第 58 卷 第 11 期 2009 年 11 月
1000-3290/2009/58(11)/7466-07
物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA
Vol. 58, No. 11, November, 2009


# 类经典态——谐振子和无限深方势阱*

**李兴华**1)† **杨亚天**1) **徐躬耦**2)3)

1)(福建师范大学物理与光电信息科技学院,福州 350007)

2)(南京大学物理系,南京 210093)

3)(兰州重离子加速器国家实验室理论核物理中心,兰州 730000)

(2009 年 2 月 17 日收到;2009 年 3 月 19 日收到修改稿)

把坐标平均值随时间的变化和在宏观条件下与经典解相同的量子态定义为类经典态,并求解了一维谐振子和无限深方势阱的类经典态,有助于从波动力学角度理解量子到经典过度的问题.

**关键词:**量子经典对应,类经典态,谐振子,无限深方势阱

**PACC:**0365

## 1. 引 言

量子理论从创立至今已有一百多年,人们用它成功地处理了微观世界的问题,然而其中的一些基本问题仍然令人费解[1].人们理解从狭义相对论到牛顿力学的过渡比较容易,当 $v/c \ll 1$ 时,相对论就过渡到了牛顿力学.但是,如何从波动力学的角度理解从量子到经典的过渡就不这么容易.

在量子力学中,谈论质点何时处于何位置没有意义,但可以问质点坐标的空间平均值如何随时间变化.笔者认为,量子力学和经典力学的关系与相对论和牛顿力学的关系类似,在一定条件下,量子力学可以过渡到经典力学.但是,把这个条件表述为 $\hbar \to 0$ 是不够严密的,因为 $\hbar$ 是一个具有确定量纲的普适常数,如何趋于零?对此,路径积分的表述就严格了.它提出如果系统的作用量(和 $\hbar$ 同量纲)比 $\hbar$ 大得多的话,系统的运动就可以用经典力学描述[2].同样,Bohr 提出的对应原理指出[3—5]:在大量子数极限下,量子体系的行为将渐近地趋于与经典力学体系相同[6].但定态决不可能过渡到经典力学,因为力学量在定态中的平均值不随时间变化,给不出经典粒子的坐标在轨道中的演化.什么样的波函数可以给出经典轨道?当年 Schrödinger 曾认为经典态对应于这样的量子波包,其坐标平均值随时间的变化与经典解相同,人们把这样的态称为 Schrödinger 相干态[7].但是,除了谐振子而外,不可能严格地找到这样的相干态(详见下文).人们曾试图给出氢原子的相干态,虽取得了相当大的进展,但都未能最终奏效[8,9].这就使人们从波动力学的角度理解量子到经典的过度产生了困难.

如同人们问相对论力学中的那些解对应于牛顿解一样,上述对量子与经典问题的提法是不恰当的.相对论力学中的任何解都和牛顿解不同,只有略去 $v/c$ 及其高次项后才和牛顿解相同.同样,量子力学的解也和经典解不同,只有在一定条件下,略去某些项目后才能给出经典的结果.否则,有些态的坐标平均值和经典解相同(它意味着在微观条件下也可以看到类似于经典运动的轨道),有些态不同,岂非更令人费解.

无可否认,物理学家们从路径积分和相干态出发在理解量子和经典的关系方面都取得了巨大的进展.例如从路径积分出发,在得出半经典的量子化条件、理解经典轨道和量子谱的对应以及如何从经典轨道特别是从周期轨道和闭合轨道获取谱和波函数的信息方面取得了巨大的进展[10—17].路径积分处理的是量子体系,它侧重于研究那些路径可以给出该系统的主要量子特征,它并未着眼于回答,什么样的波函数可以给出经典轨道.另一方面,以相干态作为连续基出发,在理解量子经典对应方面也取得了巨

* 福建省自然科学基金(批准号:2007J0197,2007J0002)资助的课题.

