,研究系统的 Mei 对称性. 做计算,得

$$
\begin{aligned}
&X_D^{(0)}(H_D^k)=p_1^k \eta_1^k+p_2^k \eta_2^k+\xi_1^k,\\
&X_D^{(0)}(Q_1^k)=0,\ X_D^{(0)}(Q_2^k)=\tau_k,\\
&X_D^{(0)}(p_1^k)=\eta_1^k,\ X_D^{(0)}(p_2^k)=\eta_2^k.
\end{aligned}
\tag{40}
$$

取生成元

$$\tau_k=0, \xi_1^k=p_1^k, \xi_2^k=0, \eta_1^k=-1, \eta_2^k=0. \tag{41}$$

则有

$$
\begin{aligned}
&X_D^{(0)}(H_D^k)=0, X_D^{(0)}(Q_1^k)=0, X_D^{(0)}(Q_2^k)=0,\\
&X_D^{(0)}(p_1^k)=-1, X_D^{(0)}(p_2^k)=0.
\end{aligned}
\tag{42}
$$

将(41),(42)式代入方程(31),可得

$$G_M^k=-t_k. \tag{43}$$

由命题 2 得到系统离散形式的 Mei 守恒量

$$I_D=-p_1^k-t_k=\text{const}. \tag{44}$$

6. 结　　论

离散系统对称性和守恒量的研究以往大多仅限于位形空间,本文利用差分离散变分方法研究了相空间中离散完整系统的 Noether 对称性和 Mei 对称性,给出了系统离散形式的 Noether 等式和 Mei 对称性的结构方程,得到了离散形式的 Noether 守恒量和 Mei 守恒量. 本文利用的差分离散变分方法,将差分看作一个独立变量,在变分运算时直接进行处理,这种离散变分方法正是连续变分方法的离散对应,当时间步长 $t_{k+1}-t_k \to 0$ 时,本文结果自然地回到相应连续情况下的结果.

[1] Mei F X 1999 *Applications of Lie groups and Lie Algebras to Constrained Mechanical Systems* (Beijing: Science Press) (in Chinese) [梅凤翔 1999 李群和李代数对约束力学系统的应用 (北京 科学出版社)]

[2] Mei F X 2004 *Symmetries and Conserved Quantities of Constrained Mechanical Systems* (Beijing: Beijing Institute of Technology Press) (in Chinese) [梅凤翔 2004 约束力学系统的对称性与守恒量 (北京 北京理工大学出版社)]

[3] Luo S K, Zhang Y F 2008 *Advances in the study of Dynamics of Constrained Systems* (Beijing: Science Press) (in Chinese) [罗绍凯、张永发 2008 约束力学系统动力学研究进展(北京:科学出版社)]

[4] Cadzow J D 1970 *Int*. *J*. *Control* **11** 393

[5] Lee T D 1983 *Phys*. *Let*. B **122** 217

[6] Kane C, Marsden J E, Ortiz M 2001 *J*. *Math*. *Phys*. **40** 3353

[7] Zhang H B, Chen L Q, Liu R W 2005 *Chin*. *Phys*. **14** 238

[8] Zhang H B, Chen L Q, Liu R W 2005 *Chin*. *Phys*. **14** 1063

[9] Fu J L, Dai G D, Salvador J, Tang Y F 2007 *Chin*. *Phys*. **16** 570

[10] Fu J L, Chen B Y, Tang Y F, Fu H 2008 *Chin*. *Phys*. B **17** 3942

[11] Dorodnitsyn V 2001 *Appl*. *Numer*. *Math*. **39** 307

[12] Fu J L, Chen B Y, Xie F P 2008 *Chin*. *Phys*. B **17** 4354

[13] Shi S Y, Fu J L, Chen L Q 2008 *Chin*. *Phys*. B **17** 385

[14] Shi S Y, Chen L Q, Fu J L 2008 *Commun*. *Theor*. *Phys*. **50** 607

[15] Huang X H, Zhang X B, Shi S Y 2008 *Acta Phys*. *Sin*. **57** 6056 (in Chinese) [黄晓虹、张晓波、施沈阳 2008 物理学报 **57** 6056]

[16] Guo H Y, Li Y Q, Wu K, Wang S K 2002 *Comm*. *Theor*. *Phys*. **37** 1

[17] Guo H Y, Li Y Q, Wu K, Wang S K 2002 *Comm*. *Theor*. *Phys*. **37** 129

[18] Guo H Y, Li Y Q, Wu K, Wang S K 2002 *Comm*. *Theor*. *Phys*. **37** 257

[19] Guo H Y, Wu K 2003 *J*. *Math*. *Phys*. **44** 5978

[20] Luo X D, Guo H Y, Li Y Q, Wu K 2004 *Comm*. *Theor*. *Phys*. **42** 443

Noether symmetry and Mei symmetry of discrete holonomic system in phase space*

Lu Kai[1)]　Fang Jian-Hui[1)†]　Zhang Ming-Jiang[1)]　Wang Peng[2)]

1) (*College of Physics Science and Technology*, *China University of Petroleum* (*East China*), *Dongying* 257061, *China*)

2) (*School of Maths-physics and Information Science*, *Xinjiang Normal University*, *Urumqi* 830054, *China*)

(Received 22 December 2008; revised manuscript received 21 March 2009)

Abstract

The Noether symmetry, the Mei symmetry and the conserved quantities of discrete holonomic system in phase space are studied in this paper. Using the difference discrete variational approach, the difference discrete variational principle of discrete holonomic system in phase space is derived. The discrete canonical equations and energy evolution equation are established. The criterion of Noether symmetry and Mei symmetry of the system are given. The discrete Noether and Mei conserved quantities and the conditions for their existence are obtained. An example is discussed to show the applications of the results.

Keywords: phase space, discrete holonomic system, symmetry, conserved quantity

PACC: 0320

* Project supported by the Graduate Students' Innovative Foundation of China University of Petroleum (East China) (Grant No. S2009-19).

† E-mail: fangjh@upc.edu.cn