

非线性波方程尖峰孤子解的一种简便求法及其应用*

刘 煜†

(河南电力试验研究院, 郑州 450052)

(2009 年 2 月 9 日收到, 2009 年 3 月 3 日收到修改稿)

根据尖峰孤子解的特点, 提出了一种待定系数法求非线性波方程尖峰孤子解的思路和方法, 并利用该方法求解了 5 个非线性波方程, 即 CH (Camassa-Holm) 方程、五阶 KdV-like 方程、广义 Ostrovsky 方程、组合 KdV-mKdV 方程和 Klein-Gordon 方程, 比较简便地得到了这些方程的尖峰孤子解. 文献中关于 CH 方程的结果成为本文结果的特例. 通过数值模拟给出了部分解的图像. 简要说明了非线性波方程存在尖峰孤子解所须满足的特定条件. 该方法也适用于求其他非线性波方程的尖峰孤子解.

关键词: 非线性波方程, 尖峰孤子解, 待定系数法

PACC: 0340K, 0290

1. 引 言

Camassa 和 Holm^[1]1993 年推导出一个新的浅水波方程——CH 方程

$$u_t + 2ku_x - u_{xxt} + 3uu_x = 2u_x u_{xx} + uu_{xxx}, \quad (1)$$

并且证明, 当 $k=0$ 时, 该方程存在形如

$$u(x, t) = ce^{-|x-ct|} \quad (2)$$

的新型孤子解. 由于该解的孤波曲线在波峰处有一个尖点, 尖点的一阶导数不连续, 这与我们以往认识的孤波是光滑连续的情形完全不同, 故而这种新型的孤子被称为尖峰孤子. (2) 式称为尖峰孤子解或孤立尖波解, 它的发现进一步丰富了人们对孤波的认识.

文献 2 证明了, 当 $k \neq 0$ 时, 方程 (1) 也有尖峰孤子解

$$u(x, t) = (3k/2) \cdot e^{-|x-kt/2|} - k. \quad (3)$$

文献 3 进一步得出, 对任意的 k 和 c ($c \neq -k$), 方程 (1) 有尖峰孤子解

$$u(x, t) = (k+c) \cdot e^{-|x-ct|} - k. \quad (4)$$

除了 CH 方程外, 文献 4 研究了另一类浅水波方程——DP (Degasperis-Procesi) 方程

$$u_t - u_{xxt} + 4uu_x = 3u_x u_{xx} + uu_{xxx}, \quad (5)$$

得到了与 (2) 式相同的尖峰孤子解. 文献 5 [6] 则得出了带色散项的 DP 方程的尖峰孤子解.

目前得到尖峰孤子解的方程主要是 CH 方程^[1-3]、DP 方程^[4-7]和 CH 方程的广义形式^[8-11]. 求解方法通常是在相图分析的基础上沿同宿轨积分后得到.

本文根据尖峰孤子解的特点, 提出了一种待定系数法求非线性波方程尖峰孤子解的思路和方法, 并利用该方法求解了包括 CH 方程在内的 5 个非线性波方程, 得到了这些方程的尖峰孤子解, 同时也验证了方法的可行性.

2. 尖峰孤子解的特点和待定系数法求解思路

尖峰孤子解的主要特点是波峰处的一阶导数不连续, 波峰不光滑, 出现尖点. (2) 式是已知的 $u = f(|x-ct|)$ 的尖峰孤子解中形式最为简单的一种. 令 $\xi = x-ct$ (2) 式化为

$$u = ce^{-|\xi|} = \begin{cases} ce^{-\xi}, & (\xi \geq 0), \\ ce^{\xi}, & (\xi \leq 0). \end{cases} \quad (6)$$

在 $\xi \in (-\infty, +\infty)$ 平面上, 其图形如图 1 所示, 在 $\xi = 0$ 处有一个尖点.

