

推广恒 Lyapunov 指数谱混沌系统及其演变研究^{*}

李春彪^{1)†} 王翰康²⁾

1) 江苏经贸职业技术学院工程技术学院, 南京 210007)

2) (江苏省食品安全工程技术研究开发中心电源与系统部, 南京 210007)

(2008 年 11 月 26 日收到, 2009 年 3 月 30 日收到修改稿)

基于恒 Lyapunov 指数谱改进系统, 通过在系统方程中添加线性项与常数项, 实现了恒 Lyapunov 指数谱混沌系统的推广. 首先结合 Lyapunov 指数谱、分岔图和状态变量幅值演变的数值仿真, 揭示了该系统的动力学行为; 接着通过组合不同的线性项, 从推广系统演变得到一族性质类似而又相轨不同的子系统, 并分析了各个子系统的平衡点、特征值与 Lyapunov 指数等动力学特征, 最后, 指出该系统在混沌雷达、保密通信和其他信息处理系统中具有广阔的应用前景.

关键词: 推广混沌系统, Lyapunov 指数谱, 演变, 子系统

PACC: 0545

1. 引 言

混沌作为一种复杂的非线性现象, 过去几十年来在科学及工程应用等领域得到了极大的关注. 常见的 Lorenz 系统^[1,2], Rössler 系统^[3], Chen 系统^[4], Lü 系统^[5-7], 及其他新的混沌系统^[8-11], 它们的混沌特性往往对于系统参数非常敏感, 参数的变化与误差使得系统的动力学特性发生变化, 相应的系统相轨将趋于不动点, 或在周期、拟周期以及混沌振荡中演变. Li 等在 Colpitts 系统的基础上, 提出了一种恒 Lyapunov 指数谱混沌系统^[12,13], 通过起分段线性作用的绝对值项来实现非线性化. 分析发现^[12,13], 该分段线性类 Colpitts 混沌系统的动力学行为可以不受其中常数项和部分系数参数的影响, 系统相对于它们呈现鲁棒混沌特性, 且在参数演变时系统保持恒定的 Lyapunov 指数谱.

混沌信号应用于雷达与通信系统已经成为较为活跃的研究领域^[14-17], 要进一步扩大混沌系统在实际工程中的应用, 往往需要进行电路实现研究与同步研究^[18-28], 同时也要考虑实现的混沌系统具有一定的混沌鲁棒性, 能够在比较宽的参数范围内保持混沌状态. 此外, 在基于混沌信号的工程应用中, 往往需要对混沌信号的幅值进行一定程度的放大、缩

小, 有些场合则需要对混沌信号进行反相放大或者缩小, 倘若使用额外的硬件来完成这些放大或者衰减作用, 需要较大的成本. 混沌信号的宽频特性, 又使得宽带滤波器的设计也非易事. 混沌系统对于初始值与系统参数呈现敏感性, 在使用混沌信号过程中, 多引入的电路元件或者附加系统往往会引入信号的失真与变形. Li 等提出的分段线性类 Colpitts 混沌系统^[12,13]在状态变量幅值线性可调的同时, 系统保持同样的混沌吸引子与 Lyapunov 指数谱, 对于改进系统^[13]也可通过对某个系数参数极性与大小的调整实现对某个状态变量的倒相放大或者衰减. 此类混沌系统的混沌鲁棒特性、输出信号幅值同相与反相可调特性在很大程度上满足了工程应用的要求.

本文将 Li 等提出的这一类恒 Lyapunov 指数谱混沌系统^[12,13]进行进一步推广, 通过在系统方程中添加线性项、常数项, 得到一个具有恒 Lyapunov 指数谱混沌特性的系统通式(后面简称推广系统). 从该系统通式出发, 选择不同的线性项与常数项组合, 可以演变得到一族性质类似而动力学行为有别的混沌子系统(故也可称推广系统为母系统). 提出的推广恒指数谱混沌系统, 具有如下优点与意义: 1) 借助于开关的切换选择作用, 可以将推广母系统演变为其他包含不同数量常数项与线性项的精简子系统,

^{*} 江苏省“青蓝工程”资助的课题.

[†] E-mail: goontry@126.com.

从而实现一个系统多种演变. 2) 子系统相轨由于引入线性项、常数项而产生变异, 呈现出混沌吸引子的多样性, 因而, 推广系统具有更丰富的动力学行为. 3) 推广母系统中多引入的线性项与常数项, 在电路实现时, 只要增加电阻、开关与供电电源, 无需更多的硬件资源, 且子系统具有吸引子变异性、幅值可调性以及可倒相等特性, 这些使得推广系统更加便于灵活使用. 4) 推广系统中的线性项有负反馈, 也有正反馈. 负反馈起稳定系统的作用, 而正反馈则扩大了系统相轨的跌宕区间, 致使推广系统能够延伸出新的恒指数谱混沌系统. 推广恒指数谱系统在混沌雷达与保密通信等信息工程应用领域必将具有重要的研究价值与广泛的应用前景.

2. 恒 Lyapunov 指数谱混沌系统的推广

文献 [13] 提出一种改进型的恒 Lyapunov 指数谱混沌系统

$$\begin{cases} \dot{x} = az - c|y| + d, \\ \dot{y} = az, \\ \dot{z} = -\frac{1}{2a}x - \frac{1}{2a}y - bz, \end{cases} \quad (1)$$

并指出, 全局线性调幅参数 d 在线性调整系统状态变量幅值的同时, 而系统的 Lyapunov 指数谱保持恒定. 出现这一现象的根本原因是由于该系统所呈现的线性化特征. 分析研究发现, 上述系统方程仅仅含有一个绝对值非线性项, 而绝对值项的作用又可以转化为两个一次线性项的作用. 因此, 系统状态变量幅值的变化就转变为常数项控制器 d 的尺度变换; 同时, 这一常数 d 不在线性化系统所得 Jacobi 矩阵中出现^[13], 故其变化不会波及到系统动力学行为性质的改变, 系统的 Lyapunov 指数谱将维持在某一恒定的水平. 根据这一分析, 可以推断, 在该系统中填充线性项或者常数项, 一定可以得到性质类似的一族混沌系统. 为此, 补齐系统方程每一维的状态反馈项, 在每一维增加合适的线性项与常数项, 得到如下系统:

$$\begin{cases} \dot{x} = gx + hy + az - c|y| + d, \\ \dot{y} = mx + ny + az - k_1 d, \\ \dot{z} = -\frac{1}{2a}x - \frac{1}{2a}y - bz - k_2 d, \end{cases} \quad (2)$$

当 (g, h, m, n, k_1, k_2) 取零向量或者取其他不同的向量, 将得到一族恒 Lyapunov 指数谱混沌系统. 特别地, 当 $g = h = m = n = k_1 = k_2 = 0$ 时, 系统就是

