第 58 卷 第 11 期 2009 年 11 月
1000-3290/2009/58(11)/7486-05

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol. 58, No. 11, November, 2009

静态球对称黑洞的热质点模型及辐射功率*

孟庆苗† 蒋继建 王 帅

(菏泽学院物理系,菏泽 274015)

(2009 年 2 月 27 日收到;2009 年 3 月 18 日收到修改稿)

利用静态球对称黑洞的热质点模型,研究了黑洞的热辐射规律,得到了当 η 取固有厚度时,对所有 Schwarzschild 黑洞,其辐射功率都相同,其视界处的辐射能通量与黑洞的质量的平方成反比,而距黑洞遥远的观察者所接收到的辐射能通量与观测者到黑洞的距离的平方成反比;Reissner-Nordström 黑洞视界处的辐射能通量和辐射功率不仅与黑洞的质量有关,还与黑洞的电荷有关,而距黑洞遥远的观察者所接收到的辐射能通量,当截断的固有厚度 η、黑洞的质量 m 和电荷 Q 取定后与观测者到黑洞之间的距离的平方成反比;极端 Reissner-Nordström 黑洞的辐射功率和辐射能通量为零.

关键词:静态球对称黑洞,热质点模型,辐射功率,辐射能通量
PACC:0420,9760L

1. 引 言

20 世纪 70 年代,Hawking 从理论上证明了黑洞的视界会发出热辐射[1,2],并给出了辐射谱是精确的黑体谱,这极大地推动了黑洞热力学的发展,从而建立了完整的黑洞热力学理论体系[3].然而,由于 Hawking 辐射谱是精确的热谱,意味着在辐射过程中,量子纯态演化为热混合态,这将违背量子力学的幺正性原理[4].2000 年 Parikh 和 Wilczek[5] 在考虑辐射粒子的自引力作用的情况下,将黑洞的 Hawking 辐射理解成一种量子隧穿过程,得到了黑洞视界处粒子的量子隧穿率与黑洞的 Bekenstein-Hawking 熵变有关,给出了一种把黑洞的纯热谱修正为非热谱的半经典方法,这样量子力学的幺正性原理有可能得到满足.随后的一些工作[6—17] 都得到了与 Parikh 结论完全相符的结果.可见弯曲时空中黑洞的热辐射不同于平直时空中黑体的热辐射,黑洞周围的强引力场将影响黑洞的热辐射.最近我们利用黑洞视界附近的熵密度,对黑洞的热辐射进行了研究,得到了黑洞的热辐射满足广义 Stefan-Boltzmann 定律[18—24],得到的广义 Stefan-Boltzmann 系数不再是一个恒量,而是一个与黑洞周围的时空度规有关的系数.证明了弯曲时空中黑洞的热辐射不同于平直时空中黑体的热辐射,黑洞周围的强引力场、电磁场将影响黑洞的热辐射.为使研究结果更具有普遍意义且与天文观测更好地相联系,本文进一步研究了静态球对称黑洞的辐射能通量及辐射功率,揭示了黑洞周围的引力场和电磁场与其热辐射之间存在着必然的内在联系.

2. 静态球对称黑洞的辐射能通量和辐射功率

一般非极端静态球对称黑洞的时空线元可表示为[25]

$$\mathrm{d}s^2 = g_{00}\mathrm{d}t^2 + g_{11}\mathrm{d}r^2 - r^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2), \tag{1}$$

式中 $g_{00} = -g^{11} = -g_{11}^{-1} = (g^{00})^{-1}$,时空具有球对称性,$g_{00} = 0$ 即为黑洞的视界面方程,因而可令

$$g_{00} = f(r)(r - r_{\mathrm{H}}), \tag{2}$$

式中 r_{H} 为黑洞的视界半径.在辐射度量学中,一个最基本的量是辐射能通量,它是指单位时间内从光源单位面积发出或通过单位接收面积的辐射能.与此类比,文献[18]引入了静态球对称黑洞视界面附近的辐射能通量,它是指单位时间内从黑洞视界附近单位面积发出的辐射能.单位时间内从黑洞视界

* 国家自然科学基金(批准号:10773002)和山东省教育厅科技计划项目(批准号:J07WJ49)资助的课题.

