第 58 卷 第 11 期 2009 年 11 月
1000-3290/2009/58(11)/7440-07

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.58,No.11,November,2009
©2009 Chin.Phys.Soc.

非完整力学系统 Mei 对称性的摄动及其导致的一类新型 Mei 绝热不变量*

丁 宁[1)†] 方建会[2)]

1)(滨州学院物理与电子科学系,理论物理研究所,滨州 256603)

2)(中国石油大学物理科学与技术学院,东营 257061)

(2009 年 2 月 3 日收到;2009 年 2 月 26 日收到修改稿)

研究非完整力学系统 Mei 对称性的摄动及其导致的新型 Mei 绝热不变量. 给出了系统 Mei 对称性的判据方程和结构方程在受微扰后变化的形式,得到了系统 Mei 对称性的摄动导致的新型 Mei 绝热不变量的形式和条件.

关键词:非完整力学系统,Mei 对称性,摄动,Mei 绝热不变量

PACC:0320

1. 引 言

非完整力学系统在工程机械、航空航天等生产实践领域中具有广泛的应用,因此非完整力学的研究一直受到国内外学者的关注. 近年来,分析力学中关于非完整力学系统 Noether 对称性、Lie 对称性和 Mei 对称性理论及其导致的守恒量的研究逐渐成为一个新的热门课题,并取得了一系列重要的研究成果[1—12]. 然而,在实际环境中,非完整力学系统往往要受到外来微小因素的干扰,从而导致系统原有的对称性和守恒量(也称为精确不变量)被破坏[12]. 假设这种改变是在系统原有对称性变换的基础上发生的小摄动,进而可以分析外来微扰对系统原有对称性的影响. 而由系统对称性的摄动导致的绝热不变量将取代精确不变量,更好地反映受微扰系统的内在属性. 因此在研究非完整力学系统的对称性导致精确不变量的基础上,研究非完整力学系统对称性的摄动及其绝热不变量具有重要的理论价值.

最初,关于非完整力学系统对称性的摄动及其导致的绝热不变量的研究主要集中于其 Noether 对称性和 Lie 对称性的摄动,并得到了其导致的 Noether 绝热不变量[13—17]. 2006 年,张毅等拓展了这一研究领域,提出了一类由力学系统 Lie 对称性的摄动直接导致的 Hojman 绝热不变量[18—20]. 最近,作者研究了动力学系统 Mei 对称性的摄动及其导致的 Noether 绝热不变量,使得这一研究内容进一步扩展[21]. 然而,由于 Mei 对称性结构方程中存在无限小群变换生成元的乘积项,使得动力学系统 Mei 对称性的摄动研究具有一定的复杂性,而直接得到系统 Mei 对称性的摄动导致的 Mei 绝热不变量成为一项极具挑战的工作,到目前为止还鲜有人涉及. 2008 年,文献[22]基于对 Mei 对称性结构方程中部分无限小群变换生成元的摄动,得到了相空间中力学系统的一类 Mei 绝热不变量,但由于对推导的前提条件进行了简化,使得该文献的结论不具有一般性. 本文作者在充分考虑了 Mei 对称性结构方程中所有无限小群变换生成元的摄动后,提出了 Hamilton 系统的一类具有一般形式的新型 Mei 绝热不变量[23]. 而关于非完整力学系统 Mei 对称性的摄动导致的 Mei 绝热不变量的研究还未见报道.

本文将在充分考虑 Mei 对称性结构方程中所有无限小群变换生成元的摄动的基础上,得到非完整力学系统 Mei 对称性的摄动导致的一类新型 Mei 绝热不变量. 给出系统 Mei 对称性的判据方程和结构方程在受微扰后变化的形式,得到系统 Mei 对称性的摄动导致的新型 Mei 绝热不变量的形式和条件.

* 山东省自然科学基金(批准号:Y2008A33),山东省教育厅科研发展计划项目(批准号:J08LI51)和滨州学院科研基金(批准号:BZXYG0903)资助的课题.

† E-mail:dingningch@yahoo.com.cn

2. 系统的运动微分方程

设力学系统的位形由 n 个广义坐标 q_s $(s=1,2,\cdots,n)$ 来确定. 其运动受到 g 个双面理想 Chetaev 型非完整约束

$$f_\beta(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})=0\quad(\beta=1,2,\cdots,g),\tag{1}$$

并设约束是彼此相容且独立的. 约束(1)加在虚位移 δq_s 上的 Chetaev 条件为

$$\frac{\partial f_\beta}{\partial\dot{q}_s}\delta q_s=0.\tag{2}$$

系统的运动微分方程可表示为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_s}-\frac{\partial L}{\partial q_s}=Q_s+\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial\dot{q}_s}\quad(s=1,2,\cdots,n),\tag{3}$$

其中 $L=L(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ 为系统的 Lagrange 函数，$Q_s=Q_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ 为非势广义力，λ_β 为约束乘子. 设系统非奇异，即设

$$\det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial\dot{q}_s\partial\dot{q}_k}\right)\neq 0,\tag{4}$$

则由方程(1)和(3)，在方程积分之前可求出 $\lambda_\beta(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$. 于是方程(3)可写为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_s}-\frac{\partial L}{\partial q_s}=Q_s+\Lambda_s,\tag{5}$$

其中

$$\Lambda_s=\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial\dot{q}_s},\tag{6}$$

为广义非完整约束力. 展开方程(5)，可求出所有广义加速度，记作

$$\ddot{q}_s=\alpha_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}).\tag{7}$$

称方程(5)或(7)为与非完整力学系统(1)，(5)相应的完整系统的运动方程[1].