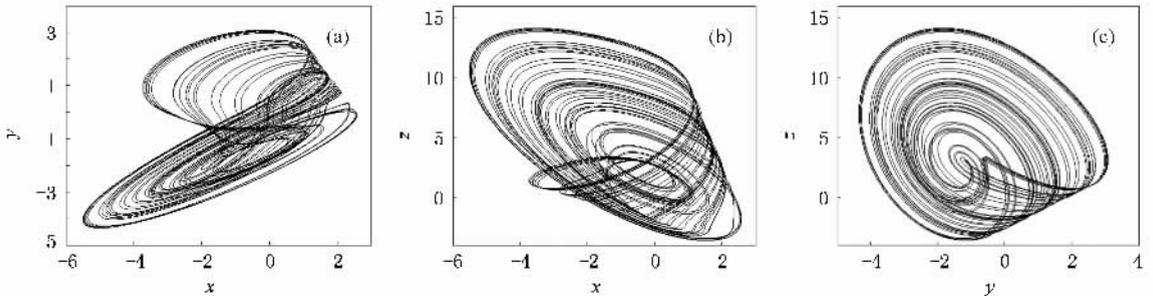


图1 奇怪吸引子在相平面上的投影 (a) x - y 平面 (b) x - z 平面 (c) y - z 平面

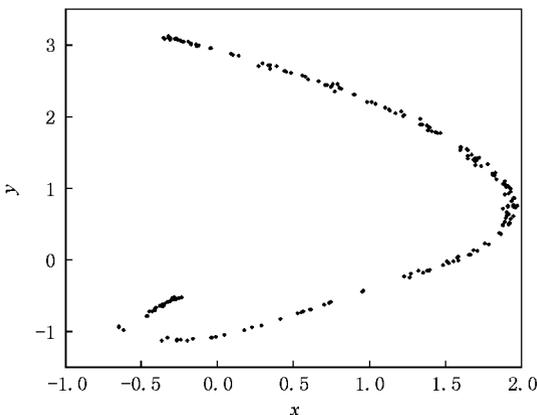


图2 在 $z=3$ 截面上的 Poincaré 映射

文献 [13] 提出的改进型恒 Lyapunov 指数谱混沌系统; 当 $a = 0.4$, $b = 0.4$, $c = 1.62$, $d = 1$, $g = -0.05$, $h = -0.25$, $m = 0.4$, $n = -0.05$, $k_1 = k_2 = 1$, 系统 (2) 同样呈现混沌状态, 其混沌吸引子如图 1 所示, Poincaré 映射如图 2 所示, 信号及其功率谱如图 3 所示. 利用 Jacobi 方法计算其 Lyapunov 指数为 $LE_1 = 0.076$, $LE_2 = 0$, $LE_3 = -0.576$, Lyapunov 维数为 $d_L = 2.132$, 证明该系统的维数为分数维数. 从系统相轨迹图、Poincaré 映射、频谱图以及系统的 Lyapunov 指数及分数维, 可见当系统取上述参数时, 该系统为混沌系统.

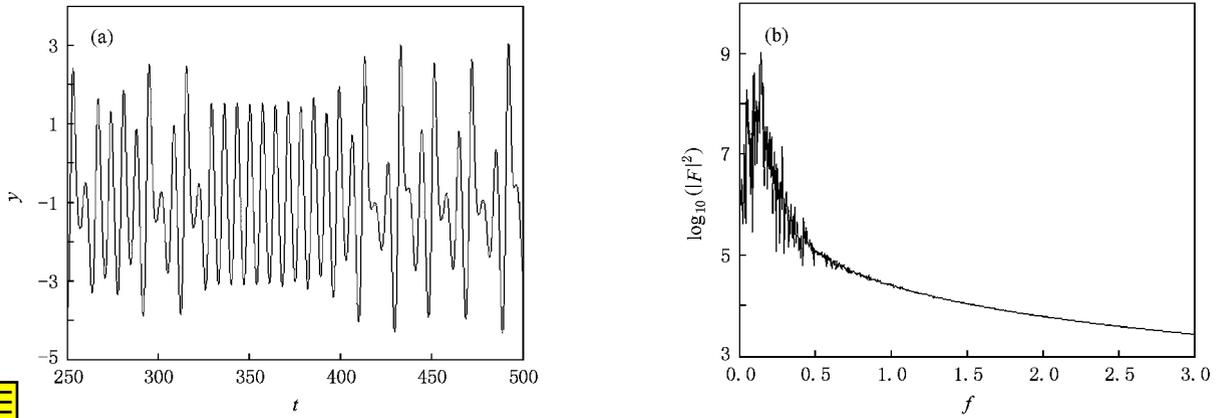


图3 系统输出信号及其功率谱 (a)输出信号 $y(t)$; (b)信号 $y(t)$ 的功率谱

3. 推广混沌系统动力学行为分析

3.1. 基本动力学特性分析

推广恒 Lyapunov 指数谱混沌系统(2)存在 $\nabla V =$

$\frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{z}}{\partial z} = g + n - b$, 因此, 当 $g + n - b < 0$ 时, 系统(2)是耗散的. 系统(2)的平衡点为

$$S_1 = (x_1, y_1, z_1), S_2 = (x_2, y_2, z_2),$$

其中

$$x_1 = \frac{d(p_1 - 2bck_1 - 2ack_2)}{p_3 + c - 2bcm},$$

$$y_1 = \frac{dp_2}{p_3 + c - 2bcm},$$

$$z_1 = -\frac{d(p_4 - 2ack_2)}{d(p_3 + c - 2bcm)},$$

$$x_2 = \frac{d(p_1 + 2bck_1 + 2ack_2)}{p_3 - c + 2bcm},$$

$$y_2 = \frac{dp_2}{p_3 - c + 2bcm},$$

$$z_2 = -\frac{d(p_4 + ck_1 + 2ack_2)}{d(p_3 - c + 2bcm)},$$

$$p_1 = 1 + k_1 - 2bhk_1 - 2bn - 2ahk_2 + 2ank_2,$$

$$p_2 = 2gbk_1 + 2ak_2(g - m) - k_1 - 1 + 2mb,$$

$$p_3 = m + h - n - g + 2b(gn - hm),$$

$$p_4 = m - n + (g - h)k_1 + 2ak_2(gn - hm).$$

系统在平衡点处线性化 Jacobi 矩阵为

$$J_{S_{1,2}} = \begin{bmatrix} g & h - c \operatorname{sgn}(y) & a \\ m & n & a \\ -1/2a & -1/2a & -b \end{bmatrix}_{S_{1,2}}. \quad (3)$$

对于 y 坐标为正值的平衡点 P^+ , 有特征方程

$$\lambda^3 + a\lambda^2 + (\beta + mc)\lambda + \gamma = 0. \quad (4)$$

对于 y 坐标为负值的平衡点 P^- , 有特征方程

$$\lambda^3 + a\lambda^2 + (\beta - mc)\lambda + \eta = 0. \quad (5)$$

这里

$$\alpha = b - g - n,$$

$$\beta = gn - mh - bg - bn + 1,$$

$$\gamma = bgn + bcm - bhm + \frac{h + m - c - g - n}{2},$$

$$\eta = bgn - bcm - bhm + \frac{h + m + c - g - n}{2}.$$

当 $a = 0.4, b = 0.4, c = 1.62, d = 1, g = -0.05, h = -0.25, m = 0.4, n = -0.05, k_1 = k_2 = 1$ 时, 系统的两个平衡点为 $P^+(-6.4865, 2.7027, 9.3243)$, $P^-(-0.1339, -1.4509, 2.4526)$. 在平衡点处对系统(2)进行线性化得到 Jacobi 矩阵, 即

$$J_e = \begin{bmatrix} -0.05 & -0.25 - 1.62e_{1,2} & 0.4 \\ 0.4 & -0.05 & 0.4 \\ -1.25 & -1.25 & -0.4 \end{bmatrix}. \quad (6)$$