† E-mail:mengqingmiao@yahoo.com.cn

发出的总辐射能为黑洞的辐射功率.该文利用薄膜模型和静态球对称黑洞 Dirac 场的统计熵，导出了静态球对称黑洞视界面附近 Dirac 场的辐射能通量

$$M_{e}^{(D)} = \frac{7\pi^2 c k_B^3 r_H^2}{30\varepsilon(\varepsilon+\delta) f_H^2 (r_H+\varepsilon+\delta)^2} T^4, \quad (3)$$

式中 T 为黑洞的视界温度，k_B 为玻尔兹曼常数，c 为光速，δ 为薄膜的厚度，ε 为薄膜到黑洞事件视界的距离，$f_H = f(r)|_{r=r_H}$.由(3)式可得静态球对称黑洞视界面附近 Dirac 场的辐射功率

$$P^{(D)} = \frac{14\pi^3 c k_B^3 r_H^4}{15\varepsilon(\varepsilon+\delta) f_H^2 (r_H+\varepsilon+\delta)^2} T^4. \quad (4)$$

为了研究弯曲时空中辐射源周围的引力场和电磁场对其热辐射的影响，仿照经典力学中质点模型，我们引入弯曲时空中辐射源的热质点模型：对于一个质量为 m，带电量为 Q，辐射温度为 T 的辐射源，如果辐射源的大小和研究问题中的其他线度相比甚小，辐射源的大小和形状不起作用或只起次要作用，就可以把整个辐射源看成没有大小和形状而具有整个辐射源的质量、电荷和温度的几何点，我们把这样的物理模型称为热质点.这一模型把物体的质量、电荷和温度联系在了一起.虽然热质点是一个理想的模型，但它却为我们研究弯曲时空的热辐射带来许多方便，我们可以将特殊情况下的遥远的星体、球对称黑洞视为热质点，研究其热辐射规律，揭示黑洞周围的引力场和电磁场对其热辐射的影响.将距观测者遥远的静态球对称黑洞视为热质点，设黑洞与观测者之间的距离为 r，观测者所接收到的辐射能通量

$$M_{r}^{(D)} = \frac{7\pi^2 c k_B^3 r_H^4}{30\varepsilon(\varepsilon+\delta) f_H^2 (r_H+\varepsilon+\delta)^2 r^2} T^4. \quad (5)$$

2.1. Schwarzschild 黑洞的辐射能通量和辐射功率

对于 Schwarzschild 黑洞，$f_H = \frac{1}{r_H} = \frac{1}{2m}$，$m$ 为黑洞的质量，令 $\varepsilon(\varepsilon+\delta) = \eta^2$，考虑 ε 和 δ 都远小于 r_H，由(3)式可得 Schwarzschild 黑洞视界附近 Dirac 场的辐射能通量

$$M_{e}^{(D)} = \frac{14\pi^2 c k_B^3 m^2}{15\eta^2} T^4. \quad (6)$$

(6)式可称为 Schwarzschild 黑洞 Dirac 场的广义 Stefan-Boltzmann 定律.对应的广义 Stefan-Boltzmann 系数为

$$\sigma = \frac{14\pi^2 c k_B^3 m^2}{15\eta^2}. \quad (7)$$

将(7)式恢复到普通单位制得

$$\sigma = \frac{14\pi^2 l_p^2 m^2}{15 m_p^2 \eta^2}\sigma_p = \alpha \frac{m^2}{\eta^2}. \quad (8)$$

式中 $l_p = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}}$ 为 Planck 长度，$m_p = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}}$ 为 Planck 质量，$\hbar$ 为 Planck 常数，G 为万有引力常数，c 为真空中的光速，σ_p 为 Planck 广义 Stefan-Boltzmann 系数，可以推得

$$\sigma_p = \frac{k_B^4}{\hbar^3 c^2} = 3.43\times10^{-7}\,\mathrm{W\cdot m^{-2}\cdot K^{-4}}. \quad (9)$$

由(8)式(9)式可得

$$\alpha = \frac{14\pi^2 l_p^2 \sigma_p}{15 m_p^2} = 1.72\times10^{-60}\,\mathrm{W\cdot K^{-4}\cdot kg^{-2}}. \quad (10)$$

由(8)式可见，黑洞视界附近热辐射的 σ 值随黑洞质量 m 的增大而增大，随截断的固有距离 η 的增大而减小，其原因在于黑洞的热辐射不同于平直时空黑体的热辐射，黑洞的 Hawking 辐射与黑洞视界附近的真空震荡有关，黑洞的质量越大，视界附近的真空震荡越厉害，而截断的固有距离越大，视界附近的真空震荡越不显著.黑洞周围的强引力场将影响黑洞的热辐射.