† E-mail:lixh@fjnu.edu.cn

大进展[18—22]，特别是系统具有某种对称性(即系统的哈密顿量可用李群链的 Casimir 算子表示)时，其威力更大，它在了解多体系统的集体运动方面发挥了巨大的作用．在经典过渡方面，人们企图找出谐振子以外的严格的 Schrödinger 相干态，但这基本上是行不通的(详见本文)．

本文从量子力学出发，讨论为什么波动力学在经典条件下能给出经典的轨道．指出虽然不存在严格的 Schrödinger 相干态，但这样的量子态是存在的，它的坐标平均值随时间的变化，在宏观条件下，与经典解相同．这里多了"在宏观条件下"这几个字，它相当于狭义相对论虽然找不到严格的牛顿解，但在 $v/c\ll 1$ 时却过渡到了牛顿力学．本文把这样的相干态称为类经典态(NCS)．本文对问题的处理和 Bohr 对应原理的精神是一致的，不过本文给出的 NCS，不是定态，而是类似于 de Broglie 所提的波包[23]．本文给出了谐振子和无限深方势阱的类经典态，以后将给出氢原子的类经典态．

## 2. Schrödinger 相干态和 Ehrenfest 定理

我们把 Schrödinger 相干态记为 $|\mathrm{SCS}\rangle$，它满足

$$\bar{x}_i(t)\equiv\langle \mathrm{SCS}|x_i|\mathrm{SCS}\rangle = x_{i\mathrm{cl}}(t), \tag{1}$$

其中 $x_i$ 是第 $i$ 个坐标，$x_{i\mathrm{cl}}(t)$ 是其经典解．但这样的严格解除谐振子外是找不到的．因为对力学量 $F$ 的平均值

$$\bar{F}\equiv\langle\psi\mid F\mid\psi\rangle, \tag{2}$$

我们有

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\bar{F}}{\mathrm{d}t} &= \left(\frac{\partial}{\partial t}\langle\psi|\right)F|\psi\rangle+\langle\psi|F\left(\frac{\partial}{\partial t}|\psi\rangle\right)\\ &=\frac{1}{\mathrm{i}\hbar}\langle\psi|(FH-HF)|\psi\rangle=\frac{1}{\mathrm{i}\hbar}\overline{[F,H]}.\end{aligned} \tag{3}$$

设系统的哈密顿量为

$$H=\sum_{k=1}^{n}\frac{p_kp_k}{2m}+V(x),\ V(x)\equiv V(x_1,x_2,\cdots,x_n), \tag{4}$$

则有

$$\frac{\mathrm{d}\bar{x}_j}{\mathrm{d}t}=\frac{\bar{p}_j}{m},\ \frac{\mathrm{d}\bar{p}_j}{\mathrm{d}t}=-\overline{\frac{\partial V(x)}{\partial x_j}}. \tag{5}$$

于是我们有

$$\frac{\mathrm{d}^2\bar{x}_j}{\mathrm{d}t^2}=-\overline{\frac{\partial V(x)}{\partial x_j}}. \tag{6}$$

这就是 Ehrenfest 定理．一般来说

$$\frac{\mathrm{d}^2\bar{x}_j}{\mathrm{d}t^2}=-\overline{\frac{\partial V(x)}{\partial x_j}}\neq\left(-\frac{\partial V(x)}{\partial x_j}\right)\bigg|_{x_i=\bar{x}_i},$$

因此坐标平均值随时间的变化，就和牛顿方程的经典解不同．

但如果

$$-\overline{\frac{\partial V(x)}{\partial x_j}}=\left(-\frac{\partial V(x)}{\partial x_j}\right)\bigg|_{x_i=\bar{x}_i},$$

则有 $\bar{x}_j(t)=x_{j\mathrm{cl}}(t)$.

此时，Ehrenfest 方程和牛顿方程一致，此波包坐标平均值随时间的变化，就和经典粒子坐标的变化相同．这时的量子态就是 Schrödinger 相干态．若势能是坐标的线性函数，上述条件可满足．但一般势能情况下上述关系并不满足，例如 $V(x)$ 含 $x_i^n$，$n>1$，

$$\begin{aligned}\overline{x_i^n}&=\langle\psi|x_i^n|\psi\rangle=\sum_{m_1m_2\cdots m_n}\langle\psi|x_i|m_1\rangle\langle m_1|x_i|m_2\rangle\\ &\quad\cdots\langle m_n|x_i|\psi\rangle\neq(\langle\psi|x_i|\psi\rangle)^n,\end{aligned} \tag{7}$$

因此，一般来说不存在严格的 Schrödinger 相干态．

## 3. 一维谐振子的类经典态

对谐振子而言，

$$V(x)=\frac{1}{2}\mu\omega^2r^2=\frac{1}{2}\mu\omega^2(x^2+y^2+z^2), \tag{8}$$

$$-\overline{\frac{\partial V(r)}{\partial x_j}}=-\mu\omega^2\bar{x}_j=-\left(\frac{\partial V(r)}{\partial x_j}\right)\bigg|_{x=\bar{x}_j}, \tag{9}$$