这里 $e_1 = 1; e_2 = -1$. 将平衡点 $P^+(-6.4865, 2.7027, 9.3243)$ 代入, 得到对应的特征根为 $\lambda_1 = -0.3497 + 1.3445i, \lambda_2 = -0.3497 - 1.3445i, \lambda_3 = 0.1994$. 这里为 λ_3 正实根, 而 λ_1 和 λ_2 是一对具有负实部的共轭复根, 平衡点 $P^+(-6.4865, 2.7027, 9.3243)$ 是不稳定的, 为三维空间中的一个鞍点. 将平衡点 $P^-(-0.1339, -1.4509, 2.4526)$ 代入, 得到所对应的特征根为 $\lambda_1 = 0.1867 + 0.8865i, \lambda_2 = 0.1867 - 0.8865i, \lambda_3 = -0.8734$. 这里 λ_3 为负实根, 而 λ_1 和 λ_2 是一对具有正实部的共轭复根, 平衡点 $P^-(-0.1339, -1.4509, 2.4526)$ 也是不稳定的,

是鞍焦点.

3.2. 恒 Lyapunov 指数谱、调幅与倒相性能分析

3.2.1. 恒 Lyapunov 指数谱性能分析

从(4),(5)两式可以看出, k_1, k_2, d, a 皆与特征值的取值无关,因此,它们也与系统的 Lyapunov 指数的取值无关,系统相对于它们皆呈现恒 Lyapunov 指数谱特性.在系统初始值设定为(0,0,0)时,固定参数 $b = 0.4, c = 1.62, g = -0.05, h = -0.25, m = 0.4, n = -0.05, k_1 = 1$ 不变,设置 $k_2 = 1, a = 0.4$, 改变常数项控制器增益 d 时的 Lyapunov 指数谱如图 4(a)所示;设置 $k_2 = 1, d = 1$, 改变系数参数 a 时的 Lyapunov 指数谱,如图 4(b)所示;设置 $k_2 = 0, d = 1$, 改变系数参数 a 时的 Lyapunov 指数谱,如图 4(c)所示;考虑到在系统方

程第三维无常数项时,系数参数 a 同样能够在负值区间上演变,而系统呈现鲁棒的混沌状态,故设置 $k_2 = 0, d = 1$, 在负值区间上改变系数参数 a , 此时得到 Lyapunov 指数谱,如图 4(d)所示.由图 4(a)可见,当常数项控制器增益 d 从小到大调整时,推广系统(2)一直处于混沌状态,且系统的 Lyapunov 指数谱趋于恒定值,都是 $LE_1 = 0.076, LE_2 = 0, LE_3 = -0.576$;由图 4(b),(c),(d)可见,对于系数参数 a 从小到大调整时,无论是在第三维有常数项还是无常数项(图 4(b),(c))无论是在正区间上演变还是在负区间(此时第三维无常数项)上演变(图 4(c),(d))推广系统(2)也同样处于混沌状态,系统的 Lyapunov 指数谱围绕在上述恒定的水平值附近波动.数值仿真实验证明了上述理论分析的正确性.

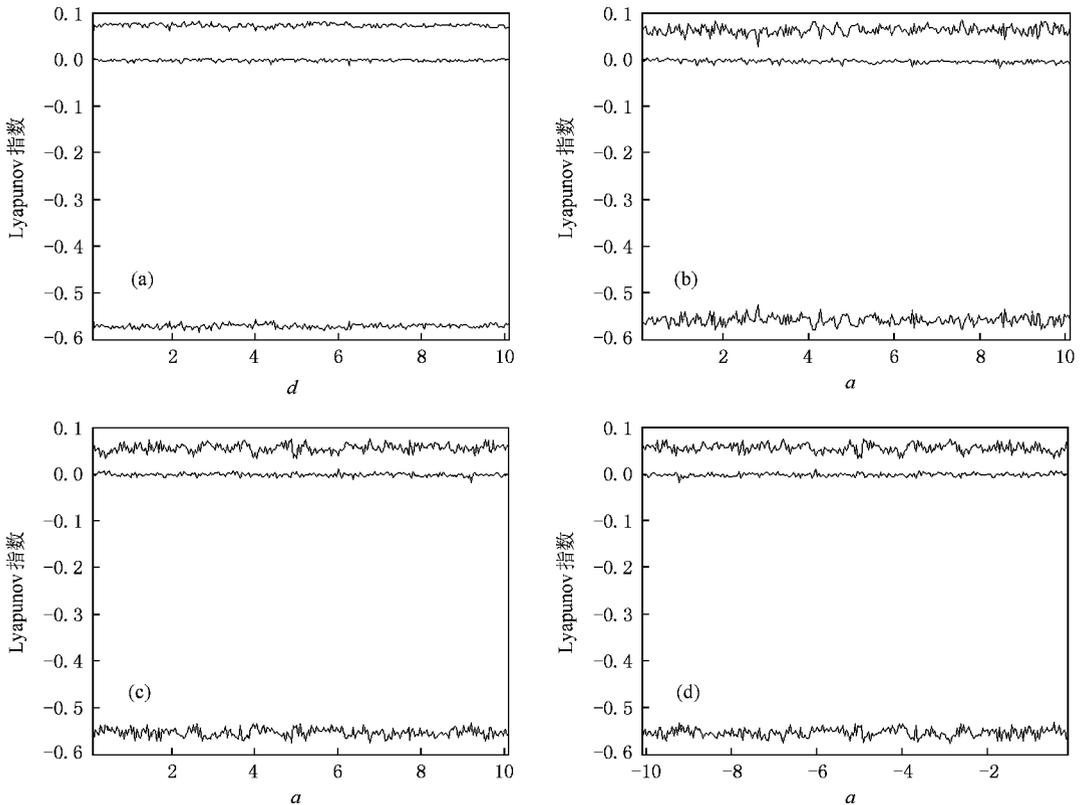


图4 推广系统(2)的 Lyapunov 指数谱 (a) $k_2 = 1, a = 0.4$, 考察区间 $d \in [0.1, 10.1]$; (b) $k_2 = 1, d = 1$, 考察区间 $a \in [0.1, 10.1]$; (c) $k_2 = 0, d = 1$, 考察区间 $a \in [0.1, 10.1]$; (d) $k_2 = 0, d = 1$, 考察区间 $a \in [-10.1, -0.1]$

图 4 的 Lyapunov 指数谱也显示,在实际数值仿真计算中,系数参数 a 变化时的 Lyapunov 指数谱,其波动性要比常数项控制器增益 d 变化时的 Lyapunov 指数谱要大,这是由于:1)系数参数 a 及其倒数充当了系统微分方程的四个线性项的系数,而

常数项控制器增益 d 仅仅存在于微分方程的三个常数项中,前者会导致对计算精度带来的误差与波动的较大程度的积累.2)本文后面的系统参数对状态变量幅值影响的进一步研究表明,常数项控制器增益 d 的变化导致了系统三个状态变量幅值的同

比例线性变化,而系数参数 a 变化导致了系统状态变量 z 幅值的非线性变化,轨线的大幅度的非线性变化加剧了系统初始值的选取对 Lyapunov 指数计算的影响;同时,状态变量幅值的非线性变化会在刻画系统相邻轨线聚合或者分离平均速率的 Lyapunov 指数分析中引入更大的噪声或者波动.但这些噪声或者波动,都是来自于计算过程,且是围绕一个固定值的上下波动,不会出现严重的偏离,也不会影响前面关于指数谱恒定的结论.

