

非线性耦合完全网络的时空混沌同步^{*}

敬晓丹¹⁾²⁾ 吕翎^{1)†}

1) 辽宁师范大学物理与电子技术学院, 大连 116029)

2) 辽宁工业大学数理科学系, 锦州 121001)

(2009 年 2 月 23 日收到, 2009 年 3 月 31 日收到修改稿)

利用 N 个 Fitzhugh-Nagumo 模型作为网络节点, 通过非线性耦合构成完全网络, 研究了这种网络的时空混沌同步问题. 首先给出了复杂网络中连接节点之间的非线性耦合函数的一般性选取原则. 进一步基于 Lyapunov 稳定性定理, 理论分析了实现网络同步的条件以及控制增益的取值范围. 最后, 通过仿真模拟检验了以 Fitzhugh-Nagumo 模型作为网络节点所构成的完全网络的时空混沌同步效果. 仿真结果表明, 这种完全网络不但同步快速有效, 而且网络规模的大小对网络同步稳定性的影响不敏感.

关键词: 同步, 复杂网络, 时空混沌, 非线性耦合

PACC: 0545

1. 引言

自 Watts 以及 Barabási 等提出小世界网络 (small-world network)^[1] 以及无标度网络 (scale-free network)^[2] 模型并对其特性进行了开创性的研究以来, 复杂网络的特性、网络同步的理论以及应用研究吸引了各国专家的广泛注意, 许多有价值的工作已经被报道^[3-8]. 尤其是网络同步以其应用广泛而成为物理、计算机、通信以及生命科学等领域的研究热点. Moreno 和 Kuramoto 研究了实现无标度网络全局相同步的条件^[9]; Timme 等研究了脉冲耦合动力学系统的网络整体同步规律^[10]; Checco 等完成了随机网络的同步研究^[11]; Li 和 Chen 研究了小世界网络耦合项存在延迟情况的网络同步规律^[12]; Yu 和 Cao 利用稳定性定理达到了一类随机神经网络的混沌同步^[13]; Hung 等研究了无标度网络的广义同步问题^[14]. 所有这些研究工作极大地推动了复杂网络同步研究的进程. 但在已报到的研究成果中, 复杂网络的节点基本上采用的是时间混沌系统. 而在自然界中时空混沌系统更为常见. 这种系统不仅在时间上表现为混沌行为, 而且在其空间上也具有混沌行为. 这类高维的时空混沌系统本身含有十分丰富的信息, 结构复杂, 目前人们对于这类系统特性的研究还

处于不断地探索之中. 尽管研究时空混沌系统理论分析难度大, 数值计算繁琐, 但是由于它更接近自然界的实际系统, 实用性强, 所以时空混沌系统的同步研究逐步成为迄今许多领域的前沿课题^[15-18].

Fitzhugh-Nagumo 模型是一个典型的时空混沌系统. 随着系统内部参量取值的不同, 能够呈现螺旋波、时空混沌等多种复杂丰富的动力学行为. 甚至参量数值的微小改变, 时空混沌的演化花样也会有很大差别. 对于这样一个自身非线性非常强的时空混沌系统, 我们采用比线性耦合功能更强的非线性耦合进行节点之间的相互连接构成完全网络, 研究这种网络的时空混沌同步问题. 理论分析和仿真模拟结果均显示整个网络的同步效果十分理想.

2. 网络的同步原理

对于连续的时空混沌系统

$$\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{F}(\mathbf{u}(\mathbf{r}, t), t), \quad (1)$$

其中 t 为系统的时间变量, $\mathbf{r} = (x, y, z)$ 为系统的空间坐标变量, $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = (u_1(\mathbf{r}, t), u_2(\mathbf{r}, t), \dots, u_n(\mathbf{r}, t)) \in \mathbf{R}^n$ 则为系统的状态变量, $\mathbf{F}: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$.

将 \mathbf{F} 进行适当的分离

$$\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{Q}(\mathbf{u}(\mathbf{r}, t), t) + \mathbf{L}(\mathbf{u}(\mathbf{r}, t), t) \quad (2)$$

^{*} 辽宁省自然科学基金 (批准号 20082147) 以及辽宁省教育厅创新团队计划 (批准号 2008T108) 资助的课题.