则对其能量本征态的任一线性组合，都是 Schrödinger 相干态．因为

$$|\psi\rangle=\sum_n c_n|\psi_n\rangle\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}E_nt},\ H|\psi_n\rangle=E_n|\psi_n\rangle. \tag{10}$$

$$\begin{aligned}\bar{x}(t)&=\langle\psi(t)|x|\psi(t)\rangle\\ &=\sum_{m,n}c_m^*c_n\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}(E_m-E_n)t}\langle\psi_m|x|\psi_n\rangle\\ &=\sum_{m,n}c_m^*c_n\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\omega_{mn}t}x_{mn}\\ &=\sum_n|c_n|^2x_{nn}+\sum_{m\neq n}c_m^*c_nx_{mn}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{mn}t},\end{aligned}$$

其中

$$x_{mn}\equiv\langle\psi_m|x|\psi_n\rangle,$$

$$\omega_{mn}\equiv\frac{E_m-E_n}{\hbar}=\frac{m\hbar\omega-n\hbar\omega}{\hbar}=(m-n)\omega,$$

$$c_n=|c_n|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_n},$$

而

$$x_{mn}=\left\langle m\left|\frac{\lambda_0}{\sqrt{2}}(b_x+b_x^+)\right|n\right\rangle$$

$$= \frac{\lambda_0}{\sqrt{2}}(\sqrt{n+1}\delta_{m,n+1} + \sqrt{n}\delta_{m,n-1}), \quad (11)$$

其中

$$b_x = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi + \mathrm{i}\hat{p}_\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\xi + \frac{\partial}{\partial \xi}\right),$$

$$b_x^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi - \mathrm{i}\hat{p}_\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\xi - \frac{\partial}{\partial \xi}\right), \quad (12)$$

$$\xi = \sqrt{\frac{\mu\omega}{\hbar}}x = \frac{x}{\lambda_0}, \quad \lambda_0 \equiv \sqrt{\frac{\hbar}{\mu\omega}},$$

$$\hat{p}_\xi = \frac{1}{\sqrt{\mu\omega\hbar}}\hat{p}_x = -\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial \xi}. \quad (13)$$

若令 $c_n = |c_n|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_n}$，于是我们有

$$\bar{x} = \sum_{m\neq n} c_m^* c_n x_{mn} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{mn}t}$$

$$= \frac{\lambda_0}{\sqrt{2}}\left(\sum_{n=0}\sqrt{n+1}c_{n+1}^* c_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} + \sum_{n=1}\sqrt{n}c_{n-1}^* c_n \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\right)$$

$$= \frac{\lambda_0}{\sqrt{2}}\sum_{n=0}\sqrt{n+1}|c_{n+1}c_n| \times (\mathrm{e}^{\mathrm{i}[\omega t-(\phi_{n+1}-\phi_n)]} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}[\omega t-(\phi_{n+1}-\phi_n)]})$$

$$= \sqrt{2}\lambda_0\sum_{n=0}\sqrt{n+1}|c_{n+1}c_n| \times \cos[\omega t - (\phi_{n+1}-\phi_n)])$$

$$= \bar{A}\cos(\omega t - \phi). \quad (14)$$

这里：

$$\bar{A} = \sqrt{2}\lambda_0\left\{\left[\sum_n \sqrt{n+1}|c_{n+1}c_n|\cos(\phi_{n+1}-\phi_n)\right]^2 + \left[\sum_n \sqrt{n+1}|c_{n+1}c_n|\sin(\phi_{n+1}-\phi_n)\right]^2\right\}^{1/2},$$

$$\mathrm{tg}\phi = \sum_n \sqrt{n+1}|c_{n+1}c_n|\sin(\phi_{n+1}-\phi_n) \Big/ \sum_n \sqrt{n+1}|c_{n+1}c_n|\cos(\phi_{n+1}-\phi_n), \quad (15)$$

因此有

$$\frac{\mathrm{d}^2\bar{x}(t)}{\mathrm{d}t^2} = -\omega^2\bar{A}\cos(\omega t - \phi) = -\omega^2\bar{x}(t). \quad (16)$$

我们再计算坐标的方均值

$$\bar{x}^2 = \sum_{mkn} c_m^* x_{mk} x_{kn} c_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{mn}t}$$

$$= \frac{\lambda_0^2}{2}\sum_{mkn} c_m^*(\sqrt{k+1}\delta_{m,k+1} + \sqrt{k}\delta_{m,k-1}) \times (\sqrt{n+1}\delta_{k,n+1} + \sqrt{n}\delta_{k,n-1})c_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{mn}t}$$

$$= \bar{B}\cos(2\omega t - \theta) + \bar{C}$$

$$= 2\bar{B}\cos^2\left(\omega t - \frac{\theta}{2}\right) + \bar{C} - \bar{B}, \quad (17)$$