3.2.2. 调幅性能分析

对推广系统(2)作线性变换,令 $x = kx^*$, $y = ky^*$, $z = kz^*$,于是推广系统就变成如下形式:

$$\dot{x}^* = gx^* + hy^* + az^* - c|y^*| + d/k,$$

$$\begin{aligned} \dot{y}^* &= mx^* + ny^* + az^* - k_1 d/k, \\ \dot{z}^* &= -\frac{1}{2a}x^* - \frac{1}{2a}y^* - bz^* - k_2 d/k, \end{aligned} \quad (7)$$

从(7)式容易看出,推广系统输出的三个状态变量的线性调整对应于常数项控制器增益 d 的尺度变化.因此,推广系统的常数项 d 能够线性调整系统状态变量的幅值,也就是推广系统仍然存在全局线性调幅参数 d .固定参数 $b = 0.4$, $c = 1.62$, $g = -0.05$, $h = -0.25$, $m = 0.4$, $n = -0.05$, $k_1 = 1$ 不变,设置 $k_2 = 1$, $a = 0.4$,改变常数项控制器增益 d 时的分岔图、信号幅值变化情况曲线如图 5(a)–(c)所示,证明了常数项控制器增益 d 的全局线性调幅作用.

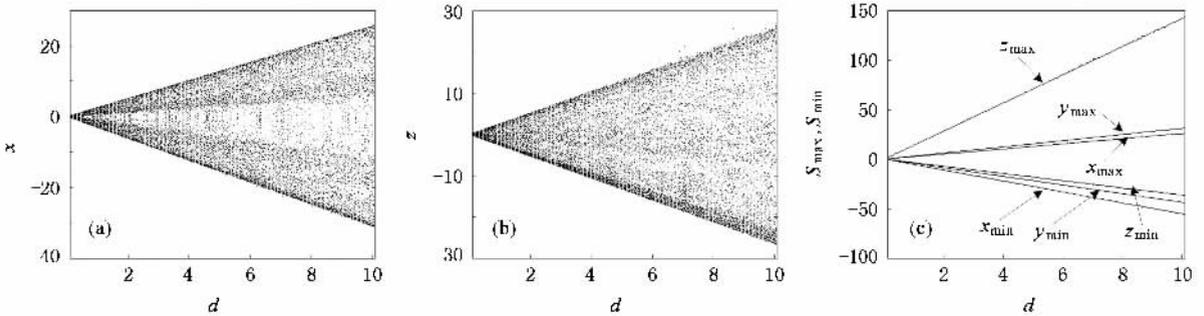


图 5 推广系统(2)在参数 d 变化时的信号幅度变化情况, $k_2 = 1$, $a = 0.4$,考察区间为 $d \in [0.1, 10.1]$ (a) x - d 分岔图(Poincaré 截面为 $y = 0$);(b) z - d 分岔图(Poincaré 截面为 $y = 0$);(c) 参数 d 变化下的信号幅值变化曲线

同样分析系数参数 a 变化时的分岔图、信号幅值变化情况,如图 6—8 所示.可见,在设置 $k_2 = 1$, $d = 1$ 时,如图 6 所示,推广系统中的系数参数 a 变化时,系统输出信号幅值的变化情况,有别于原恒指数谱混沌系统^[12]和改进恒指数谱混沌系统^[13].在推广系统(2)中,系数参数 a 的变化,能线性调整系统输出信号中的 x , y (这一点同原恒指数谱混沌系

统^[12]),而系统状态变量 z 所对应的信号幅值由于受到 a 的作用而发生非线性变化(同改进恒指数谱混沌系统^[13]).因此,推广系统中的系数参数 a 演变为全局调幅参数,这里的调幅既有线性调幅(针对 x , y 信号的调幅),也有非线性调幅(针对 z 信号的调幅)这种全局调幅作用不同于全局线性调幅参数 d 针对全部状态变量幅度的等比例线性调整.

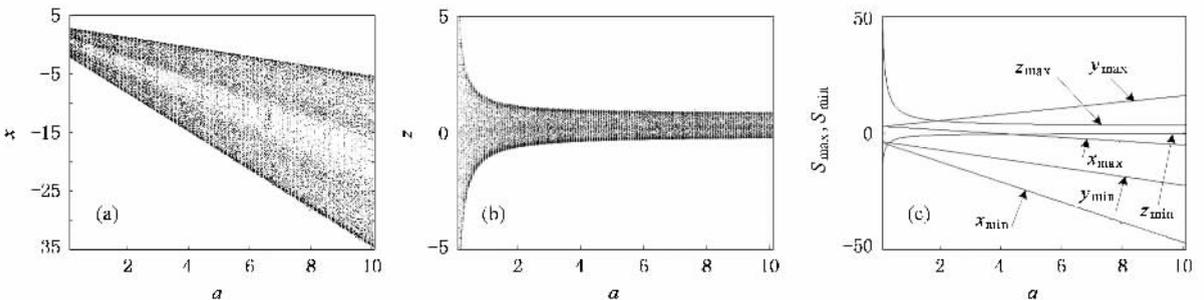


图 6 推广系统(2)在参数 a 变化时信号幅度变化情况, $k_2 = 1$, $d = 1$,考察区间为 $a \in [0.1, 10.1]$ (a) x - a 分岔图(Poincaré 截面为 $y = 0$);(b) z - a 分岔图(Poincaré 截面为 $y = 0$);(c) 参数 a 变化下的信号幅值变化曲线

在推广系统的状态方程(2)中,去掉第三维中的常数项控制器,系数参数 a 就能够在负值区间上大大幅度地演变,而系统保持恒 Lyapunov 指数谱特性(图4(d)).因此,设置 $k_2 = 0, d = 1$,使系数参数 a 在正负值区间上演变,从而得到系数参数 a 变化时

的分岔图、信号幅值变化情况,分别如图7,8所示.比较发现,当推广系统去掉第三维中的常数项控制器时,系数参数 a 的调幅作用将完全与改进系统^[13]相同.注意到推广系统微分方程的第三个等式,在有常数项控制器 $-k_2 d$ 时,为

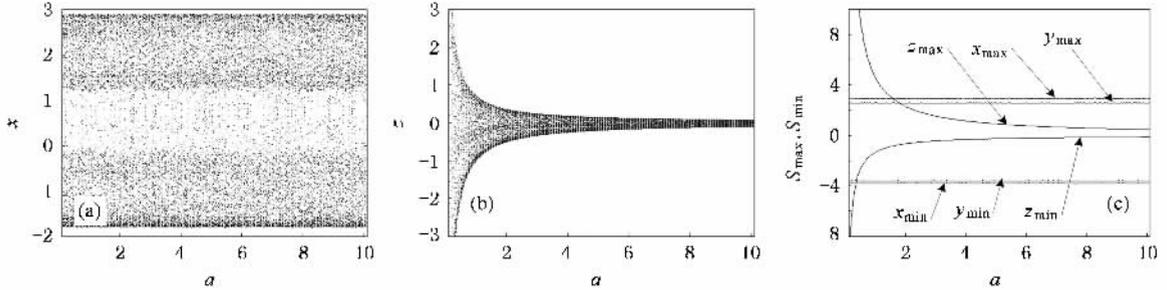


图7 推广系统(2)在参数 a 变化时的信号幅度变化情况, $k_2 = 0, d = 1$,考察区间为 $a \in [0.1, 10.1]$ (a) x - a 分岔图(Poincaré 截面为 $y = 0$);(b) z - a 分岔图(Poincaré 截面为 $y = 0$);(c)参数 a 变化下的信号幅值变化曲线