[†] 通讯联系人. E-mail: luling1960@yahoo.com.cn

这里 $Q(u(r, t), t)$ 是一个线性项,

$$Q(u(r, t), t) = (A - B)u(r, t), \quad (3)$$

A 为时空混沌系统线性项的系数矩阵, B 为控制增益系数矩阵. 显然,

$$L(u(r, t), t) = F(u(r, t), t) - Q(u(r, t), t). \quad (4)$$

将 N 个时空混沌系统(2)作为节点, 以其中的非线性部分 $L(u(r, t), t)$ 作为耦合函数构成复杂网络. 网络中第 i 个节点所满足的状态方程为

$$\begin{aligned} \dot{u}_i(r, t) = & (A - B)u_i(r, t) + L(u_i(r, t), t) \\ & + \eta_i \sum_{j=1}^N G_{ij} L(u_j(r, t), t), \end{aligned} \quad (5)$$

其中 η_i 是耦合强度因子, G_{ij} 表示耦合矩阵 G 的矩阵元, 定义如下:

$$G_{ij} = \begin{cases} -d_i, & i = j, \\ 1, & i, j (i \neq j) \text{ 有连接}, \\ 0, & i, j (i \neq j) \text{ 无连接}. \end{cases} \quad (6)$$

上式中 d_i 是网络中第 i 个节点的度. 耦合矩阵 G 给出了网络结构的具体形式. 本文采用典型的完全网络, 其耦合矩阵的具体形式为

$$G = \begin{bmatrix} -N+1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & -N+1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & -N+1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & -N+1 \end{bmatrix}. \quad (7)$$

定义网络各节点之间状态变量的误差

$$e_i(r, t) = u_i(r, t) - u_{i+1}(r, t) \quad (i = 1, 2, \dots, N-1), \quad (8)$$

则

$$\begin{aligned} \frac{\partial e_i(r, t)}{\partial t} = & (A - B)e_i(r, t) + (\eta_i - \eta_{i+1}) \\ & \times \sum_{k=(\neq i, i+1)}^N L(u_k(r, t)) \\ & + [1 - (N-1)\eta_i - \eta_{i+1}] L(u_i(r, t)) \\ & - [1 - \eta_i - (N-1)\eta_{i+1}] L(u_{i+1}(r, t)) \end{aligned} \quad (9)$$

当 $\eta_1 = \eta_2 = \dots = \eta_N = \eta$ 时, 第 i 个节点和第 $i+1$ 个节点之间状态变量的误差方程(9)可以写成如下形式:

$$\begin{aligned} \frac{\partial e_i(r, t)}{\partial t} = & (A - B)e_i(r, t) + (1 - N\eta) \\ & \times [L(u_i(r, t)) - L(u_{i+1}(r, t))]. \end{aligned} \quad (10)$$

取 $\eta = 1/N$ (10)式变为

$$\frac{\partial e_i(r, t)}{\partial t} = (A - B)e_i(r, t). \quad (11)$$

构造网络系统的 Lyapunov 函数

$$V(e) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N-1} e_i^2(r, t), \quad (12)$$

则 $V(e)$ 的导数可以写成

$$\begin{aligned} \frac{\partial V(e)}{\partial t} = & \sum_{i=1}^{N-1} e_i(r, t) \frac{\partial e_i(r, t)}{\partial t} \\ = & (A - B) \sum_{i=1}^{N-1} e_i^2(r, t). \end{aligned} \quad (13)$$

当取 $A - B \leq 0$ 时, 由(13)式可以得到

$$\frac{\partial V(e)}{\partial t} \leq 0. \quad (14)$$

根据 Lyapunov 稳定性定理^[19], 整个网络中各节点达到完全同步.

3. 仿真计算

作为连续时空混沌系统的例子, 考虑下列动力学方程描述的 Fitzhugh-Nagumo 模型^[20]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial t} = & \epsilon^{-1} u_1(1 - u_1) \left(u_1 - \frac{v_1 + b}{a} \right) + D \nabla^2 u_1, \\ \frac{\partial v_1}{\partial t} = & f(u_1) - v_1, \end{aligned} \quad (15)$$

$$f(u_1) = \begin{cases} 0, & (0 \leq u_1 < 1/3), \\ 1 - cu_1(u_1 - 1)^2, & (1/3 \leq u_1 \leq 1), \\ 1, & (u_1 > 1), \end{cases} \quad (16)$$

其中 $u_1(r, t)$ 和 $v_1(r, t)$ 为系统的状态变量, 这里空间坐标变量仅考虑是二维的情况 $r = (x, y)$, a, b, c, ϵ 为系统的参量, D 为扩散系数, $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$.