对 (6) 式求导, 可得

$$u_{\xi} = \begin{cases} -ce^{-\xi} & (\xi \geq 0), \\ ce^{\xi}, & (\xi \leq 0), \end{cases} \quad (7)$$

* 河南电力试验研究院科研基金资助的课题.

† E-mail: ly_hndl@yahoo.com.cn

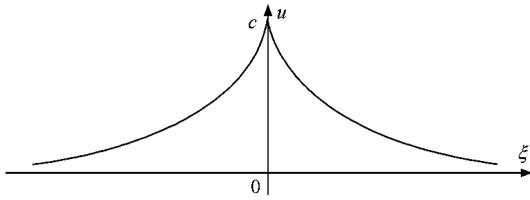


图1 (6)式确定的尖峰孤子解示意图

(7)式表明,方程(6)的一阶导数在区间 $\xi \in (-\infty, +\infty)$ 上有两个表达式,在波峰处($\xi=0$), $u'|_{\xi=0} = \pm c \neq 0$,因此方程(6)在波峰处是不可导的,曲线出现不光滑的尖点。

本文采用待定系数法求尖峰孤子解的基本思路是,首先构造具有尖峰孤子解特点的解式

$$u = f(|\xi|, c_1, c_2, \dots, c_n), \quad (8)$$

式中 c_1, c_2, \dots, c_n 为待定常数.该解式在 $\xi=0$ 时应满足

$$u'|_{\xi=0} = \pm f'(0, c_1, c_2, \dots, c_n) \neq 0. \quad (9)$$

然后,分别求出 $\xi \geq 0$ 和 $\xi \leq 0$ 两种条件下的各阶偏导数,代入待求的非线性波方程以确定待定常数 c_1, c_2, \dots, c_n .若 $\xi \geq 0$ 和 $\xi \leq 0$ 两种条件下能够得出形式完全相同的待定常数,则该方程存在形如(8)式的尖峰孤子解。

根据上述思路,本文构造了多种形式的尖峰孤子解.以下给出5种较为简单的形式:

$$u = c_1 e^{-c_2 |\xi|} + c_3, \quad (10)$$

$$u = c_1 \sinh c_2 |\xi| + c_3, \quad (11)$$

$$u = c_1 \tanh c_2 |\xi| + c_3, \quad (12)$$

$$u = \frac{c_1}{1 + c_3 e^{c_2 |\xi|}}, \quad (13)$$

$$u = c_A e^{-c_2 |\xi|} + c_B e^{c_2 |\xi|} + c_1, \quad (14)$$

式中, $\xi = x - ct$, c_1, c_2, c_3, c_A, c_B 为待定常数.当 $\xi=0$ 时(10)–(12)式的一阶导数为 $u'|_{\xi=0} = \pm c_1 c_2 \neq 0$;

而(13)式的一阶导数则为

$$u'|_{\xi=0} = \pm c_1 c_2 c_3 (1 + c_3) \neq 0;$$

当 $c_A \neq c_B$ 时,可得(14)式的一阶导数

$$u'|_{\xi=0} = \pm c_2 (c_B - c_A) \neq 0.$$

容易看出,上述5种解式在 $\xi=0$ 时其一阶导数均能满足(9)式。

3. 方法的应用

本节将通过求解5个非线性波方程的尖峰孤子

解来说明方法的应用。

3.1. CH 方程

设CH方程(1)有尖峰孤子解

$$u = c_1 e^{-c_2 |\xi|} + c_3, \quad \xi = x - ct. \quad (15)$$

1)当 $\xi \geq 0$ 时,对(15)式求各阶偏导数,代入方程(1),化简得

$$\begin{aligned} e^{-2c_2 \xi} (-3c_1^2 c_2 + 3c_1^2 c_2^3) + e^{-c_2 \xi} (c_1 c_2 c \\ - 2kc_1 c_2 - c_1 c_2^3 c - 3c_1 c_2 c_3 + c_1 c_2^3 c_3) = 0, \end{aligned} \quad (16)$$