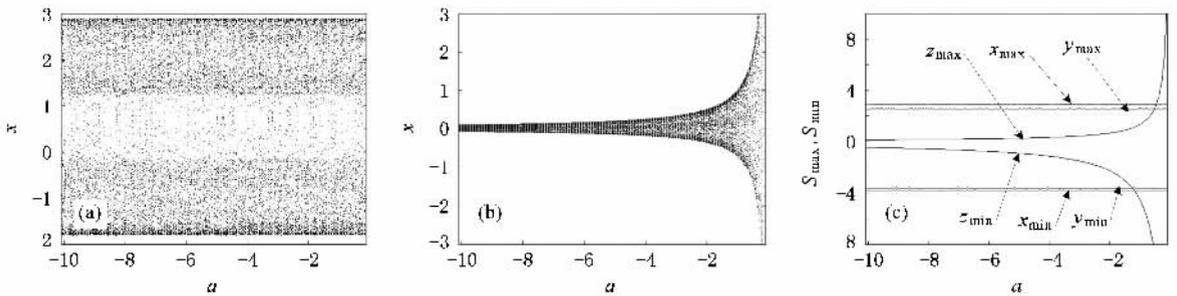


图8 推广系统(2)在参数 a 变化时的信号幅度变化情况, $k_2 = 0, d = 1$,考察区间为 $a \in [-10.1, -0.1]$ (a) x - a 分岔图(Poincaré 截面为 $y = 0$);(b) z - a 分岔图(Poincaré 截面为 $y = 0$);(c)参数 a 变化下的信号幅值变化曲线

$$\dot{z} = -\frac{1}{2a}x - \frac{1}{2a}y - bz - k_2 d, \quad (8)$$

将方程右边处于分母的系数参数 a 移到分子的位置,故有

$$az = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y - abz - k_2 ad, \quad (9)$$

可见,在等式(9)的右边产生了系数参数 a 与常数项控制器增益 d 的耦合交叉项,因此在推广系统第三维包含常数项控制器时,系数参数 a 由于交叉耦合了常数项控制器 d 而附加了调整系统状态变量幅值的作用,推广系统第三维中的常数项控制器对系数参数 a 的调幅性能的影响其本质原因就在于此.

实际上,当全局线性调幅参数 d 与调幅参数 a 在更大正区间上变化时,系统输出信号 x, y, z 的变化趋势与规律,与给出的分岔图与信号幅值演变图是一致的.也就是随着全局线性调幅参数 d 的进一步增大,系统输出信号的幅值会依然线性增加(图

5),而 Lyapunov 指数谱保持恒定(图4(a));同样,当调幅参数 a 进一步增大,系统输出信号中的两维信号 x, y 的幅值将依然线性变化,而第三维信号 z 的幅值将进一步非线性减小(图6),与此同时, Lyapunov 指数谱也保持恒定(图4(b)).这一点可以很容易地从数值仿真实验中得到证明.

3.2.3. 倒相性能分析

推广系统(2)在 $k_2 = 0$ 时,仍然可以作变换 $(x, y, z, a, b, c, d, g, h, m, n, k_1, k_2) \rightarrow (x, y, -z, -a, b, c, d, g, h, m, n, k_1, k_2)$,而系统具有不变性,所以推广系统(2)在 $k_2 = 0$ 时的输出信号 z 将随着系数参数 a 的极性的改变而改变.在 $k_2 \neq 0$ 时,不存在上述变换.因此,调幅参数 a 对于推广系统输出的 z 信号的倒相作用要作具体分析.

当 $k_2 \neq 0$ 时,虽然 a 的极性改变也能改变 z 信号的相位,但是这种改变不是通常所说的倒相,如图

$\alpha(a), (b)$ 与图 10(a)所示. 图 $\alpha(b)$ 吸引子与图 $\alpha(a)$ 吸引子相比, 虽然在 z 方向作了一个相位的改变(表现为吸引子的大头下沉), 但是同时, 吸引子的大小也有所变化. 吸引子在 x 与 z 方向的坐标范围发生

了改变. 图 10(a) 则直接显示出了 z 信号移相又变幅的效果. 实际上, 这种相位与幅度的同时变化是因为 $k_2 \neq 0$ 时, 存在一个系数参数 a 的耦合交叉项 $-k_2 ad$, 这将对系统相轨施加幅度上的影响.

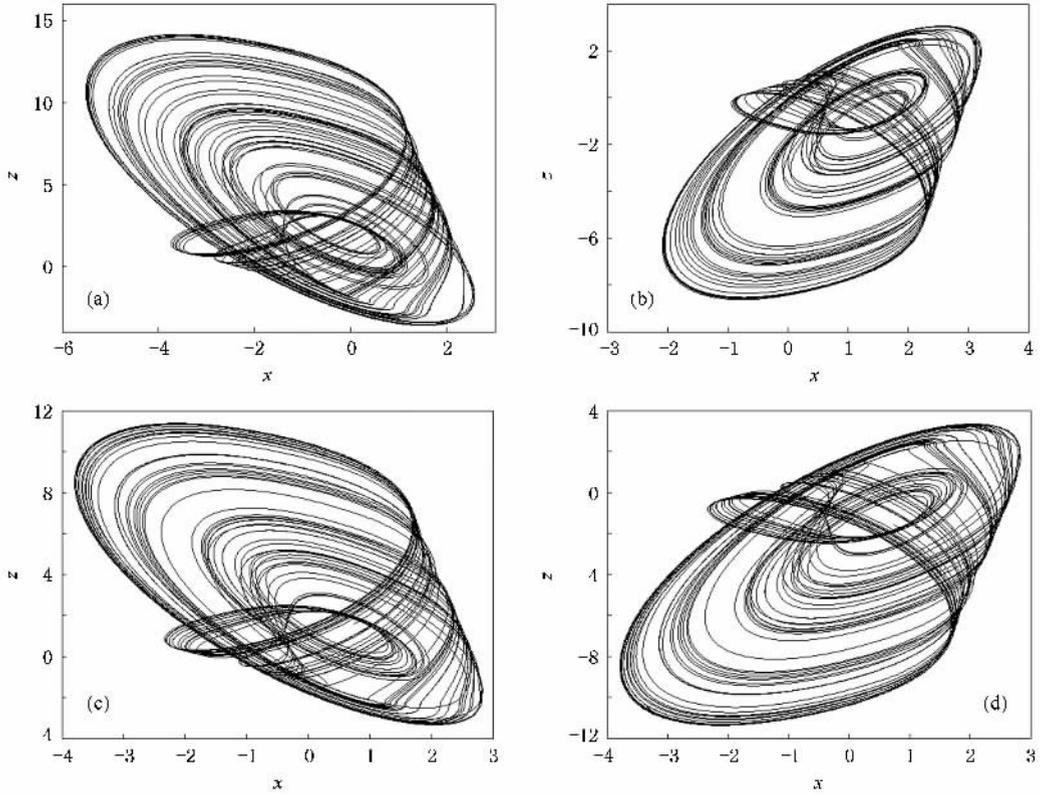


图 9 $b = 0.4, c = 1.62, d = 1, g = -0.05, h = -0.25, m = 0.4, n = -0.05, k_1 = 1$ 时, 推广系统 2 的奇怪吸引子在 $x-z$ 相平面上的投影 (a) $a = 0.4, k_2 = 1$; (b) $a = -0.4, k_2 = 1$; (c) $a = 0.4, k_2 = 0$; (d) $a = -0.4, k_2 = 0$