其中

$$\bar{B} = \lambda_0^2\left\{\left[\sum_{n=0}\sqrt{(n+2)(n+1)} \times |c_{n+2}c_n|\cos(\phi_{n+2}-\phi_n)\right]^2 + \left[\sum_{n=0}\sqrt{(n+2)(n+1)} \times |c_{n+2}c_n|\sin(\phi_{n+2}-\phi_n)\right]^2\right\}^{1/2},$$

$$\mathrm{tg}\theta = \sum_{n=0}\sqrt{(n+2)(n+1)} \times |c_{n+2}c_n|\sin(\phi_{n+2}-\phi_n) \Big/ \sum_{n=0}\sqrt{(n+2)(n+1)} \times |c_{n+2}c_n|\cos(\phi_{n+2}-\phi_n),$$

$$\bar{C} = \lambda_0^2\sum_n\left(n+\frac{1}{2}\right)|c_n|^2, \quad (18)$$

$$\overline{x^2} - \bar{x}^2 = 2\bar{B}\cos^2(\omega t - \theta/2) - \bar{A}^2\cos^2(\omega t - \phi) + \bar{C} - \bar{B}. \quad (19)$$

并考虑两个限制条件

$$\sum_n |c_n|^2 = 1,$$

$$\bar{E} = \sum_n |c_n|^2 E_n = \sum_n |c_n|^2\left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega. \quad (20)$$

经典情形，

$$x = x_0\cos(\omega t - \phi),$$

$$E = \frac{1}{2}\mu\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\mu\omega^2x^2 = \frac{1}{2}\mu\omega^2x_0^2,$$

我们得到相容性条件为

$$\bar{E} = \sum_n |c_n|^2(n+1/2)\hbar\omega = (1/2)\mu\omega^2x_0^2 \quad (21)$$

或

$$\sum_n (n+1/2)\hbar\omega|c_n|^2 = \hbar\omega\left\{\left[\sum_n\sqrt{n+1}|c_{n+1}c_n|\cos(\phi_{n+1}-\phi_n)\right]^2 + \left[\sum_n\sqrt{n+1}|c_{n+1}c_n|\sin(\phi_{n+1}-\phi_n)\right]^2\right\},$$

它要求

$$\phi_{n+1} - \phi_n = \varphi, \quad (22)$$

这时(15)和(18)式化为

$$\bar{A} = \sqrt{2}\lambda_0\sum_n\sqrt{n+1}|c_{n+1}c_n|, \quad \mathrm{tg}\phi = \mathrm{tg}\varphi, \quad (15\mathrm{a})$$

$$\bar{B} = \lambda_0^2\sum_{n=0}\sqrt{(n+2)(n+1)}|c_{n+2}c_n|, \quad \mathrm{tg}\theta = \mathrm{tg}2\varphi,$$

$$\bar{C} = \lambda_0^2\sum_n(n+1/2)|c_n|^2, \quad (18\mathrm{a})$$

由此得

$$\sum_n(n+1/2)|c_n|^2 = \left[\sum_n\sqrt{n+1}|c_{n+1}c_n|\right]^2. \quad (23)$$

令 $\bar{B}=\lambda_0^2 B$，$\bar{C}=C\lambda_0^2$，$\bar{A}=\sqrt{2}\lambda_0 A$，上式化为 $A^2=C+1/2$.

在经典条件下量子的零点能可略去，上述条件变为

$$A^2=C. \tag{24}$$

同时，在经典条件下，$\bar{x}^2-\overline{x^2}=0$，由(19)式得 $2\bar{B}=\bar{A}^2$，$\bar{C}=\bar{B}$，或 $B=C=A^2$，

$$\begin{aligned}&\sum_{n=0}\sqrt{(n+2)(n+1)}\,|c_{n+2}c_n|\\&=\sum_n(n+1/2)|c_n|^2=[\sum_n\sqrt{n+1}\,|c_{n+1}c_n|]^2.\end{aligned} \tag{25}$$

当年，Schrödinger 取相干态为

$$|\alpha\rangle=\mathrm{e}^{-|\alpha|^2/2}\mathrm{e}^{\alpha b^+}|0\rangle=\sum_n\mathrm{e}^{-|\alpha|^2/2}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle,$$

显然满足条件(22)和(25). 这是严格的 Schrödinger 相干态.