3. 系统的 Mei 对称性与 Mei 精确不变量

引进时间和广义坐标的无限小群变换

$$t^*=t+\varepsilon\tau^0(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}),$$
$$q_s^*(t^*)=q_s(t)+\varepsilon\xi_s^0(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}),\tag{8}$$

其中 ε 为无限小参数，τ^0,ξ_s^0 为无限小群变换的生成元.

根据 Mei 对称性理论，非完整力学系统(1)，(5)的 Mei 对称性的判据方程可表示为

$$\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial X_0^{(1)}(L)}{\partial\dot{q}_s}-\frac{\partial X_0^{(1)}(L)}{\partial q_s}=X_0^{(1)}(Q_s)+X_0^{(1)}(\Lambda_s),\tag{9}$$

其限制方程可表示为

$$X_0^{(1)}(f_\beta)=0,\tag{10}$$

其中

$$X_0^{(1)}=\tau^0\frac{\partial}{\partial t}+\xi_s^0\frac{\partial}{\partial q_s}+\left(\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_s^0-\dot{q}_s\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\tau^0\right)\frac{\partial}{\partial\dot{q}_s},\tag{11}$$

$$\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial}{\partial t}+\dot{q}_k\frac{\partial}{\partial q_k}+\alpha_k\frac{\partial}{\partial\dot{q}_k}\quad(k=1,2,\cdots,n).\tag{12}$$

对于非完整力学系统(1)，(5)，如果无限小群变换的生成元 τ^0,ξ_s^0 满足判据方程(9)和限制方程(10)，则相应不变性为系统的 Mei 对称性[1].

命题 1　如果无限小群变换的生成元 τ^0,ξ_s^0 是非完整力学系统(1)，(5)的 Mei 对称性的生成元，且存在规范函数 $G_{\mathrm{M}}^0=G_{\mathrm{M}}^0(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ 满足如下结构方程

$$X_0^{(1)}(L)\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\tau^0+X_0^{(1)}[X_0^{(1)}(L)]+X_0^{(1)}(Q_s+\Lambda_s)(\xi_s^0-\dot{q}_s\tau^0)+\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}G_{\mathrm{M}}^0=0,\tag{13}$$

则系统的 Mei 对称性导致 Mei 精确不变量[1]

$$I_{\mathrm{M0}}=X_0^{(1)}(L)\tau^0+\frac{\partial X_0^{(1)}(L)}{\partial\dot{q}_s}\times(\xi_s^0-\dot{q}_s\tau^0)+G_{\mathrm{M}}^0=\mathrm{const}.\tag{14}$$

对于与非完整力学系统(1)，(5)相应的完整系统(5)，如果无限小群变换的生成元 τ^0,ξ_s^0 满足判据方程(9)，则相应不变性为系统的 Mei 对称性[1].

命题 2　如果无限小群变换的生成元 τ^0,ξ_s^0 是与非完整力学系统(1)，(5)相应的完整系统(5)的 Mei 对称性生成元，且存在规范函数 $G_{\mathrm{M}}^0=G_{\mathrm{M}}^0(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ 满足结构方程(13)，则系统的 Mei 对称性导致 Mei 精确不变量(14)[1].

4. 系统 Mei 对称性的摄动与 Mei 绝热不变量

基于绝热不变量的概念[12]，对非完整力学系统

可给出如下定义.

定义 若 $I_z(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, \varepsilon)$ 是非完整力学系统的一个含有 ε 的最高次幂为 z 的物理量，其对时间 t 的一阶导数正比于 ε^{z+1}，则称 I_z 为非完整力学系统的 z 阶绝热不变量.

假设非完整力学系统受到小干扰力 εW_s 的作用，其中 ε 为小参数，W_s 为相应的广义力. 则系统的运动微分方程(5)变为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial L}{\partial q_s} = Q_s + \Lambda_s + \varepsilon W_s, \tag{15}$$

根据方程(15)，受微扰后的广义加速度可表示为

$$\ddot{q}_s = \alpha_s'(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, \varepsilon) = \alpha_s + \varepsilon \frac{\Delta_{sl}}{\Delta} W_l \quad (s, l = 1, 2, \cdots, n), \tag{16}$$

这里 $\Delta = \det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_s \partial \dot{q}_l}\right)$，$\Delta_{sl}$ 是行列式 Δ 中元素 $\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_s \partial \dot{q}_l}$ 的代数余子式，α_s 与(7)式中的 α_s 具有相同形式.