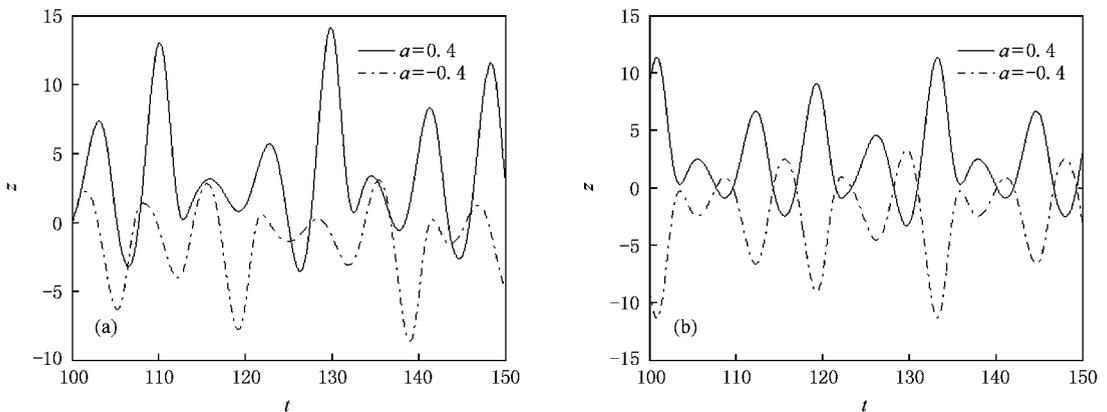


图 10 $b = 0.4, c = 1.62, d = 1, g = -0.05, h = -0.25, m = 0.4, n = -0.05, k_1 = 1$ 时, 推广系统 2 的输出信号 $z(t)$ (a) $k_2 = 1$; (b) $k_2 = 0$

当 $k_2 = 0$ 时, a 的极性改变将导致 z 信号相位的直接改变, 且这种改变仅仅是对原来 z 信号的倒

相. 图 $\alpha(d)$ 吸引子与图 $\alpha(c)$ 吸引子比较显示, 输出信号的值区间在 x 方向未发生变化, 沿 z 方向信号

只是作一个倒相. 图 $I(b)$ 则直接显示出了 z 信号被倒相的效果. 需要强调说明的是, 由于混沌系统具有初始值敏感性, 而系统的初始值又是人为强制设定, 初始值是系统振荡的起点, 因此为了观测到 a 的严格倒相作用, 需要将系统初始值设定为 $(x_0, y_0, 0)$, 或者在改变 a 的极性的同时, 将系统初始值中 z_0 的坐标也设定为原来的相反数 $-z_0$, 否则倒相作用将由于初始值 z_0 坐标的强扭作用而被遮蔽. 因此, 准确地说, 当 $k_2 = 0$ 且系统初始值坐标 z_0 极性与 a 的极性同时改变时, 系统输出状态变量 z 将被严格倒相.

3.3. 推广混沌系统的演变分析

(2) 式给出了推广恒指数谱混沌系统的数学模型, 系统方程的每一维都存在齐全的线性项与常数项. 当 $g = h = m = n = k_1 = k_2 = 0$ 时, 推广系统演变为文献 [13] 讨论的改进恒指数谱混沌系统. 在改进

恒指数谱混沌系统的基础上, 当系统系数向量 (g, h, m, n, k_1, k_2) 组合保留不同的参数时, 推广系统将演变为 63 (即 $2^6 - 1$) 个其他性质类似的子系统. 考虑到常数项不改变系统的混沌特性, 只是对信号的幅值给以调整, 为不失一般性, 这里让 $k_1 = k_2 = 1$, 讨论 (g, h, m, n) 中的各个线性项组合所代表的子系统动力学行为. 令 $a = 0.4, b = 0.4, c = 1.62, d = 1, g = -0.05, h = -0.25, m = 0.4, n = -0.05$, 用二进制向量 (r_1, r_2, r_3, r_4) 对应代表系数向量 (g, h, m, n) 中每一个系数元素的有无状态, 比如当 $(r_1, r_2, r_3, r_4) = (0, 0, 0, 1)$, 表示在推广系统的微分方程中, 第一维删除了 $gx + hy$, 而第二维删除了 mx , 只是保留 ny . 二进制向量 (r_1, r_2, r_3, r_4) 有 16 种取值, 对应有 16 种子系统, 这些子系统的平衡点、Jacobi 矩阵特征值、Lyapunov 指数等, 如表 1 所示 (其中 $(r_1, r_2, r_3, r_4) = (1, 1, 1, 1)$ 时, 就是前面详细讨论的推广母系统, 因此这里没有给出).