在普通单位之下，Schwarzschild 黑洞的温度与其质量的关系为

$$T = \frac{\hbar c^3}{8\pi k_B G m}. \quad (11)$$

利用(11)式将(6)式恢复到普通单位制可得

$$M_{e}^{(D)} = \frac{7\hbar c^6}{30720\pi^2 G^2 m^2 \eta^2}. \quad (12)$$

文献[23]给出了 η 作为固有量时的数量级

$$\Delta s^2 = \left(1-\frac{2m}{r_H+\eta}\right)^{-1}\Delta r^2 = \frac{r_H}{\eta}\eta^2 = r_H\eta,$$

$$\Delta s = \sqrt{r_H\eta} = \sqrt{\frac{2ml_p^2}{720\pi m}} = \sqrt{\frac{l_p^2}{360\pi}} = 4.79\times10^{-37}\,\mathrm{m}. \quad (13)$$

值得注意的是固有厚度不仅比 Planck 尺度还小，而且是一个与黑洞质量无关的常数，这与 't Hooft 的固定厚度(作为固有量)相一致[26].因此，此厚度仅是视界的性质，而且是所有 Schwarzschild 黑洞视界均具有的性质.但是，从弯曲时空量子场论的角度看，此厚度是没有意义的，它只能说明视界附近真空震荡得非常厉害.可见，当 η 取固有厚度时，Schwarzschild 黑洞视界处 Dirac 场的辐射能通量与黑洞质量的平方成反比.由(12)式可得普通单位制下

的 Schwarzschild 黑洞 Dirac 场的辐射功率

$$P_{\mathrm{S}}^{(\mathrm{D})} = \frac{7\hbar c^2}{1920\pi\eta^2}. \tag{14}$$

可见，当 η 取固有厚度时，对所有的 Schwarzschild 黑洞，其辐射功率都相同，与黑洞的质量和视界温度无关.

对距观测者遥远的 Schwarzschild 黑洞来说，可将其视为热质点，设二者之间的距离为 r，则观测者所接收到的辐射能通量

$$M_{\mathrm{r}}^{(\mathrm{D})} = \frac{7\hbar c^2}{7680\pi^2\eta^2 r^2}. \tag{15}$$

由(15)式可见，距 Schwarzschild 黑洞无限远的观测者所接收到的辐射能通量与黑洞视界温度及黑洞的质量无关，当 η 取固有厚度时，黑洞的辐射能通量与观测者到黑洞之间的距离的平方成反比.

2.2. Reissner-Nordström 黑洞的辐射能通量和辐射功率

对于 Reissner-Nordström 黑洞，$f_{\mathrm{H}} = \frac{r_{\mathrm{H}} - r_-}{r_{\mathrm{H}}^2}$，$r_-$ 为黑洞的内视界半径，将 f_{H} 代入(3)式可得 Reissner-Nordström 黑洞视界附近 Dirac 场的辐射能通量

$$M_{\mathrm{e}}^{(\mathrm{D})} = \frac{7\pi^2 ck_{\mathrm{B}}^3 r_{\mathrm{H}}^6}{30\varepsilon(\varepsilon+\delta)(r_{\mathrm{H}}-r_-)^2(r_{\mathrm{H}}+\varepsilon+\delta)^2}T^4, \tag{16}$$

式中

$$r_{\mathrm{H}} = m + \sqrt{m^2 - Q^2},$$

$$r_- = m - \sqrt{m^2 - Q^2}. \tag{17}$$

$$T = \frac{r_{\mathrm{H}} - r_-}{4\pi r_{\mathrm{H}}^2}. \tag{18}$$

(16)式可称为 Reissner-Nordström 黑洞视界附近 Dirac 场的广义 Stefan-Boltzmann 定律，对应的广义 Stefan-Boltzmann 系数为

$$\sigma = \frac{7\pi^2 ck_{\mathrm{B}}^3 r_{\mathrm{H}}^6}{30\varepsilon(\varepsilon+\delta)(r_{\mathrm{H}}-r_-)^2(r_{\mathrm{H}}+\varepsilon+\delta)^2}. \tag{19}$$

对极端 Reissner-Nordström 黑洞，$r_{\mathrm{H}} = r_- = m$，黑洞的内外视界合二为一，这时单向膜区缩成一个无限薄的膜，由(19)式可得极端 Reissner-Nordström 黑洞的广义 Stefan-Boltzmann 系数将为无穷大.