在小扰动的作用下,系统原有的对称性与不变量相应地会发生改变. 假设这种改变是在系统无扰动的对称性变换的基础上发生的小摄动. 如用 τ 及 ξ_s 表示受扰动后的与时间和空间对应的生成元，则它们可表示为

$$\begin{aligned} \tau &= \tau^0 + \varepsilon \tau^1 + \varepsilon^2 \tau^2 + \cdots, \\ \xi_s &= \xi_s^0 + \varepsilon \xi_s^1 + \varepsilon^2 \xi_s^2 + \cdots. \end{aligned} \tag{17}$$

无限小群变换变为

$$t^* = t + \varepsilon \tau, \quad q_s^*(t^*) = q_s(t) + \varepsilon \xi_s. \tag{18}$$

受扰动后系统 Mei 对称性的判据方程和限制方程分别变为

$$\frac{\tilde{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial X^{(1)}(L)}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial X^{(1)}(L)}{\partial q_s} = X^{(1)}(Q_s) + X^{(1)}(\Lambda_s) + \varepsilon X^{(1)}(W_s), \tag{19}$$

$$X^{(1)}(f_\beta) = 0. \tag{20}$$

其中

$$X^{(1)} = \tau \frac{\partial}{\partial t} + \xi_s \frac{\partial}{\partial q_s} + \left(\frac{\tilde{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_s - \dot{q}_s \frac{\tilde{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\tau\right)\frac{\partial}{\partial \dot{q}_s}, \tag{21}$$

$$\frac{\tilde{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial}{\partial t} + \dot{q}_k \frac{\partial}{\partial q_k} + \left(\alpha_k + \varepsilon \frac{\Delta_{kl}}{\Delta} W_l\right)\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \quad (k, l = 1, 2, \cdots, n). \tag{22}$$

为了方便地运用(22)式，我们将其记为

$$\frac{\tilde{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t} = \frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t} + \varepsilon \frac{\Delta_{kl}}{\Delta} W_l \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}, \tag{23}$$

这里 $\bar{\mathrm{d}}/\mathrm{d}t$ 与(12)式中的 $\bar{\mathrm{d}}/\mathrm{d}t$ 具有相同形式. 受扰动后，系统的结构方程变为

$$\begin{aligned} &X^{(1)}(L)\frac{\tilde{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\tau + X^{(1)}[X^{(1)}(L)] \\ &+ X^{(1)}(Q_s + \Lambda_s)(\xi_s - \dot{q}_s\tau) \\ &+ \varepsilon X^{(1)}(W_s)(\xi_s - \dot{q}_s\tau) + \frac{\tilde{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}G_{\mathrm{M}} = 0, \end{aligned} \tag{24}$$

其中

$$G_{\mathrm{M}} = G_{\mathrm{M}}^0 + \varepsilon G_{\mathrm{M}}^1 + \varepsilon^2 G_{\mathrm{M}}^2 + \cdots. \tag{25}$$

将(17)式和(23)式代入受扰动后的判据方程(19)和限制方程(20)，并比较等号两边 ε^m 的系数可得

$$\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial X_m^{(1)}(L)}{\partial \dot{q}_s} + \frac{\Delta_{kl}}{\Delta}W_l \frac{\partial^2 X_{m-1}^{(1)}(L)}{\partial \dot{q}_k \partial \dot{q}_s} - \frac{\partial X_m^{(1)}(L)}{\partial q_s} = X_m^{(1)}(Q_s) + X_m^{(1)}(\Lambda_s) + X_{m-1}^{(1)}(W_s), \tag{26}$$

$$X_m^{(1)}(f_\beta) = 0, \tag{27}$$

其中

$$\begin{aligned} X_m^{(1)} &= \tau^m \frac{\partial}{\partial t} + \xi_s^m \frac{\partial}{\partial q_s} + \left(\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_s^m - \dot{q}_s \frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\tau^m\right)\frac{\partial}{\partial \dot{q}_s} \\ &+ \left(\frac{\Delta_{kl}}{\Delta}W_l \frac{\partial \xi_s^{m-1}}{\partial \dot{q}_k} - \dot{q}_s \frac{\Delta_{kl}}{\Delta}W_l \frac{\partial \tau^{m-1}}{\partial \dot{q}_k}\right)\frac{\partial}{\partial \dot{q}_s}. \end{aligned} \tag{28}$$

将(17)式，(23)式，(25)式和(28)式代入受扰动后的结构方程(24)，并比较等号两边 ε^m 的系数可得

对于 ε^0：

$$X_0^{(1)}(L)\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\tau^0 + X_0^{(1)}[X_0^{(1)}(L)] + X_0^{(1)}(Q_s + \Lambda_s)(\xi_s^0 - \dot{q}_s\tau^0) + \frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}G_{\mathrm{M}}^0 = 0.$$