表 1 各个子系统基本特性分析

参数状态向量 (r_1, r_2, r_3, r_4)	平衡点	特征值	Lyapunov 指数
$(0, 0, 0, 0)$	$P^+(-2.8345, 1.2346, 2.5);$ $P^-(-0.3654, -1.2346, 2.5)$	$(0.5382, -0.4691 \pm 1.1335i);$ $(-0.6803, 0.1401 \pm 1.0821i)$	$(0.083, 0, -0.482)$
$(0, 0, 0, 1)$	$P^+(-2.9248, 1.2739, 2.6592);$ $P^-(-0.3545, -1.1976, 2.3503)$	$(0.5166, -0.4833 \pm 1.1339i);$ $(-0.6992, 0.1246 \pm 1.0857i)$	$(0.052, 0, -0.502)$
$(0, 0, 1, 0)$	$P^+(-6.545, 2.8506, 9.045);$ $P^-(-0.3942, -1.3319, 2.8942)$	$(0.1985, -0.2993 \pm 1.2951i);$ $(-0.9138, 0.2569 \pm 0.8692i)$	$(0.088, 0, -0.492)$
$(0, 0, 1, 1)$	$P^+(-7.0473, 3.0694, 9.9309);$ $P^-(-0.3815, -1.2890, 2.7204)$	$(0.1827, -0.3163 \pm 1.2975i);$ $(-0.9368, 0.2434 \pm 0.8768i)$	$(0.111, 0, -0.562)$
$(0, 1, 0, 0)$	$P^+(-2.6695, 1.07, 2.5);$ $P^-(-0.1401, -1.4599, 2.5)$	$(0.5902, -0.4951 \pm 1.1573i);$ $(-0.6081, 0.1040 \pm 1.0563i)$	$(0.059, 0, -0.459)$
$(0, 1, 0, 1)$	$P^+(-2.7429, 1.099, 2.6374);$ $P^-(-0.1352, -1.4085, 2.3239)$	$(0.5689, -0.5094 \pm 1.1576i);$ $(-0.6275, 0.0888 \pm 1.06i)$	$(0, -0.217, -0.232)$
$(0, 1, 1, 0)$	$P^+(-5.7274, 2.2946, 8.2274);$ $P^-(-0.1442, -1.502, 2.6442)$	$(0.2302, -0.3151 \pm 1.3393i);$ $(-0.827, 0.2135 \pm 0.8715i)$	$(0.096, 0, -0.496)$
$(0, 1, 1, 1)$	$P^+(-6.0759, 2.4343, 8.8802);$ $P^-(-0.139, -1.4476, 2.458)$	$(0.215, -0.3325 \pm 1.3418i);$ $(-0.8503, 0.2002 \pm 0.8788i)$	$(0.081, 0, -0.533)$
$(1, 0, 0, 0)$	$P^+(-2.9248, 1.3248, 2.5);$ $P^-(-0.3545, -1.2455, 2.5)$	$(0.5166, -0.4833 \pm 1.1339i);$ $(-0.6992, 0.1245 \pm 1.0857i)$	$(0.062, 0, -0.512)$
$(1, 0, 0, 1)$	$P^+(-3.025, 1.3702, 2.6713);$ $P^-(-0.3438, -1.2079, 2.349)$	$(0.4946, -0.4973 \pm 1.1345i);$ $(-0.7181, 0.109 \pm 1.0896i)$	$(0, -0.137, -0.363)$
$(1, 0, 1, 0)$	$P^+(-7.0473, 3.1921, 9.5473);$ $P^-(-0.3815, -1.3406, 2.8815)$	$(0.1827, -0.3163 \pm 1.2975i);$ $(-0.9368, 0.2434 \pm 0.8768i)$	$(0.083, 0, -0.533)$
$(1, 0, 1, 1)$	$P^+(-7.6584, 3.469, 10.5921);$ $P^-(-0.3692, -1.2971, 2.707)$	$(0.1664, -0.3332 \pm 1.3001i);$ $(-0.9596, 0.2298 \pm 0.8847i)$	$(0.080, 0, -0.580)$
$(1, 1, 0, 0)$	$P^+(-2.7429, 1.1429, 2.5);$ $P^-(-0.1352, -1.4648, 2.5)$	$(0.5689, -0.5094 \pm 1.1576i);$ $(-0.6275, 0.0888 \pm 1.06i)$	$(0, -0.201, -0.250)$
$(1, 1, 0, 1)$	$P^+(-2.8235, 1.1765, 2.6471);$ $P^-(-0.1304, -1.413, 2.3234)$	$(0.5472, -0.5236 \pm 1.1582i);$ $(-0.647, 0.0735 \pm 1.064i)$	$(0, -0.027, -0.473)$
$(1, 1, 1, 0)$	$P^+(-6.0759, 2.5316, 8.5759);$ $P^-(-0.139, -1.5055, 2.639)$	$(0.215, -0.3325 \pm 1.3418i);$ $(-0.8503, 0.2002 \pm 0.8788i)$	$(0.100, 0, -0.550)$

从表 1 可知

1) 系统的最大 Lyapunov 指数只是在系数状态向量 (r_1, r_2, r_3, r_4) 为 $(0, 1, 0, 1)$ $(1, 0, 0, 1)$ $(1, 1, 0, 0)$ $(1, 1, 0, 1)$ 时等于零, 表明在这些情况下, 系统呈现周期状态. 也就是, 在微分方程的第二维没有引入 x 项正反馈的情况下, 在第一维与/或者第二维累计引入两个或者三个负反馈, 系统将进入周期轨道, 如图 11(b) 所示 $(r_1, r_2, r_3, r_4) = (1, 1, 0, 0)$).

2) 系统的最大 Lyapunov 指数在系数状态向量 (r_1, r_2, r_3, r_4) 为 $(0, 0, 0, 1)$ $(0, 1, 0, 0)$ $(1, 0, 0, 0)$ 时, 明显较其他情况要低, 在 0.06 左右. 可见, 在系统方程的第一维或者第二维引入一个负反馈项, 会导致系统相轨的收敛程度降低, 典型相轨如图 11(c) 所示 $(r_1, r_2, r_3, r_4) = (1, 0, 0, 0)$ 相比于没有引入任何反馈的子系统 (如图 11(a)), 吸引子的上口由于引入负反馈而被收拢.

3) 在微分方程的第二维引入 x 项正反馈的前提下, 不管在微分方程中引入几个负反馈项, 系统的最大 Lyapunov 指数都能保持在 0.08 以上, 说明第二

维包含 x 正反馈的子系统, 都处于混沌状态, 相空间中流的演化有较大程度的改变, 典型相轨如图 11(d)–(f) 所示. 对比图 11(a), 可见, 在第二维引入 x 正反馈以后, 系统的混沌吸引子的上口被撑开, 相轨有更大的跌宕区间, 微分方程中引入的负反馈项调整了吸引子上口的大小以及相轨运动所遍历到的轨道 (轨线密度不同).

4) 上述各个子系统都有两个平衡点, Jacobi 矩阵在其中一个平衡点 P^+ 处的特征值, 有一个是大于零的实数, 另两个为实部小于零的复数, 而在另外一个平衡点 P^- 处的特征值, 有一个小于零, 另两个为实部大于零的复数, 因而平衡点 P^+ 为鞍点, P^- 为鞍焦点.

5) 系数状态向量 (r_1, r_2, r_3, r_4) 在如下取值时 $(0, 0, 0, 1)$ 与 $(1, 0, 0, 0)$ $(0, 0, 1, 1)$ 与 $(1, 0, 1, 0)$ $(0, 1, 0, 1)$ 与 $(1, 1, 0, 0)$ $(0, 1, 1, 1)$ 与 $(1, 1, 1, 0)$, 各对所代表的子系统, 其平衡点与特征值相等, 说明相应的子系统对在相空间中流的演化是一致的, 而其他子系统的平衡点与特征值的大小不同, 说明在相空间中流的演化也不同.