令(16)式中 $e^{-2c_2 \xi}$ 和 $e^{-c_2 \xi}$ 的系数分别为零,得待定常数 c_1, c_2 和 c_3 应当满足的方程组

$$\begin{aligned} -3c_1^2 c_2 + 3c_1^2 c_2^3 &= 0, \\ c_1 c_2 c - 2kc_1 c_2 - c_1 c_2^3 c - 3c_1 c_2 c_3 + c_1 c_2^3 c_3 &= 0, \end{aligned} \quad (17)$$

解此方程组得, $c_2 = \pm 1$; $c_3 = -k$; c_1 和 c 可取任意非零常数。

2)当 $\xi \leq 0$ 时,比照 $\xi \geq 0$ 时的方法,对(15)式求各阶偏导数,代入方程(1),化简得

$$\begin{aligned} e^{2c_2 \xi} (3c_1^2 c_2 - 3c_1^2 c_2^3) \\ + e^{c_2 \xi} (-c_1 c_2 c + 2kc_1 c_2 + c_1 c_2^3 c \\ + 3c_1 c_2 c_3 - c_1 c_2^3 c_3) = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

令(18)式中 $e^{2c_2 \xi}$ 和 $e^{c_2 \xi}$ 的系数分别为零,亦可得待定常数 c_1, c_2 和 c_3 应当满足的方程组为

$$\begin{aligned} 3c_1^2 c_2 - 3c_1^2 c_2^3 &= 0, \\ -c_1 c_2 c + 2kc_1 c_2 + c_1 c_2^3 c + 3c_1 c_2 c_3 - c_1 c_2^3 c_3 &= 0. \end{aligned} \quad (19)$$

解此方程组得 $c_2 = \pm 1$; $c_3 = -k$; c_1 和 c 可取任意非零常数。

由于在 $\xi \geq 0$ 和 $\xi \leq 0$ 两种条件下得出的待定常数完全相同,故方程(1)有尖峰孤子解

$$u = c_1 e^{-c_2 |\xi|} + c_3 = c_1 e^{\mp |x-ct|} - k. \quad (20)$$

根据文献[12]关于尖峰凹凸性的定义,由(20)式可得凹尖峰孤子解

$$u = c_1 e^{-|x-ct|} - k, \quad (21)$$

和凸尖峰孤子解

$$u = c_1 e^{+|x-ct|} - k, \quad (22)$$

两种尖峰孤子解的图形如图2所示。

容易看出(20)式包含了文献[3]的(66)式(即本文(4)式)为特例,并且增加了一个凸尖峰孤子解.由于 c_1 和 c 可取任意非零常数,当取 $c = k/2$, $c_1 = 3k/2$,由(21)式可得