取系统参量 $a = 0.84, b = 0.07, c = 6.75$, 扩散系数 $D = 1$, 对应参量 ϵ 数值的变化, Fitzhugh-Nagumo 模型自身能够呈现出十分复杂和丰富的时空混沌行为. 图 1-2 给出系统尺寸为 100×100 , 空间步长为 1, 时间步长为 0.1, 时间为 80 s, 参量 $\epsilon = 0.08$ 以及 $\epsilon = 0.09$ 时状态变量 u_1 的时空演化图.

将 N 个 Fitzhugh-Nagumo 模型(15)作为网络的节点, 按照(5)式的连接构成完全网络. 其中网络节点线性项的系数矩阵 A 的具体表示是

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{b}{a\epsilon} & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (17)$$

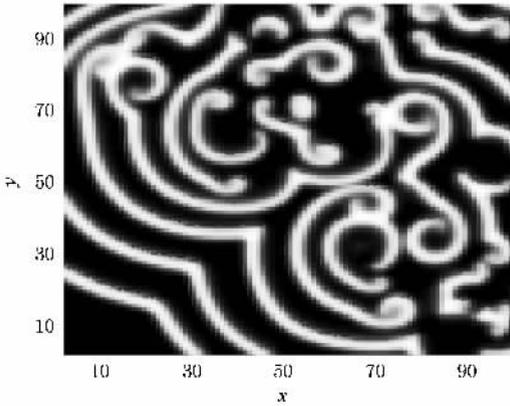


图1 变量 u_1 的时空演化($\epsilon = 0.08$)

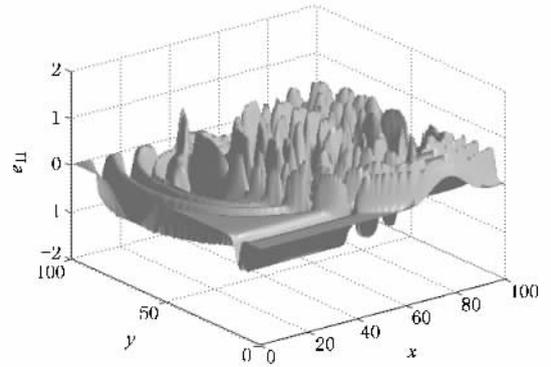


图3 误差变量 e_{11} 的时空演化($t = 30$ s)

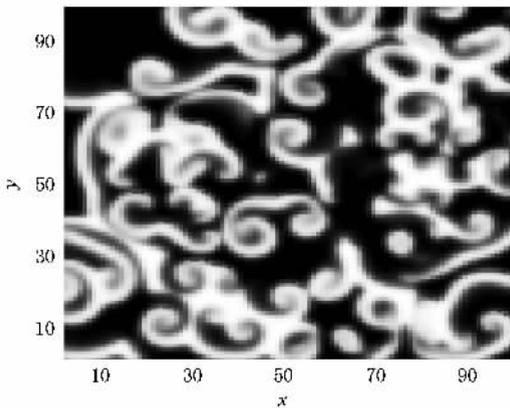


图2 变量 u_1 的时空演化($\epsilon = 0.09$)

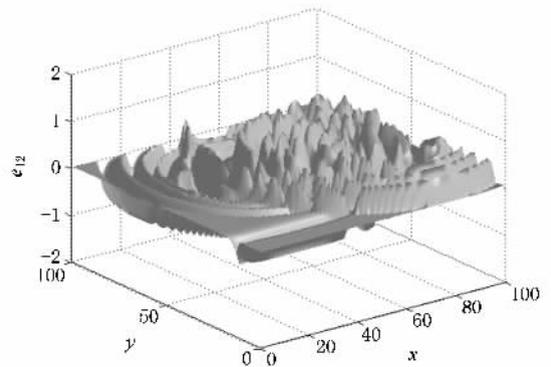


图4 误差变量 e_{12} 的时空演化($t = 30$ s)