对于 ε^1：

$$\begin{aligned} &X_0^{(1)}(L)\left(\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\tau^1 + \frac{\Delta_{kl}}{\Delta}W_l \frac{\partial \tau^0}{\partial \dot{q}_k}\right) \\ &+ X_1^{(1)}(L)\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\tau^0 + X_0^{(1)}[X_1^{(1)}(L)] \\ &+ X_1^{(1)}[X_0^{(1)}(L)] \\ &+ X_0^{(1)}(Q_s + \Lambda_s)(\xi_s^1 - \dot{q}_s\tau^1) \\ &+ X_1^{(1)}(Q_s + \Lambda_s)(\xi_s^0 - \dot{q}_s\tau^0) \\ &+ X_0^{(1)}(W_s)(\xi_s^0 - \dot{q}_s\tau^0) \end{aligned}$$

$$+\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}G_{\mathrm{M}}^{1}+\frac{\Delta_{kl}}{\Delta}W_{l}\frac{\partial G_{\mathrm{M}}^{0}}{\partial\dot{q}_{k}}=0.$$

对于 ε^2：

$$\begin{aligned}
&X_0^{(1)}(L)\left(\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\tau^2+\frac{\Delta_{kl}}{\Delta}W_l\frac{\partial\tau^1}{\partial\dot{q}_k}\right)\\
&+X_1^{(1)}(L)\left(\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\tau^1+\frac{\Delta_{kl}}{\Delta}W_l\frac{\partial\tau^0}{\partial\dot{q}_k}\right)+X_2^{(1)}(L)\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\tau^0\\
&+X_0^{(1)}[X_2^{(1)}(L)]+X_1^{(1)}[X_1^{(1)}(L)]\\
&+X_2^{(1)}[X_0^{(1)}(L)]+X_0^{(1)}(Q_s+\Lambda_s)(\xi_s^2-\dot{q}_s\tau^2)\\
&+X_1^{(1)}(Q_s+\Lambda_s)(\xi_s^1-\dot{q}_s\tau^1)\\
&+X_2^{(1)}(Q_s+\Lambda_s)(\xi_s^0-\dot{q}_s\tau^0)\\
&+X_0^{(1)}(W_s)(\xi_s^1-\dot{q}_s\tau^1)+X_1^{(1)}(W_s)(\xi_s^0-\dot{q}_s\tau^0)\\
&+\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}G_{\mathrm{M}}^{2}+\frac{\Delta_{kl}}{\Delta}W_l\frac{\partial G_{\mathrm{M}}^{1}}{\partial\dot{q}_k}=0.
\end{aligned}$$

对于 ε^m：

$$\begin{aligned}
&\sum_{\alpha=0}^{m}\Big\{X_\alpha^{(1)}(L)\left(\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\tau^{m-\alpha}+\frac{\Delta_{kl}}{\Delta}W_l\frac{\partial\tau^{m-\alpha-1}}{\partial\dot{q}_k}\right)\\
&+X_{m-\alpha}^{(1)}[X_\alpha^{(1)}(L)]+X_\alpha^{(1)}(Q_s+\Lambda_s)\\
&\times(\xi_s^{m-\alpha}-\dot{q}_s\tau^{m-\alpha})+X_{\alpha-1}^{(1)}(W_s)(\xi_s^{m-\alpha}-\dot{q}_s\tau^{m-\alpha})\Big\}\\
&+\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}G_{\mathrm{M}}^{m}+\frac{\Delta_{kl}}{\Delta}W_l\frac{\partial G_{\mathrm{M}}^{m-1}}{\partial\dot{q}_k}=0,\\
&(m=0,1,2,\cdots;\alpha=0,1,2,\cdots,m).\qquad(29)
\end{aligned}$$

因为在(17)式和(25)式中，τ,ξ_s 以及 G_{M} 所含最小级数的项分别为 τ^0，ξ_s^0 和 G_{M}^0，所以这里当 $m=0$ 时，τ^{m-1}，ξ_s^{m-1} 和 G_{M}^{m-1} 不存在. 我们记为：当 $m=0$ 时，$\tau^{m-1}=\xi_s^{m-1}=G_{\mathrm{M}}^{m-1}=0$ 成立. 同理，当 $m-\alpha=0$ 时，我们有 $\tau^{m-\alpha-1}=\xi_s^{m-\alpha-1}=0$；当 $\alpha=0$ 时，$\tau^{\alpha-1}=\xi_s^{\alpha-1}=0$ 仍然成立. 即如果 $\gamma<0$，那么 τ^γ，ξ_s^γ 和 G_{M}^γ 将不存在.

对于非完整力学系统(1)，(5)，当受到小扰动 εW_s 作用时如果无限小群变换的生成元 $\tau^m(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ 和 $\xi_s^m(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ 满足受扰动后的判据方程(26)和限制方程(27)，则相应对称性的变化称为系统 Mei 对称性的摄动.