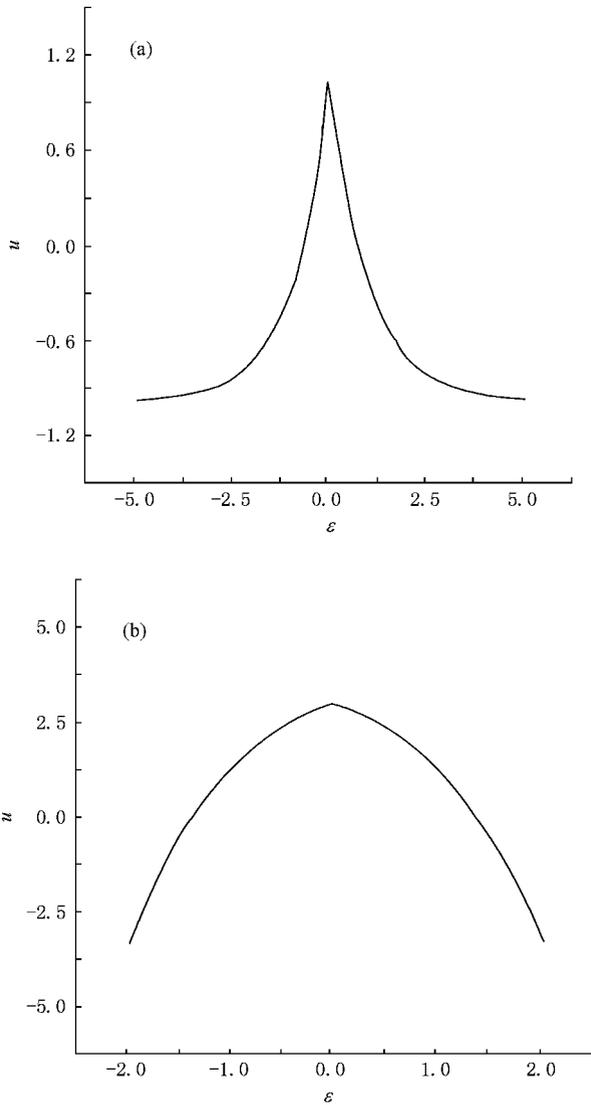


图 2 (21) (22) 式确定的尖峰孤子解图形 (a) 凹尖峰 ($c_1 = 2$, $k = 1$) (b) 凸尖峰 ($c_1 = -1$, $k = -4$)

$$u = (3k/2) \cdot e^{-|x-kt/2|} - k. \quad (23)$$

这正是文献 [2] 的 (26) 式 (即本文 (3) 式), 因此, 文献 [2] 的结果也是本文结果的特例.

此外, 利用上述方法, 还可求得 CH 方程 (1) 形如 (11) (14) 式的两类尖峰孤子解, 分别为

$$u = c_1 \sinh(\pm |x - ct|) - k, \quad (24)$$

$$u = c_A e^{\mp |x - \alpha|} + c_B e^{\pm |x - \alpha|} - k, \quad (25)$$

式中 c_1, c, c_A, c_B 可取任意非零常数, 但须 $c_A \neq c_B$, 否则 (25) 式就成为光滑孤子解而非尖峰孤子解. 若取 $-c_A = c_B = c_1/2$ (25) 式就化为 (24) 式.

3.2. 五阶 KdV-like 方程

考虑五阶 KdV-like 方程^[13, 14]

$$u_t + \alpha uu_x + \beta uu_{xxx} + u_{xxxxx} = 0, \quad (26)$$

该方程在物理中用来描述在引力场与一维非线性点阵下的浅水中长波的运动.

设该方程有尖峰孤子解

$$u = c_1 e^{-c_2 |\xi|} + c_3, \quad \xi = x - ct. \quad (27)$$

1) 当 $\xi \geq 0$ 时, 对 (27) 式求各阶偏导数, 代入方程 (26), 化简得

$$e^{-2c_2 \xi} (-\alpha c_1^2 c_2 - \beta c_1^2 c_2^3) + e^{-c_2 \xi} (c_1 c_2 c - \alpha c_1 c_2 c_3 - \beta c_1 c_3 c_2^3 - c_1 c_2^5) = 0. \quad (28)$$

令 (28) 式中 $e^{-2c_2 \xi}$ 和 $e^{-c_2 \xi}$ 的系数分别为零, 得待定常数 c_1, c_2 和 c_3 应当满足的方程组

$$\begin{aligned} -\alpha c_1^2 c_2 - \beta c_1^2 c_2^3 &= 0, \\ c_1 c_2 c - \alpha c_1 c_2 c_3 - \beta c_1 c_3 c_2^3 - c_1 c_2^5 &= 0, \end{aligned} \quad (29)$$

解此方程组, $c_2 = \pm \sqrt{-\alpha/\beta}$; $c = (\alpha/\beta)^{3/2}$; c_1 可取任意非零常数; c_3 可取任意常数.

2) 当 $\xi \leq 0$ 时, 比照 $\xi \geq 0$ 时的方法, 可确定 c_1, c_2, c_3 和 c 与 $\xi \geq 0$ 时的结果相同.