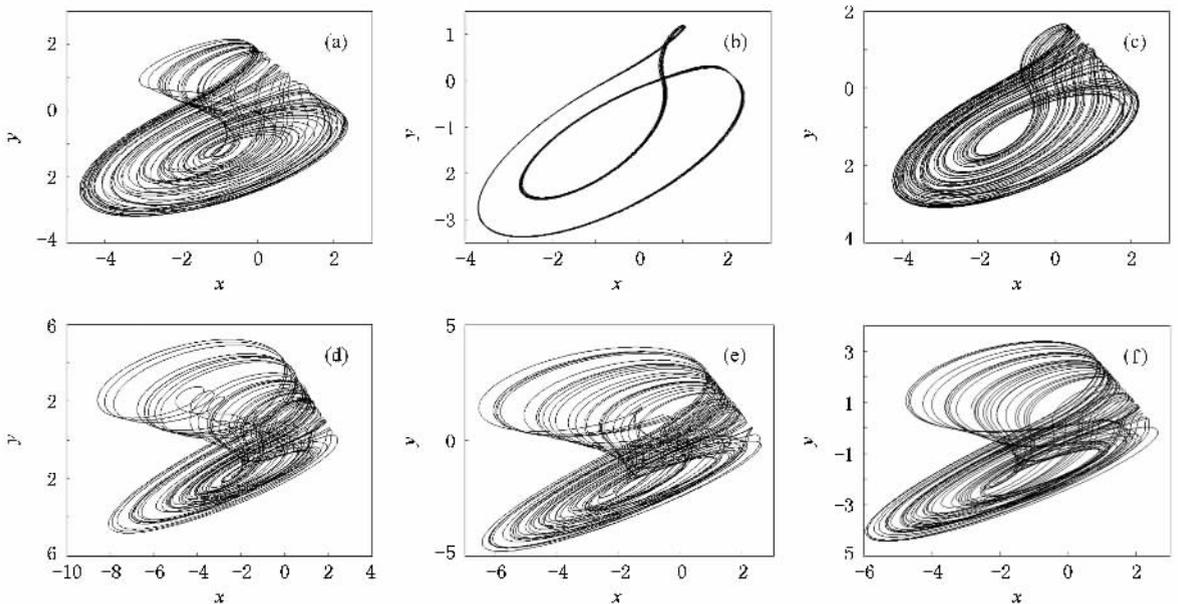


图 11 由推广系统(2)得到的子系统相轨在 $x-y$ 相平面上的投影 (a) $(0, 0, 0, 0)$; (b) $(1, 1, 0, 0)$; (c) $(1, 0, 0, 0)$; (d) $(0, 0, 1, 0)$; (e) $(0, 1, 1, 0)$; (f) $(0, 1, 1, 1)$

4. 结 论

基于改进恒 Lyapunov 指数谱混沌系统, 通过

在系统方程中添加线性项与常数项, 实现了此类混沌系统的推广. 详细分析了推广系统的恒指数谱、调幅与倒相等三个特性. 根据推广混沌系统方程, 通过不同线性项的组合, 得到了推广系统的 16 种演变, 分析了 16 种子系统的动力学行为. 推广系统的可调

幅、可倒相和保持恒指数谱的特性,以及可以灵活地演变为吸引子有较大变异性的子系统的特点,使得

该系统在混沌雷达、通信加密和其他信息处理系统中有着广阔的应用前景.

- [1] Lorenz E N 1993 *The Essence of Chaos* (Seattle, WA : University of Washington Press) 148
- [2] Stewart I 2002 *Nature* **406** 948
- [3] Rössler O E 1976 *Phys. Lett. A* **57** 397
- [4] Chen G , Ueta T 1999 *Int. J. Bifur. Chaos* **9** 1465
- [5] Lü J , Chen G 2002 *Int. J. Bifur. Chaos* **12** 659
- [6] Lü J , Chen G , Zhang S 2002 *Int. J. Bifur. Chaos* **12** 1001
- [7] Lü J , Chen G , Cheng D 2004 *Int. J. Bifur. Chaos* **14** 1507
- [8] Wang F Z , Qi G Y , Chen Z Q , Yuan Z Z 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 3137 (in Chinese) [王繁珍、齐国元、陈增强、袁著祉 2007 物理学报 **56** 3137]
- [9] Zhang J X , Tang W S , Xu Y 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 6799 (in Chinese) [张建雄、唐万生、徐 勇 2008 物理学报 **57** 6799]
- [10] Tang L R , Li J , Fan B , Zhai M Y 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 785 (in Chinese) [唐良瑞、李 静、樊 冰、翟明岳 2009 物理学报 **58** 785]
- [11] Bao B C , Li C B 2008 *Chin. Phys. B* **17** 4022
- [12] Li C B , Wang D C 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 764 (in Chinese) [李春彪、王德纯 2009 物理学报 **58** 764]
- [13] Li C B , Chen S , Zhu H Q 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 2255 (in Chinese) [李春彪、陈 谥、朱焕强 2009 物理学报 **58** 2255]
- [14] Hu W , Liu Z , Li C B 2008 *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems* **44** 367
- [15] Liu Z , Zhu X H , Hu W 2007 *Int. J. Bifur. Chaos* **17** 1735
- [16] Kennedy K G , Chua M P 2002 *IEEE Trans. Circuits Syst. I* **45** 1129
- [17] Pecora L M 1990 *Phys. Rev. Lett.* **64** 821
- [18] Carroll T L , Pecora L M 1991 *IEEE Trans. Circ. Sys.* **38** 453
- [19] Parmananda P 1998 *Phys. Lett. A* **240** 55
- [20] Jia F L , Xu W , Du L 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 5640 (in Chinese) [贾飞蕾、徐 伟、都 林 2007 物理学报 **56** 5640]
- [21] Zhang R X , Tian G , Li P , Yang S P 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 2073 (in Chinese) [张若洵、田 钢、栗 苹、杨世平 2008 物理学报 **57** 2073]
- [22] Wang X Y , Meng J 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 726 (in Chinese) [王兴元、孟 娟 2008 物理学报 **57** 726]
- [23] Li J F , Li N , Liu Y P , Gan Y 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 779 (in Chinese) [李建芬、李 农、刘宇平、甘 轶 2009 物理学报 **58** 779]
- [24] Shan L , Liang Y , Li J , Wang Z Q 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 4366 (in Chinese) [单 梁、梁 彦、李 军、王执铨 2007 物理学报 **56** 4366]
- [25] Liu Y Z , Jiang C S , Lin C S 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 707 (in Chinese) [刘扬正、姜长生、林长圣 2007 物理学报 **56** 707]
- [26] Zhang R X , Yang S P 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 6837 (in Chinese) [张若洵、杨世平 2008 物理学报 **57** 6837]
- [27] Li N , Li J F 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 6093 (in Chinese) [李 农、李建芬 2008 物理学报 **57** 6093]
- [28] Li C B , Shan L , Wang D C 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 6016 (in Chinese) [李春彪、单 梁、王德纯 2009 物理学报 **58** 6016]

An extension system with constant Lyapunov exponent spectrum and its evolvement^{*}

Li Chun-Biao^{1,2)†} Wang Han-Kang²⁾

1) (*Department of Engineering Technology , Jiangsu Institute of Economic and Trade Technology , Nanjing 210007 , China*)

2) (*Department of Electric Source and System , Research and Development Center of Food Safety Engineering Technology of Jiangsu Province , Nanjing 210007 , China*)

(Received 26 November 2008 ; revised manuscript received 30 March 2009)

Abstract

By introducing linear terms and constant terms in dynamic equations , the extension system with constant Lyapunov exponent spectrum is proposed based on the improved constant-Lyapunov-exponent-spectrum system. Firstly , the dynamical behaviour of the extension system is investigated and expounded by simulation of Lyapunov exponent spectrum , bifurcation diagram and numerical analysis on amplitude evolvement of state variables. Secondly , a class of subsystems with the same properties but different phase trajectories is obtained through different combinations of linear terms from the extension system. The dynamical characteristics including equilibrium , eigenvalue and Lyapunov exponents are analyzed in detail simultaneously. Finally , it is pointed out that the chaotic system will have a tremendous application prospect in chaotic radar , secure communications and other information processing systems .

Keywords : extension chaotic system , Lyapunov exponent spectrum , evolvement , subsystem

PACC : 0545

^{*} Project supported by the Qing Lan Project of Jiangsu Province .

[†] E-mail : goontry@126. com