命题 3　对于受到小扰动 εW_s 作用的非完整力学系统(1)，(5)，如果无限小群变换的生成元 $\tau^m(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$，$\xi_s^m(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ 和规范函数 $G_{\mathrm{M}}^m=G_{\mathrm{M}}^m(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ 满足方程(26)，(27)和受扰动后的结构方程(29)，则系统 Mei 对称性的摄动将导致 z 阶 Mei 绝热不变量

$$\begin{aligned}
I_{\mathrm{M}z}=&\sum_{m=0}^{z}\varepsilon^m\Big[X_0^{(1)}(L)\tau^m+X_1^{(1)}(L)\tau^{m-1}+\cdots\\
&+X_m^{(1)}(L)\tau^0+\frac{\partial X_0^{(1)}(L)}{\partial\dot{q}_s}(\xi_s^m-\dot{q}_s\tau^m)\\
&+\frac{\partial X_1^{(1)}(L)}{\partial\dot{q}_s}(\xi_s^{m-1}-\dot{q}_s\tau^{m-1})+\cdots\\
&+\frac{\partial X_m^{(1)}(L)}{\partial\dot{q}_s}(\xi_s^0-\dot{q}_s\tau^0)+G_{\mathrm{M}}^m\Big]\\
=&\sum_{m=0}^{z}\varepsilon^m\Big\{\sum_{\alpha=0}^{m}\Big[X_\alpha^{(1)}(L)\tau^{m-\alpha}\\
&+\frac{\partial X_\alpha^{(1)}(L)}{\partial\dot{q}_s}(\xi_s^{m-\alpha}-\dot{q}_s\tau^{m-\alpha})\Big]+G_{\mathrm{M}}^m\Big\},\\
&(m=0,1,2,\cdots,z;\alpha=0,1,2,\cdots,m).\qquad(30)
\end{aligned}$$

证明　将 $I_{\mathrm{M}z}$ 对时间 t 求导数，可得

$$\begin{aligned}
\frac{\tilde{\mathrm{d}}\,I_{\mathrm{M}z}}{\mathrm{d}t}=&\sum_{m=0}^{z}\varepsilon^m\Big\{\sum_{\alpha=0}^{m}\frac{\tilde{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\Big[X_\alpha^{(1)}(L)\tau^{m-\alpha}\\
&+\frac{\partial X_\alpha^{(1)}(L)}{\partial\dot{q}_s}(\xi_s^{m-\alpha}-\dot{q}_s\tau^{m-\alpha})\Big]+\frac{\tilde{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}G_{\mathrm{M}}^m\Big\}\\
=&\sum_{m=0}^{z}\varepsilon^m\Big\{\sum_{\alpha=0}^{m}\Big[\frac{\bar{\mathrm{d}}X_\alpha^{(1)}(L)}{\mathrm{d}t}\tau^{m-\alpha}\\
&+X_\alpha^{(1)}(L)\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\tau^{m-\alpha}+\varepsilon\frac{\Delta_{kl}}{\Delta}W_l\frac{\partial X_\alpha^{(1)}(L)}{\partial\dot{q}_k}\tau^{m-\alpha}\\
&+\varepsilon X_\alpha^{(1)}(L)\frac{\Delta_{kl}}{\Delta}W_l\frac{\partial\tau^{m-\alpha}}{\partial\dot{q}_k}\\
&+\left(\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial X_\alpha^{(1)}(L)}{\partial\dot{q}_s}\right)(\xi_s^{m-\alpha}-\dot{q}_s\tau^{m-\alpha})\\
&+\frac{\partial X_\alpha^{(1)}(L)}{\partial\dot{q}_s}\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}(\xi_s^{m-\alpha}-\dot{q}_s\tau^{m-\alpha})\\
&+\varepsilon\frac{\Delta_{kl}}{\Delta}W_l\frac{\partial^2X_\alpha^{(1)}(L)}{\partial\dot{q}_k\partial\dot{q}_s}(\xi_s^{m-\alpha}-\dot{q}_s\tau^{m-\alpha})\\
&+\varepsilon\frac{\partial X_\alpha^{(1)}(L)}{\partial\dot{q}_s}\frac{\Delta_{kl}}{\Delta}W_l\frac{\partial}{\partial\dot{q}_k}(\xi_s^{m-\alpha}-\dot{q}_s\tau^{m-\alpha})\Big]\\
&+\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}G_{\mathrm{M}}^m+\varepsilon\frac{\Delta_{kl}}{\Delta}W_l\frac{\partial G_{\mathrm{M}}^m}{\partial\dot{q}_k}\Big\}.
\end{aligned}$$