因此, 方程 (26) 有尖峰孤子解

$$u = c_1 e^{\mp \sqrt{-\alpha/\beta} |x - (\alpha/\beta)^{3/2} t|} + c_3. \quad (30)$$

3.3. 广义 Ostrovsky 方程

广义 Ostrovsky 方程是指如下方程^[15]:

$$(u_t + 3uu_x - \beta u_{xxx}/4)_x = \epsilon^2 (u + \delta u^2)/2, \quad (31)$$

其中, $\beta = \pm 1$, ϵ 是度量旋转效应的无量纲参数, δ 是常数. 当 $\delta = 0$ 时, 方程 (31) 称为 Ostrovsky 方程, 它描述旋转海洋中弱非线性波动. 文献 [15] 利用 F 展开法得到了该方程的周期波解和孤波解.

设方程 (31) 也有尖峰孤子解

$$u = c_1 e^{-c_2 |\xi|} + c_3, \quad \xi = x - ct. \quad (32)$$

1) 当 $\xi \geq 0$ 时, 对 (32) 式求各阶偏导数, 代入方程 (31), 化简得

$$\begin{aligned} e^{-2c_2 \xi} (6c_1^2 c_2^2 - c_1^2 \delta \epsilon^2/2) + e^{-c_2 \xi} (-c_1 c_2^2 c \\ + 3c_1 c_2^2 c_3 - c_1 c_2^4 \beta/4 - c_1 \epsilon^2/2 - c_1 c_3 \delta \epsilon^2) \\ - c_3 \epsilon^2/2 - c_3^2 \delta \epsilon^2/2 = 0. \end{aligned} \quad (33)$$

令 (33) 式中 $e^{-2c_2 \xi}$ 和 $e^{-c_2 \xi}$ 的系数和常数项分别为零, 得待定常数 c_1, c_2 和 c_3 应当满足的方程组

$$\begin{aligned} 6c_1^2 c_2^2 - c_1^2 \delta \epsilon^2/2 &= 0, \\ -c_1 c_2^2 c + 3c_1 c_2^2 c_3 - c_1 c_2^4 \beta/4 - c_1 \epsilon^2/2 - c_1 c_3 \delta \epsilon^2 &= 0, \\ -c_3 \epsilon^2/2 - c_3^2 \delta \epsilon^2/2 &= 0, \end{aligned} \quad (34)$$

解此方程组,得

c_1 可取任意非零常数; $c_2 = \pm \sqrt{\delta \epsilon^2 / 12}$; 当 $c_3 = 0$ 时, $c = -(\beta \epsilon^2 \delta^2 + 288)(48\delta)$; 当 $c_3 = -1/\delta$ 时, $c = -(\beta \epsilon^2 \delta^2 - 144)(48\delta)$.

2) 当 $\xi \leq 0$ 时, 比照 $\xi \geq 0$ 时的方法, 可确定 c_1 , c_2 , c_3 和 c 与 $\xi \geq 0$ 时的结果相同.

因此, 方程 (31) 有尖峰孤子解

$$u = c_1 e^{\mp \sqrt{\delta \epsilon^2 / 12} |x + ((\beta \epsilon^2 \delta^2 + 288)(48\delta))t|} \quad (35)$$

和

$$u = c_1 e^{\mp \sqrt{\delta \epsilon^2 / 12} |x + ((\beta \epsilon^2 \delta^2 - 144)(48\delta))t|} - \frac{1}{\delta}. \quad (36)$$