我们在经典条件下，所取的类经典态与此略有不同. 我们取

$$N=[E_{\mathrm{cl}}/\hbar\omega]=[\mu\omega x_0^2/2\hbar]=x_0^2/2\lambda_0^2, \tag{26}$$

其中$[c]$表示 $c$ 的整数部分，例如$[2.78]=2$. 我们取类经典态为

$$\psi(x,t)=\sum_{n=N-\Delta N}^{N+\Delta N}c_n\psi_n(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\omega t},\ c_n=\frac{1}{\sqrt{2\Delta N+1}}. \tag{27}$$

若

$$1\ll\Delta N\ll N, \tag{28}$$

它给出

$$x_0^2\gg\lambda_0^2, \tag{28a}$$

$$\bar{x}=\bar{A}\cos(\omega t-\phi),$$

$$\begin{aligned}\overline{x^2}-\bar{x}^2&=2\bar{B}\cos^2(\omega t-\theta/2)\\&\quad-\bar{A}^2\cos^2(\omega t-\varphi)+\bar{C}-\bar{B},\end{aligned}$$

$$\bar{B}=\lambda_0^2\sum_{n=N-\Delta N}^{N+\Delta N}\sqrt{(n+2)(n+1)}\,|c_{n+2}c_n|,$$

$$\lambda_0^2\sum_{n=N-\Delta N}^{N+\Delta N}(n+1)|c_{n+2}c_n|<\bar{B}<\lambda_0^2\sum_{n=N-\Delta N}^{N+\Delta N}(n+2)|c_{n+2}c_n|,$$

或 $\lambda_0^2(N+1)<\bar{B}<\lambda_0^2(N+2)$，由于条件(28)，$\bar{B}=\lambda_0^2 N$，同理，由于条件(28)

$$\begin{aligned}\bar{A}&=\sqrt{2}\lambda_0\sum_{n=N-\Delta N}^{N+\Delta N}\sqrt{n+1}\,|c_{n+1}c_n|\\&=\sqrt{2}\lambda_0\sum_{n=N-\Delta N}^{N+\Delta N}\sqrt{N}\frac{1}{2\Delta N+1}=\sqrt{2}\lambda_0\sqrt{N},\end{aligned}$$

$$\mathrm{tg}\phi=\mathrm{tg}\varphi,\ \mathrm{tg}\theta=\mathrm{tg}2\varphi\rightarrow\theta=2\phi,$$

$$\begin{aligned}\overline{x^2}-\bar{x}^2&=(2\bar{B}-\bar{A}^2)\cos^2(\omega t-\phi)+\bar{C}-\bar{B}\\&=\lambda_0^2[2N-2(N+1)]\cos^2(\omega t-\phi)\\&\quad+\lambda_0^2(N+1/2-N)\\&=-2\lambda_0^2\cos^2(\omega t-\phi)+1/2\lambda_0^2\approx0.\end{aligned}$$

这是由于 $\bar{x}^2=\bar{A}^2\cos^2(\omega t-\phi)$ 的振幅为 $\bar{A}^2=2\lambda_0^2N=x_0^2$，根据条件(28)，2 和 1/2 比起 $N$ 来可以略去，条件(25)可以满足. 例如，取 $\mu=10^{-3}$ g，$\omega=10^4\,\mathrm{s}^{-1}$，$A=0.1$ cm，而 $\hbar=6.625\times10^{-34}$ J·s，则 $N\sim10^{24}$. 若取 $\Delta N=10^4$，在经典分辨条件下，可足够满足(25)式. 即波包的坐标平均值重现经典粒子的运动.

## 4. 一维无限深方势阱的类经典态

一维无限深方势阱的势能是

$$V(x)=\begin{cases}\infty, & |x|\geqslant a,\\0, & |x|<a,\end{cases} \tag{29}$$

Schrödinger 方程为

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}+V(x)\right]\psi(x)=E\psi(x), \tag{30}$$

其解为

$$\psi(x)=0,\ |x|\geqslant a, \tag{31a}$$

因而

$$\psi(\pm a)=0. \tag{31b}$$

$|x|<a$ 时，Schrödinger 方程化为

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}+k^2\right)\psi(x)=0,\ k\equiv\sqrt{\frac{2\mu E}{\hbar^2}}, \tag{32}$$