利用(26)式和(29)式可得

$$\begin{aligned}
\frac{\tilde{\mathrm{d}}\,I_{\mathrm{M}z}}{\mathrm{d}t}=&\sum_{m=0}^{z}\varepsilon^m\Big\{\sum_{\alpha=0}^{m}\Big[\frac{\bar{\mathrm{d}}X_\alpha^{(1)}(L)}{\mathrm{d}t}\tau^{m-\alpha}\\
&+X_\alpha^{(1)}(L)\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\tau^{m-\alpha}+\varepsilon\frac{\Delta_{kl}}{\Delta}W_l\frac{\partial X_\alpha^{(1)}(L)}{\partial\dot{q}_k}\tau^{m-\alpha}\\
&+\varepsilon X_\alpha^{(1)}(L)\frac{\Delta_{kl}}{\Delta}W_l\frac{\partial\tau^{m-\alpha}}{\partial\dot{q}_k}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\left(\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial X_{\alpha}^{(1)}(L)}{\partial\dot{q}_s}\right)(\xi_s^{m-\alpha}-\dot{q}_s\tau^{m-\alpha})\\
&+\frac{\partial X_{\alpha}^{(1)}(L)}{\partial\dot{q}_s}\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}(\xi_s^{m-\alpha}-\dot{q}_s\tau^{m-\alpha})\\
&+\varepsilon\frac{\Delta_{kl}}{\Delta}W_l\frac{\partial^2 X_{\alpha}^{(1)}(L)}{\partial\dot{q}_k\partial\dot{q}_s}(\xi_s^{m-\alpha}-\dot{q}_s\tau^{m-\alpha})\\
&+\varepsilon\frac{\partial X_{\alpha}^{(1)}(L)}{\partial\dot{q}_s}\frac{\Delta_{kl}}{\Delta}W_l\frac{\partial}{\partial\dot{q}_k}(\xi_s^{m-\alpha}-\dot{q}_s\tau^{m-\alpha})\\
&-X_{\alpha}^{(1)}(L)\left(\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\tau^{m-\alpha}+\frac{\Delta_{kl}}{\Delta}W_l\frac{\partial\tau^{m-\alpha-1}}{\partial\dot{q}_k}\right)\\
&-X_{m-\alpha}^{(1)}(X_{\alpha}^{(1)}(L))-X_{\alpha}^{(1)}(Q_s+\Lambda_s)(\xi_s^{m-\alpha}-\dot{q}_s\tau^{m-\alpha})\\
&-X_{\alpha-1}^{(1)}(W_s)(\xi_s^{m-\alpha}-\dot{q}_s\tau^{m-\alpha})\Big]\\
&-\frac{\Delta_{kl}}{\Delta}W_l\frac{\partial G_{\mathrm{M}}^{m-1}}{\partial\dot{q}_k}+\varepsilon\frac{\Delta_{kl}}{\Delta}W_l\frac{\partial G_{\mathrm{M}}^{m}}{\partial\dot{q}_k}\Big\}\\
=&\sum_{m=0}^{z}\varepsilon^m\Big\{\sum_{\alpha=0}^{m}\Big[\varepsilon X_{\alpha}^{(1)}(L)\frac{\Delta_{kl}}{\Delta}W_l\frac{\partial\tau^{m-\alpha}}{\partial\dot{q}_k}\\
&-X_{\alpha}^{(1)}(L)\frac{\Delta_{kl}}{\Delta}W_l\frac{\partial\tau^{m-\alpha-1}}{\partial\dot{q}_k}\Big]\\
&+\sum_{\alpha=0}^{m}\Big[\varepsilon\frac{\partial X_{\alpha}^{(1)}(L)}{\partial\dot{q}_s}\frac{\Delta_{kl}}{\Delta}W_l\frac{\partial\xi_s^{m-\alpha}}{\partial\dot{q}_k}\\
&-\frac{\partial X_{\alpha}^{(1)}(L)}{\partial\dot{q}_s}\frac{\Delta_{kl}}{\Delta}W_l\frac{\partial\xi_s^{m-\alpha-1}}{\partial\dot{q}_k}\Big]\\
&-\sum_{\alpha=0}^{m}\Big[\varepsilon\dot{q}_s\frac{\partial X_{\alpha}^{(1)}(L)}{\partial\dot{q}_s}\frac{\Delta_{kl}}{\Delta}W_l\frac{\partial\tau^{m-\alpha}}{\partial\dot{q}_k}\\
&-\dot{q}_s\frac{\partial X_{\alpha}^{(1)}(L)}{\partial\dot{q}_s}\frac{\Delta_{kl}}{\Delta}W_l\frac{\partial\tau^{m-\alpha-1}}{\partial\dot{q}_k}\Big]\\
&+\sum_{\alpha=0}^{m}\Big[\varepsilon\frac{\Delta_{kl}}{\Delta}W_l\frac{\partial^2 X_{\alpha}^{(1)}(L)}{\partial\dot{q}_k\partial\dot{q}_s}(\xi_s^{m-\alpha}-\dot{q}_s\tau^{m-\alpha})\\
&-\frac{\Delta_{kl}}{\Delta}W_l\frac{\partial^2 X_{\alpha-1}^{(1)}(L)}{\partial\dot{q}_k\partial\dot{q}_s}(\xi_s^{m-\alpha}-\dot{q}_s\tau^{m-\alpha})\Big]\\
&+\varepsilon\frac{\Delta_{kl}}{\Delta}W_l\frac{\partial G_{\mathrm{M}}^{m}}{\partial\dot{q}_k}-\frac{\Delta_{kl}}{\Delta}W_l\frac{\partial G_{\mathrm{M}}^{m-1}}{\partial\dot{q}_k}\Big\}\\
=&\varepsilon^{z+1}\Big\{\sum_{\alpha=0}^{z}\Big[X_{\alpha}^{(1)}(L)\frac{\Delta_{kl}}{\Delta}W_l\frac{\partial\tau^{z-\alpha}}{\partial\dot{q}_k}\\
&+\frac{\partial X_{\alpha}^{(1)}(L)}{\partial\dot{q}_s}\frac{\Delta_{kl}}{\Delta}W_l\frac{\partial\xi_s^{z-\alpha}}{\partial\dot{q}_k}\\
&-\dot{q}_s\frac{\partial X_{\alpha}^{(1)}(L)}{\partial\dot{q}_s}\frac{\Delta_{kl}}{\Delta}W_l\frac{\partial\tau^{z-\alpha}}{\partial\dot{q}_k}\\
&+\frac{\Delta_{kl}}{\Delta}W_l\frac{\partial^2 X_{\alpha}^{(1)}(L)}{\partial\dot{q}_k\partial\dot{q}_s}(\xi_s^{z-\alpha}-\dot{q}_s\tau^{z-\alpha})\Big]\\
&+\frac{\Delta_{kl}}{\Delta}W_l\frac{\partial G_{\mathrm{M}}^{z}}{\partial\dot{q}_k}\Big\}.
\end{aligned}
\tag{31}
$$