考虑到 ε 和 δ 都远小于 r_{H}，令 $\varepsilon(\varepsilon+\delta) = \eta^2$，由(16)式(18)式可得 Reissner-Nordström 黑洞视界附近 Dirac 场的辐射能通量

$$M_{\mathrm{e}}^{(\mathrm{D})} = \frac{7ck_{\mathrm{B}}^3(r_{\mathrm{H}}-r_-)^2}{7680\pi^2\eta^2 r_{\mathrm{H}}^4}. \tag{20}$$

利用 Planck 温度 $T_{\mathrm{p}} = \sqrt{\frac{c^5\hbar}{Gk_{\mathrm{B}}^2}}$ 将(18)式(20)式恢复到普通单位

$$T = \frac{\hbar c\sqrt{\left(\frac{Gm}{c^2}\right)^2 - \frac{GQ^2}{c^4}}}{2\pi k_{\mathrm{B}}\left[\frac{Gm}{c^2} + \sqrt{\left(\frac{Gm}{c^2}\right)^2 - \frac{GQ^2}{c^4}}\right]^2}. \tag{21}$$

$$M_{\mathrm{e}}^{(\mathrm{D})} = \frac{7\hbar c^2\left[\left(\frac{Gm}{c^2}\right)^2 - \frac{GQ^2}{c^4}\right]}{1920\pi^2\eta^2\left[\frac{Gm}{c^2} + \sqrt{\left(\frac{Gm}{c^2}\right)^2 - \frac{GQ^2}{c^4}}\right]^4}. \tag{22}$$

由(22)式不难看出，当 η 取定后，Reissner-Nordström 黑洞视界附近 Dirac 场的辐射能通量，不仅与黑洞的质量有关，还与黑洞的电荷有关. 黑洞周围的引力场和电磁场将影响黑洞的热辐射. 当 $Gm^2 = Q^2$ 时，Reissner-Nordström 黑洞变为极端 Reissner-Nordström 黑洞，由(22)式可得极端 Reissner-Nordström 黑洞的辐射能通量为零，其原因在于极端黑洞的视界温度为零.

利用(22)式可得 Reissner-Nordström 黑洞 Dirac 场的辐射功率

$$P_{\mathrm{R-N}}^{(\mathrm{D})} = \frac{7\hbar c^2\left[\left(\frac{Gm}{c^2}\right)^2 - \frac{GQ^2}{c^4}\right]}{480\pi\eta^2\left[\frac{Gm}{c^2} + \sqrt{\left(\frac{Gm}{c^2}\right)^2 - \frac{GQ^2}{c^4}}\right]^2}. \tag{23}$$

可见，当 η 取定后，Reissner-Nordström 黑洞 Dirac 场的辐射功率不仅与黑洞的质量有关，还与黑洞的电荷有关. 由(23)式可得出极端 Reissner-Nordström 黑洞的辐射功率为零.

对距 Reissner-Nordström 黑洞遥远的观测者来说，可将黑洞视为热质点，设黑洞与观测者之间的距离为 r，观测者所接收到的辐射能通量为

$$M_{\mathrm{r}}^{(\mathrm{D})} = \frac{7\hbar c^2\left[\left(\frac{Gm}{c^2}\right)^2 - \frac{GQ^2}{c^4}\right]}{1920\pi^2\eta^2 r^2\left[\frac{Gm}{c^2} + \sqrt{\left(\frac{Gm}{c^2}\right)^2 - \frac{GQ^2}{c^4}}\right]^2}. \tag{24}$$

计算结果表明，黑洞的辐射能通量与黑洞的质量和电荷有关，当 η, m, Q 取定后，黑洞的辐射能通量与观测者到黑洞之间的距离的平方成反比.

3. 结　论

提出辐射场的热质点模型,利用该模型对静态球对称黑洞的辐射规律进行了研究,计算结果表明,当 η 取固有厚度时,对所有 Schwarzschild 黑洞,其辐射功率都相同,与黑洞的质量和视界温度无关.其视界处的辐射能通量与黑洞的质量的平方成反比.距黑洞遥远的观察者所接收到的辐射能通量与观测者到黑洞的距离的平方成反比;Reissner-Nordström 黑洞视界处的辐射能通量和辐射功率不仅与黑的质量有关,还与黑洞的电荷有关,表明黑洞周围的引力场和电磁场将影响黑洞的热辐射.距黑洞遥远的观察者所接收到的辐射能通量与黑洞的质量和电荷有关,当 η, m, Q 取定后,黑洞的辐射能通量与观测者到黑洞之间的距离的平方成反比;对于极端 Reissner-Nordström 黑洞,其辐射功率和辐射能通量为零.由于 η 与 ε 和 δ 有关,可见,薄膜 brick-wall 模型虽给出了更多的黑洞热性质,但截断因子不能避免.本文给出了一种研究黑洞热辐射且与天文观测能更好地相联系的新方法.