其解为

$$E_n=\frac{n^2\hbar^2\pi^2}{8\mu a},\ k_n=\frac{n\pi}{2a},\ n=1,2,\cdots \tag{33}$$

归一化的本征函数为

$$\psi_n(x)=\frac{(-)^n}{\sqrt{a}}\sin\frac{n\pi}{2a}(x+a). \tag{31c}$$

本征函数的相因子可任意取，这里的取法是使坐标的矩阵元为正. 下面我们来讨论无限深方势阱的类经典态. 其经典解为

$$E_{\mathrm{cl}}=\frac{1}{2}\mu v^2,\ v=\frac{4a}{T}.\ E_{\mathrm{cl}}=\frac{8\mu a^2}{T^2}, \tag{34}$$

$T$ 为经典粒子在势阱中往返一次的周期. 经典粒子运动的解为

$$x_{\mathrm{cl}}(t)=\begin{cases}vt+a=\dfrac{4a}{T}t+a, & -\dfrac{T}{2}\leqslant t\leqslant0,\\[2mm]-vt+a=-\dfrac{4a}{T}t+a, & 0<t\leqslant\dfrac{T}{2},\end{cases} \tag{35}$$

这个解是偶函数,其傅氏分解为

$$x_{\mathrm{cl}}(t) = \sum_{q=0}^{\infty} \frac{8a}{(2q+1)^2\pi^2}\cos(2q+1)\omega_{\mathrm{cl}} t,$$

$$\omega_{\mathrm{cl}} \equiv \frac{2\pi}{T} = \pi\sqrt{\frac{E_{\mathrm{cl}}}{2\mu a^2}}. \tag{36}$$

再来看量子解的坐标平均值.考察方势阱中任一叠加态 $\psi(x,t)$ 的坐标平均值.

$$\psi(x,t) = \sum c_n\psi_n(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_n t/\hbar}, \tag{37}$$

$$\begin{aligned}\bar{x}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty}\psi^*(x,t)x\psi(x,t)\mathrm{d}x\\ &= \int_{-a}^{a}\psi^*(x,t)x\psi(x,t)\mathrm{d}x\\ &= \sum_{m>n}2c_mc_nx_{mn}\cos\frac{(E_m-E_n)t}{\hbar}\\ &= \sum_{\substack{m>n\\ m+n=\mathrm{odd}}}2c_mc_nx_{mn}\cos\frac{\hbar\pi^2(m^2-n^2)t}{8\mu a^2},\end{aligned} \tag{38}$$

$$\begin{aligned}x_{mn} &= \int_{-a}^{a}\psi_m(x)\ x\psi_n(x)\mathrm{d}x\\ &= \frac{16amn}{(m^2-n^2)^2\pi^2}.\end{aligned} \tag{39}$$

下面我们讨论取什么样的线性组合可构成类经典态.量子解的频率为

$$\omega_{mn} = \frac{\hbar\pi^2(m^2-n^2)}{8\mu a^2} = \frac{\hbar\pi^2(m+n)(m-n)}{8\mu a^2},$$

由于 $m>n$,且 $m+n=\mathrm{odd}$,可令 $m=n+2q+1$,而

$$\begin{aligned}\omega_{mn} = \omega_{nq} &= \frac{\hbar\pi^2(2n+2q+1)(2q+1)}{8\mu a^2}\\ &= (2q+1)\frac{\hbar\pi^2(n+q+1/2)}{4\mu a^2}.\end{aligned} \tag{40}$$

若取

$$\omega_N = \frac{\hbar\pi^2 N}{4\mu a^2} \cong \omega_{\mathrm{cl}} = \sqrt{\frac{\pi^2E_{\mathrm{cl}}}{2\mu a^2}}, \tag{41}$$

则

$$N = \left[\frac{\sqrt{8\mu a^2E_{\mathrm{cl}}}}{\hbar\pi}\right], \tag{42}$$

其中 $[x]$ 表示 $x$ 的整数部分.这和取

$$E_N = \frac{N^2\hbar^2\pi^2}{8\mu a} \cong E_{\mathrm{cl}}$$

所得到 $N$ 的是一致的.于是我们可取类经典态为

$$\psi_{\mathrm{cl}} = \sum_{n=N-\Delta N}^{N+\Delta N}c_n\psi_n(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_nt/\hbar}, \tag{43}$$