3.4. 组合 KdV-mKdV 方程

组合 KdV-mKdV 方程的一般形式为^[16,17]

$$u_t + \alpha u u_x + \beta u^2 u_x + \gamma u_{xxx} = 0. \quad (37)$$

设方程 (37) 有尖峰孤子解

$$u = \frac{c_1}{1 + c_3 e^{c_2 |\xi|}}, \quad \xi = x - ct. \quad (38)$$

1) 当 $\xi \geq 0$ 时, 对 (38) 式求各阶偏导数, 代入方程 (37), 化简得

$$\begin{aligned} & e^{3c_2 \xi} (cc_3^2 - \gamma c_2^2 c_3^2) \\ & + e^{2c_2 \xi} (2cc_3 - \alpha c_1 c_3 + 4\gamma c_2^2 c_3) \\ & + e^{c_2 \xi} (c - \alpha c_1 - \beta c_1^2 - \gamma c_2^2) = 0. \end{aligned} \quad (39)$$

令 (39) 式中 $e^{nc_2 \xi}$ ($n = 1, 2, 3$) 的系数分别为零, 得待定常数 c_1 , c_2 和 c_3 应当满足的方程组

$$\begin{aligned} cc_3^2 - \gamma c_2^2 c_3^2 &= 0, \\ 2cc_3 - \alpha c_1 c_3 + 4\gamma c_2^2 c_3 &= 0, \\ c - \alpha c_1 - \beta c_1^2 - \gamma c_2^2 &= 0. \end{aligned} \quad (40)$$

解此方程组, 得 $c_1 = -\alpha/\beta$; $c_2 = \pm \sqrt{-\alpha^2/(6\beta\gamma)}$; $c_3 = -\alpha^2/(6\beta)$; c_3 可取任意非零常数.

2) 当 $\xi \leq 0$ 时, 比照 $\xi \geq 0$ 时的方法, 可确定 c_1 , c_2 , c_3 , c 与 $\xi \geq 0$ 时的结果相同.

因此, 组合 KdV-mKdV 方程 (37) 有尖峰孤子解

$$u = \frac{-\alpha}{\beta} \cdot \frac{1}{1 + c_3 e^{\pm \sqrt{-\alpha^2/(6\beta\gamma)} |\xi|}}, \quad (41)$$

式中 $\xi = x + (\alpha^2/(6\beta))t$.

取 $c_3 = 1$ 利用关系式 $\frac{1}{1 + e^{\pm x}} = \frac{1}{2} (1 \mp \tanh \frac{x}{2})$,

可将 (41) 式化为

$$u = \frac{-\alpha}{2\beta} \pm \frac{\alpha}{2\beta} \tanh \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{-\alpha^2}{6\beta\gamma}} |\xi| \right). \quad (42)$$

因此 (42) 式是 (41) 式取 $c_3 = 1$ 时的特例.

3.5. Klein-Gordon 方程

一般形式的 Klein-Gordon 方程为^[16]

$$u_{tt} - c_0^2 u_{xx} + \alpha u - \beta u^3 = 0. \quad (43)$$

设方程 (43) 有尖峰孤子解

$$u = c_1 \tanh c_2 |\xi|, \quad \xi = x - ct. \quad (44)$$

1) 当 $\xi \geq 0$ 时, 对 (44) 式求二阶偏导数, 代入方程 (43), 化简得

$$\begin{aligned} & (\alpha c_1 - \beta c_1^3) \sinh^3 c_2 \xi \\ & + (2c_0^2 c_1 c_2^2 - 2c_1 c_2^2 c^2 + \alpha c_1) \sinh c_2 \xi = 0. \end{aligned} \quad (45)$$

令 (45) 式中 $\sinh^3 c_2 \xi$ 和 $\sinh c_2 \xi$ 的系数分别为零, 得待定常数 c_1 和 c_2 应当满足的方程组

$$\begin{aligned} \alpha c_1 - \beta c_1^3 &= 0, \\ 2c_0^2 c_1 c_2^2 - 2c_1 c_2^2 c^2 + \alpha c_1 &= 0, \end{aligned} \quad (46)$$

解该方程组, 得

$$c_1 = \pm \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}; \quad c_2 = \pm \sqrt{\frac{\alpha}{2(c^2 - c_0^2)}}.$$

2) 当 $\xi \leq 0$ 时, 比照 $\xi \geq 0$ 时的方法, 可确定 c_1 , c_2 与 $\xi \geq 0$ 时的结果相同.