这表明$\frac{\tilde{\mathrm{d}}I_{\mathrm{M}z}}{\mathrm{d}t}$正比于$\varepsilon^{z+1}$. 当$\varepsilon W_s$不存在时,Mei 绝热不变量(30)将回到 Mei 精确不变量(14).

对于与非完整力学系统(1),(5)相应的完整系统(5),当受到小扰动εW_s作用时如果无限小群变换的生成元$\tau^m(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$和$\xi_s^m(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$满足受扰动后的判据方程(26),则相应对称性的变化称为系统 Mei 对称性的摄动.

命题 4 对于受到小扰动εW_s作用的与非完整力学系统(1),(5)相应的完整系统(5),如果无限小群变换的生成元$\tau^m(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$,$\xi_s^m(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$和规范函数$G_{\mathrm{M}}^m=G_{\mathrm{M}}^m(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$满足方程(26)和受扰动后的结构方程(29),则系统 Mei 对称性的摄动可以导致z阶 Mei 绝热不变量(30).

证明 命题 4 的证明过程同命题 3 的证明过程.

5. 算 例

广义坐标下,非完整力学系统

$$L=\frac{1}{2}(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2),$$

$$f=\dot{q}_1+bt\dot{q}_2-bq_2+t=0. \tag{32}$$

假设系统受到小扰动

$$\varepsilon W_1=-\frac{\varepsilon}{t},\varepsilon W_2=0. \tag{33}$$

试研究该系统 Mei 对称性的摄动及其导致的一阶 Mei 绝热不变量.

首先,求出未受扰动时系统 Mei 对称性导致的 Mei 精确不变量. 根据(6)式,我们有

$$\Lambda_1=-\frac{1}{1+b^2t^2},\Lambda_2=-\frac{bt}{1+b^2t^2}. \tag{34}$$

选取生成元

$$\tau^0=0,\xi_1^0=\dot{q}_2-bt\dot{q}_1+bq_1+bt,$$

$$\xi_2^0=1, \tag{35}$$

可以验证其满足 Mei 对称性判据方程(9)及限制方程(10),因此生成元(35)是系统 Mei 对称性的生成元. 且有

$$G_{\mathrm{M}}^0=-b^2t. \tag{36}$$

根据命题 1,系统存在 Mei 精确不变量

$$I_{\mathrm{M}0}=b(\dot{q}_2-bt\dot{q}_1+bq_1)=\text{const}. \tag{37}$$

然后,研究该系统受扰动后 Mei 对称性的摄动及其导致的一阶 Mei 绝热不变量. 方程(26),(27)

以及(29)分别变为

$$\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial X_1^{(1)}(L)}{\partial \dot{q}_s}+\frac{\Delta_{kl}}{\Delta}W_l\frac{\partial^2 X_0^{(1)}(L)}{\partial \dot{q}_k\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial X_1^{(1)}(L)}{\partial q_s}$$
$$=X_1^{(1)}(Q_s)+X_1^{(1)}(\Lambda_s)+X_0^{(1)}(W_s),\tag{38}$$

$$X_1^{(1)}(f)=0,\tag{39}$$

$$X_0^{(1)}(L)\left(\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\tau^1+\frac{\Delta_{kl}}{\Delta}W_l\frac{\partial \tau^0}{\partial \dot{q}_k}\right)$$
$$+X_1^{(1)}(L)\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\tau^0+X_0^{(1)}[X_1^{(1)}(L)]+X_1^{(1)}[X_0^{(1)}(L)]$$
$$+X_0^{(1)}(Q_s+\Lambda_s)(\xi_s^1-\dot{q}_s\tau^1)+X_1^{(1)}(Q_s+\Lambda_s)$$
$$\times(\xi_s^0-\dot{q}_s\tau^0)+X_0^{(1)}(W_s)(\xi_s^0-\dot{q}_s\tau^0)$$
$$+\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}G_{\mathrm{M}}^1+\frac{\Delta_{kl}}{\Delta}W_l\frac{\partial G_{\mathrm{M}}^0}{\partial \dot{q}_k}=0,\tag{40}$$

我们有

$$\frac{\Delta_{11}}{\Delta}W_1=-\frac{1}{t},$$
$$\frac{\Delta_{22}}{\Delta}W_2=\frac{\Delta_{12}}{\Delta}W_2=\frac{\Delta_{21}}{\Delta}W_1=0.\tag{41}$$