其中 $\Delta N$ 是一个整数,且 $\Delta N/N \ll 1$.这时

$$\begin{aligned}\bar{x}(t) &= \sum_{\substack{m>n\\ m+n=\mathrm{odd}}}2c_mc_nx_{mn}\cos\frac{\hbar\pi^2(m^2-n^2)t}{8\mu a^2}\\ &= \sum_{q=0}^{q_1}\sum_{n=N-\Delta N}^{N+\Delta N}2c_{n+2q+1}c_n\\ &\quad\times\frac{16a(n+2q+1)n}{(2q+1)^2(2n+2q+1)^2\pi^2}\\ &\quad\times\cos\left[(2q+1)\frac{\hbar\pi^2(n+q+1/2)}{4\mu a^2}t\right].\end{aligned} \tag{44a}$$

在经典条件下,频率 $\omega_{\mathrm{cl}}$ 是有一定分辨率 $\delta\omega_{\mathrm{cl}}$ 的,在开区间 $(\omega_{\mathrm{cl}}-\delta\omega_{\mathrm{cl}},\omega_{\mathrm{cl}}+\delta\omega_{\mathrm{cl}})$ 之内的频率不可分辨,我们都认为是 $\omega_{\mathrm{cl}}$.如果

$$\frac{\delta\omega_N}{\omega_N} = \frac{\dfrac{\hbar\pi^2\Delta N}{4\mu a^2}}{\dfrac{\hbar\pi^2N}{4\mu a^2}} = \frac{\Delta N}{N} < \frac{\delta\omega_{\mathrm{cl}}}{\omega_{\mathrm{cl}}}, \tag{45}$$

于是在宏观分辨范围内,$(N-\Delta N,N+\Delta N)$ 之内的数值均可以 $N$ 代替,于是上式可化为

$$\begin{aligned}\bar{x}(t) &= \sum_{q=0}^{q_1}\sum_{n=N-\Delta N}^{N+\Delta N}2c_{n+2q+1}c_n\cos[(2q+1)\omega_Nt]\\ &= \sum_{q=0}^{q_1}\sum_{n=N-\Delta N}^{N+\Delta N}c_{n+2q+1}c_n\frac{8a}{(2q+1)^2\pi^2}\\ &\quad\times\cos[(2q+1)\omega_{\mathrm{cl}}t],\end{aligned} \tag{44b}$$

其中

$$q_1 \ll \Delta N \ll N, \tag{46}$$

若取

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{2\Delta N+1}},\ N-\Delta N \leqslant n \leqslant N+\Delta N, \tag{47}$$

则 $\bar{x}(t)$ 与 $x_{\mathrm{cl}}(t)$ 一致.

对宏观情况,上述条件是不难满足的.例如,取 $\mu=10^{-3}$ g, $a=1$ cm, $T=1$ s,则

$$N = \left[\frac{\sqrt{8\mu a^2E_{\mathrm{cl}}}}{\hbar\pi}\right] = \left[\frac{8\mu a^2}{\hbar\pi T}\right] \sim 10^{24}.$$

若取 $\Delta N=10^{11}$,$q_1=10^6$,此波包坐标的平均值完全可以重现经典粒子的运动.

## 5.结 论

本文把量子态中坐标平均值随时间的变化与宏观经典运动有相同解的态定义为类经典态(NCS),并求解了一维谐振子和无限深方势阱的类经典态,有助于从波动力学角度理解量子到经典过渡的问

题.从这两个特例来看,NCS 有如下特点：

1.NCS 是这样一簇态$|\psi_n\rangle$的叠加：

$$n \in (N - \Delta N, N + \Delta N),\ \Delta N/N \ll 1,$$
$$\langle \psi_n | H | \psi_n \rangle \cong E_{cl}.$$

2.$\Delta x/\bar{x} \ll 1$,在宏观分辨率下,可认为质点具有确定的位置.

3.运动周期取决于$(E_m - E_n)/\hbar$, $m, n \in (N - \Delta N, N + \Delta N)$中之最小者.

研究类经典态的意义在于可以对波动力学有一个更全面的了解.一方面是微观世界需用量子力学计算,另一方面是宏观世界可用经典力学处理.从波动力学来看,经典轨道只不过是 NCS 在宏观分辨率下的表现而已.夹在中间的介观层次,若用 NCS 处理,就不能做宏观分辨率下的近似,需进行更精确一些的计算.这有点类似于在路径积分中考虑稳相近似,或更高阶的量子修正.在这一思路下我们将给出氢原子的 NCS 和非束缚态的 NCS.