因此, Klein-Gordon 方程 (43) 有尖峰孤子解

$$u = \pm \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \tanh \left(\pm \sqrt{\frac{\alpha}{2(c^2 - c_0^2)}} |\xi| \right). \quad (47)$$

由上述结果可知, 形如 (10) 式的最简形式的尖峰孤子解, 并非 CH 方程和 DP 方程所特有, 五阶 KdV-like 方程和广义 Ostrovsky 方程也具有此类形式的解. 此外, 还有几个非线性波方程, 如广义 KdV 方程^[18], 也具有此类形式的解.

除了 CH 方程外, 五阶 KdV-like 方程和广义 Ostrovsky 方程也具有形如 (11) (14) 式的两种尖峰孤子解. 组合 KdV-mKdV 方程和 Klein-Gordon 方程也还有其他形式的尖峰孤子解. 相关结果将另文给出.

4. 结 论

利用本文提出的待定系数法得到了 5 个非线性波方程的尖峰孤子解, 文献中已有的一些结果成为本文结果的特例, 这说明该方法是可行的.

通过构造新的解式, 利用本文方法还可求出 KdV 方程^[19]、mKdV 方程^[19]、BBM 方程^[20]、mBBM^[20] 和 RLW^[21] 方程等一大批非线性波方程的多种形式

的尖峰孤子解.但是,并非所有的非线性波方程都存在尖峰孤子解,只有满足一定条件的方程才会存在,这一条件可以用文献 [22, 23] 中“秩”的概念来说明,即非线性方程中各项的秩必须是同类的,具体讲就是各项的秩的取值要么全为奇数,要么全为偶数.这样的方程在 $\xi \geq 0$ 和 $\xi \leq 0$ 两种条件下可以得出完全相同的待定常数.如本文讨论的 CH 方程、五阶 KdV-

like 方程和组合 KdV-mKdV 方程中,各项的秩全为奇数,而广义 Ostrovsky 方程和 Klein-Gordon 方程中,各项的秩全为偶数.当一个非线性方程中各项的秩是异类时,即秩的取值有的为奇数,有的为偶数时,这样的方程在 $\xi \geq 0$ 和 $\xi \leq 0$ 两种条件下则不能得出完全相同的待定常数,因而无法求得尖峰孤子解.详细结果将另文讨论.