[1] Hawking S W 1974 *Nature* **248** 30

[2] Hawking S W 1975 *Commun. Math. Phys.* **43** 199

[3] Zhao Z 1999 *Black Hole Thermodynamics and Singularity of Spacetime* (Beijing: Beijing Nomal University Press) p70 (in Chinese) [赵　峥 1999 黑洞的热性质与时空的奇异性(北京:北京师范大学出版社)第 70 页)]

[4] Hawking S W 2005 *Phys. Rev.* D **72** 084013

[5] Parikh M K, Wilczek F 2000 *Phys. Rev. Lett.* **85** 5024

[6] Zhang J Y, Zhao Z 2005 *Phys. Lett.* B **618** 14

[7] Han Y W 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 5018 (in Chinese) [韩亦文 2005 物理学报 **54** 5018]

[8] Zhang J Y, Zhao Z 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3796 (in Chinese) [张靖仪、赵　峥 2006 物理学报 **55** 3796]

[9] Ren J, Cao J L, Zhao Z 2006 *Chin. Phys.* **15** 2256

[10] Jiang Q Q, Yang S Z, Wu S Q 2006 *Chin. Phys.* **15** 2523

[11] Meng Q M, Su J Q, Jiang J J 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 3723 (in Chinese) [孟庆苗、苏九清、蒋继建 2007 物理学报 **56** 3723]

[12] Chen D Y, Jiang Q Q, Li H L, Yang S Z 2006 *Chin. Phys.* **15** 1425

[13] Han Y W 2007 *Chin. Phys.* **16** 923

[14] He T M, Fan J H, Wang Y J 2008 *Chin. Phys.* B **17** 2321

[15] Liu W B 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 6164 (in Chinese) [刘文彪 2007 物理学报 **56** 6164]

[16] Zhao R, Zhang L C, Li H F 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 7463 (in Chinese) [赵　仁、张丽春、李怀繁 2008 物理学报 **57** 7463]

[17] Yang S Z, Chen D Y 2008 *Chin. Phys.* B **17** 817

[18] Meng Q M 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 2102 (in Chinese) [孟庆苗 2003 物理学报 **52** 2102]

[19] Meng Q M 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 471 (in Chinese) [孟庆苗 2005 物理学报 **54** 471]

[20] Meng Q M, Su J Q, Jiang J J 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 5077 (in Chinese) [孟庆苗、苏九清、蒋继建 2007 物理学报 **56** 5077]

[21] Meng Q M, Jiang J J 2008 *Sic. China* G **38** 171 (in Chinese) [孟庆苗、蒋继建 2008 中国科学 G **38** 171]

[22] Meng Q M, Wang S, Jiang J J, Deng D L 2008 *Chin. Phys.* B **17** 2811

[23] Meng Q M, Jiang J J, Liu J L, Deng D L 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 78 (in Chinese) [孟庆苗、蒋继建、刘景伦、邓德力 2009 物理学报 **58** 78]

[24] Jiang J J, Meng Q M, Wang S 2009 *Chin. Phys.* B **18** 457

[25] Li C A, Meng Q M, Su J Q 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1897 (in Chinese) [李传安、孟庆苗、苏九清 2002 物理学报 **51** 1897]

[26] 't Hooft G 1985 *Nucl. Phys.* B **256** 727

Thermal particles model and radiation power of static spherically symmetric black holes *

Meng Qing-Miao† Jiang Ji-Jian Wang Shuai

(*Department of Physics*, *Heze University*, *Heze* 274015, *China*)

(Received 27 February 2009; revised manuscript received 18 March 2009)

Abstract

Using the thermal particles model of the static spherically symmetric black holes, the thermal radiation laws of the black hole are studied. When η takes the value of inherent thickness, the following results can be obtained. For all Schwarzschild black holes, the radiation power are the same, and the radiation energy flux on the event horizon is inversely proportional to the square of the black hole mass. While the radiation energy flux received by the observer far away from the black hole is inversely proportional to the square of the distance between the observer and the black hole. For Reissner-Nordström black holes, the radiation energy flux and the radiation power on the event horizon are not only related to the black hole mass, but also the charge of black holes. For fixed values of η, m and Q, the radiation energy flux received by the observer is also inversely proportional to the square of the distance between the observer and the black hole. For extreme Reissner-Nordström black holes, the radiation energy flux and the radiation power are all equal to zero.

Keywords: static spherically symmetric black hole, thermal particle model, radiation power, radiation energy flux

PACC: 0420, 9760L

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10773002) and by the Technology Planning Project of Education Bureau of Shandong Province, China (Grant No. J07WJ49).

† E-mail: mengqingmiao@yahoo.com.cn