[1] Zhou G Z 2001 *Physics* **30** 230 (in Chinese) [周光召 2001 物理 **30** 230]

[2] Feynman R P, Hibbs A R 1965 *Quantum Mechanics and Path Integrals* (New York: McGraw-Hill)

[3] Bohr N 1918 Proc. Dan. *Acad*. *Sc*. **4** No.1, Part, 1, 2

[4] Bohr N, 1920 *Z*. *Phys*. **2** 423

[5] Bohr N 1992 *The Theory of Spectra and Atmic Constitution* (Cambridge University Press)

[6] Zeng J Y 2000 *Quantum Mechanics* vol Ⅱ 3nd ed (Beijing: Science Perss) 73—74 (in Chinese) [曾谨言 2000 量子力学(第 3 版) (北京 科学出版社) 卷Ⅱ 第 73—74 页]

[7] Schrödinger E 1926 *Naturwissenschaften* **14** 461, Letters on Wave Mechanics, ed. K. Pizibram (Vision, London, 1967)

[8] Xu B W, Guo W H 1993 *Acta Phys*. *Sin*. **42** 1050 (in Chinese) [许伯威、顾维华 1993 物理学报 **48** 1050]

[9] Xu B W, Ding G H, Kong F M 2000 *Phys*. *Rev*. A **62** 022106

[10] Lu J, Du M L 2004 *Acta Phys*. *Sin*. **53** 2450 (in Chinese) [陆军、杜孟利 2004 物理学报 **53** 2450]

[11] Du M L, Delos J B 1987 *Phys*. *Rev*. *Lett*. **58** 1731

[12] Du M L, Delos J B 1988 *Phys*. *Rev*. A **38** 1896, 1913

[13] Ma Z Q, Xu B W 2006 *Acta Phys*. *Sin*. **55** 1571 (in Chinese) [马中骐、许伯威 2006 物理学报 **55** 1571]

[14] Deng W J, Xu Y H, Liu P 2004 *Acta Phys*. *Sin*. **53** 693 (in Chinese) [邓文基、许基桓、刘　平 2004 物理学报 **53** 693]

[15] Berry M V, Balazs N L 1979 *J*. *Phys*. A **12** 625

[16] Berry M V 1977 *J*. *Phys*. A **10** 2083

[17] Gutzwiller M C 1990 *Chaos in Classical and Quantum Mechanics* (New York: Springer-Verlag)

[18] Berry M V, *Quantum Chaos and Statistical Nuclear Physics*, In Seligmann E D and Nishioka H (eds) *Lecture Notes in Physics* 263. Berlin: Springer-Verlag p1

[19] Cheng Y F 2004 *Acta Phys*. *Sin*. **53** 3657 (in Chinese) [程衍富 2004 物理学报 **53** 3657]

[20] Li W B, Li M S 2008 *Acta Phys*. *Sin*. **57** 3973 (in Chinese) [李文博、李宓善 2008 物理学报 **57** 3973]

[21] Deng W Ji, Xu Y H, Liu P 2003 *Acta Phys*. *Sin*. **52** 2961 (in Chinese) [邓文基、许运华、刘　平 2003 物理学报 **52** 2961]

[22] Zhang W M, Feng D H, Gilmore R 1990 *Rev*. *Mod*. *Phys*. **62** 867

[23] de Broglie L　The Beginnings of Wave Mechanics, In W. C. Price (ed.) 1973 Wave Mechanics, University of London Kings College, Butterworth & Co. and the reference there in (转引自[17] p 19)

# Near classical states of oscillator in square potential well with infinitely high walls*

Li Xing-Hua[1)†] Yang Ya-Tian[1)] Xu Gong-Ou[2)3)]

1) (*School of Physics and Optic-Electronics Technology, Fujian Normal University, Fuzhou* 350007, *China*)

2) (*Department of Physics, Nanjing University, Nanjing* 210093, *China*)

3) (*Centre of Theoretical Nuclear Physics, National Laboratory of Heavy-IonAccelerator, Lanzhou* 730000, *China*)

(Received 17 February 2009; revised manuscript received 19 March 2009)

Abstract

We define such quantum state as near classical state (NCS), in which the mean values of coordinates equal to the classical solution in macroscopic scale. We obtained the NCS for oscillator in square potential well with infinitely high walls as example.

**Keywords**: quantum-classical correspondence, near classical state, harmonic oscillator, square potential well with infinitely high walls

**PACC**: 0365

* Project supported by the Natural Science Foundation of Fujian Province, China (Grant Nos. 2007J0197, 2007J0002).

† E-mail: lixh@fjnu.edu.cn