- [1] Camassa R , Holm D D 1993 *Phys. Rev. Lett.* **71** 1661
- [2] Liu Z R , Qian T F 2002 *Applied Mathematical Modelling* **26** 473
- [3] Liu Z R 2004 *Journal of Yunnan Nationalities University (NSE)* **13** 3 (in Chinese] 刘正荣 2004 云南民族大学学报(自然科学版) **13** 3]
- [4] Yu L Q , Tian L X 2006 *Mathematics in Practice and Theory* **36** 261 (in Chinese] 余丽琴、田立新 2006 数学的实践与认识 **36** 261]
- [5] Shen J W , Xu W 2005 *Journal of Taiyuan University of Technology (NSE)* **36** 742 (in Chinese] 申建伟、徐伟 2005 太原理工大学学报 **36** 742]
- [6] Yu L Q , Tian L X 2005 *Journal on Engineering Mathematics* **22** 1133 (in Chinese] 余丽琴、田立新 2005 工程数学学报 **22** 1133]
- [7] Yu L Q , Tian L X 2005 *Pure and Applied Mathematics* **21** 310 (in Chinese] 余丽琴、田立新 2005 纯粹数学与应用数学 **21** 310]
- [8] Guo B L , Liu Z R 2003 *Science in China (Ser. A)* **33** 325 (in Chinese] 郭柏灵、刘正荣 2003 中国科学, A **(33)** 325]
- [9] Xie S L 2001 *Journal of Yunnan University (NSE)* **23** 5 (in Chinese] 谢绍龙 2001 云南大学学报(自然科学版) **23** 5]
- [10] Song X Y , Tian L X 2003 *Journal of Jiangsu University (NSE)* **24** 35 (in Chinese] 宋秀迎、田立新 2003 江苏大学学报(自然科学版) **24** 35]
- [11] Liu Z R , Yang X Y 2007 *Journal of Yunnan Nationalities University (NSE)* **16** 89 (in Chinese] 刘正荣、杨喜艳 2007 云南民族大学学报(自然科学版) **16** 89]
- [12] Tian L X , Xu G , Liu Z R 2002 *Applied Mathematics and Mechanics* **23** 497 (in Chinese] 田立新、许刚、刘曾荣 2002 应用数学和力学 **23** 497]
- [13] Xu J L , Hao Y , Yin Z W 2008 *Journal of Henan Normal University (NSE)* , **36** 12 (in Chinese] 许建楼、郝岩、殷政伟 2008 河南师范大学学报(自然科学版) **36** 126]
- [14] Zhao X S , Xu W 2007 *Journal of Southwest University for Nationalities (NSE)* **33** 464 (in Chinese] 赵小山、徐伟 2007 西南民族大学学报(自然科学版) **33** 464]
- [15] Wang Y M , Yao L P , Wang M L 2006 *Journal of Henan University of Science and Technology (NSE)* **27** 83 (in Chinese] 王跃明、姚丽萍、王明亮 2006 河南科技大学学报(自然科学版) **27** 83]
- [16] Liu S K , Fu Z T , Liu S D , Zhao Q 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 10 (in Chinese] 刘式适、付遵涛、刘式达、赵强 2002 物理学报 **51** 10]
- [17] Pan J T , Qong L X 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 5585 (in Chinese] 潘军廷、龚伦训 2007 物理学报 **56** 5585]
- [18] Guo G P , Zhang J F 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 2204 (in Chinese] [郭冠平、张解放 2002 物理学报 **51** 2204]
- [19] Wu G J , Han J H , Shi L M , Zhang M 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3858 (in Chinese] 吴国将、韩家骅、史良马、张苗 2006 物理学报 **55** 3858]
- [20] Taogetusang , Sirendaoerji 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 6214 (in Chinese] 套格图桑、斯仁道尔吉 2006 物理学报 **55** 6214]
- [21] Zheng Y , Zhang H Q 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 0389 (in Chinese] [郑 张鸿庆 2000 物理学报 **49** 0389]
- [22] Zhang S Q , Li Z B 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 2204 (in Chinese] 张善卿、李志斌 2003 物理学报 **52** 2204]
- [23] Li D S , Zhang H Q 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 1565 (in Chinese] 李德生、张鸿庆 2006 物理学报 **55** 1565]

A simple method for solving nonlinear wave equations for their peaked soliton solutions and its application *

Liu Yu[†]

(*Henan Electric Power Research Institute , Zhengzhou 450052 , China*)

(Received 9 February 2009 ; revised manuscript received 3 March 2009)

Abstract

According to the characteristics of peaked soliton solution , the undetermined coefficient method for solving nonlinear wave equations for their peaked soliton solutions is submitted and by means of the method several kinds of peaked soliton solutions are obtained for five nonlinear wave equations : the Camassa-Holm , fifth -order KdV-like , generalized Ostrovsky , combined KdV-mKdV and Klein-Gordon equations . The solutions given in literature about Camassa-Holm equation become the special cases of the solutions in this paper . The graphs of some solutions are given through numerical simulation . The special conditions under which the wave equation will have peaked soliton solution is briefly described . The method used in this paper can also be used for solving many other nonlinear equations .

Keywords : nonlinear wave equation , peaked soliton solution , undetermined coefficient method

PACC : 0340K , 0290

* Project supported by the Research Foundation of Henan Electric Power Research Institute .

[†] E-mail : ly _ hndl@yahoo . com . cn