取生成元

$$\tau^1=0,\xi_1^1=b,\xi_2^1=1,\tag{42}$$

可以验证其满足受扰动后的方程(38)—(40). 由(40)式可得

$$G_{\mathrm{M}}^1=-2b^2t.\tag{43}$$

由命题 3 可得该受扰动后非完整力学系统的一阶 Mei 绝热不变量

$$I_{\mathrm{M1}}=b(\dot{q}_2-bt\dot{q}_1+bq_1)$$
$$+\varepsilon b(\dot{q}_2-bt\dot{q}_1+bq_1-bt+b).\tag{44}$$

6. 结　　论

本文提出了非完整力学系统 Mei 对称性的摄动导致的一类新型 Mei 绝热不变量. 在推导过程中充分考虑了 Mei 对称性结构方程中所有无限小群变换生成元发生的摄动，因此得到的 Mei 绝热不变量的形式具有一般性.

[1] Mei F X 2004 *Symmetries and Conserved Quantities of Constrained Mechanical Systems* (Beijing: Beijing Institute of Technology Press) (in Chinese) [梅凤翔 2004 约束力学系统的对称性与守恒量 (北京：北京理工大学出版社)]

[2] Luo S K, Zhang Y F 2008 *Advances in the Study of Dynamics of Constrained Systems* (Beijing: Science Press) (in Chinese) [罗绍凯、张永发 2008 约束系统动力学研究进展 (北京：科学出版社)]

[3] Zhang H B 2002 *Chin. Phys.* **11** 1

[4] Luo S K, Mei F X 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 666 (in Chinese) [罗绍凯、梅凤翔 2004 物理学报 **53** 666]

[5] Cendra H, Ibort A, Leon M 2004 *J. Math. Phys.* **45** 2785

[6] Qiao Y F, Zhao S H, Li R J 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 5585 (in Chinese) [乔永芬、赵淑红、李仁杰 2006 物理学报 **55** 5585]

[7] Jia L Q, Luo S K, Zhang Y Y 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 2006 (in Chinese) [贾利群、罗绍凯、张耀宇 2008 物理学报 **57** 2006]

[8] Mei F X, Wu H B 2008 *Phys. Lett.* A **372** 2141

[9] Fu J L, Jiménez S, Tang Y F, Vázquez L 2008 *Phys. Lett.* A **372** 1555

[10] Cendra H, Ferraro S, Grillo S 2008 *J. Geom. Phys.* **58** 1271

[11] Fu J L, Chen B Y, Chen L Q 2009 *Phys. Lett.* A **373** 409

[12] Zhao Y Y, Mei F X, 1999 *Symmetries and Invariants of Mechanical Systems* (Beijing: Science Press) (in Chinese) [赵跃宇、梅凤翔 1999 力学系统的对称性与不变量 (北京：科学出版社)]

[13] Zhang Y 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1666 (in Chinese) [张　毅 2002 物理学报 **51** 1666]

[14] Zhang Y 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 2417 (in Chinese) [张　毅 2002 物理学报 **51** 2417]

[15] Chen X W, Li Y M 2003 *Chin. Phys.* **12** 1349

[16] Qiao Y F, Zhao S H 2005 *Commun. Theor. Phys.* **43** 987

[17] Chen X W, Zhao Y H, Li Y M 2005 *Commun. Theor. Phys.* **44** 773

[18] Zhang Y 2006 *Chin. Phys.* **15** 1935

[19] Zhang Y 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 1855 (in Chinese) [张　毅 2007 物理学报 **56** 1855]

[20] Ding N, Fang J H, Wang P, Zhang X N 2007 *Commun. Theor. Phys.* **48** 19

[21] Ding N, Fang J H, Wang P 2007 *Commun. Theor. Phys.* **47** 594

[22] Zhang M J, Fang J H, Zhang X N, Lu K, 2008 *Chin. Phys.* B **17** 1957

[23] Ding N, Fang J H 2009 *Commun. Theor. Phys.* **52** 12

A new type of Mei adiabatic invariant induced by perturbation to Mei symmetry for nonholonomic mechanical systems*

Ding Ning[1)†] Fang Jian-Hui[2)]

1) (*Institute of Theoretical Science, Department of Physics and Electronics Science, Binzhou University, Binzhou* 256603, *China*)

2) (*College of Physics Science and Technology, China University of Petroleum, Dongying* 257061, *China*)

(Received 3 February 2009; revised manuscript received 26 February 2009)

Abstract

A novel type of Mei adiabatic invariant induced by perturbation to Mei symmetry for nonholonomic mechanical system is reported. The form of criteria and restriction equations for Mei symmetry after being disturbed are given. The new form and conditions of the Mei adiabatic invariant are obtained.

Keywords: nonholonomic mechanical system, Mei symmetry, perturbation, Mei adiabatic invariant

PACC: 0320

* Project supported by the Natural Science Foundation of Shandong Province, China (Grant No. Y2008A33), the Science Development Plan Project of Education Department of Shandong Province, China (Grant No. J08LI51) and the Science Foundation of Binzhou University, China (Grant No. BZXYG0903).

† E-mail: dingningch@yahoo.com.cn