取控制增益系数矩阵 $B = 0$,非线性耦合函数为

$$L(u(r, t), t) = \begin{bmatrix} \frac{b}{a\epsilon} u_1^2 + \epsilon^{-1} u_1 (1 - u_1) f(u_1) - \frac{v_1}{a} \\ f(u_1) \end{bmatrix} \quad (18)$$

仿真模拟上述完全网络的同步过程.在仿真过程中,网络参数 a, b, c 的取值保持不变,取参数 $\epsilon = 0.09$,网络节点数 $N = 3$,三个节点处 Fitzhugh-Nagumo 模型状态变量分别取 $(u_1, v_1), (u_2, v_2), (u_3, v_3)$,耦合强度因子 $\eta = 1/3$,在第 30 s 时进行网络的耦合连接,仿真模拟网络误差变量随时空的演化规律如图 3—10 所示.

图 3—6 显示的是网络在第 30 秒刚刚耦合连接时,网络误差变量随时空的演化结果.从图中可以看出,由于网络中各节点状态变量所取的初始值不同,因此,网络误差 $e_1 = (e_{11}, e_{12})^T = (u_1 - u_2, v_1 -$

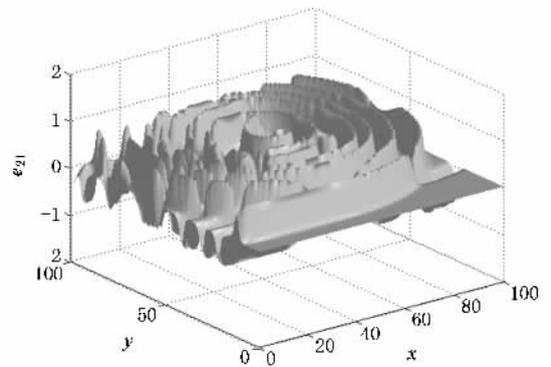
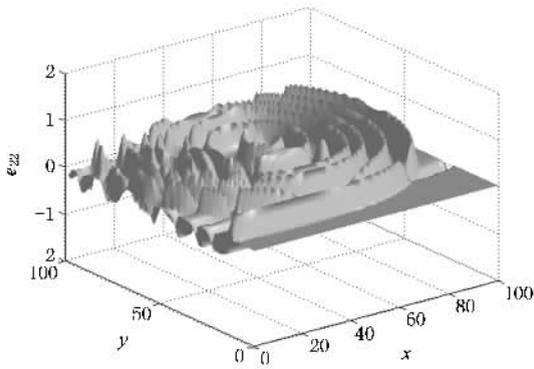
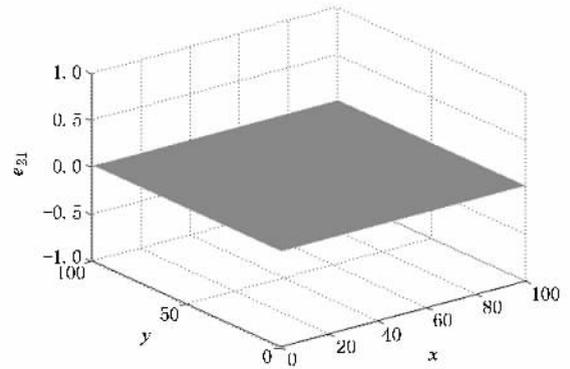
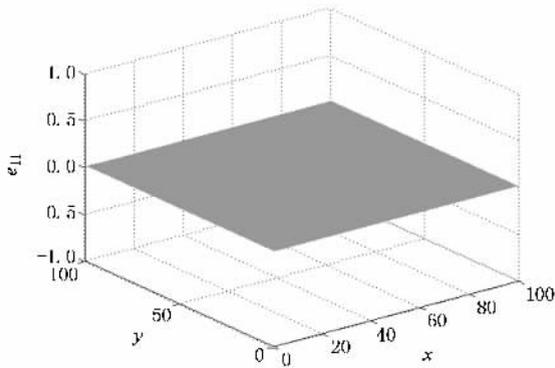
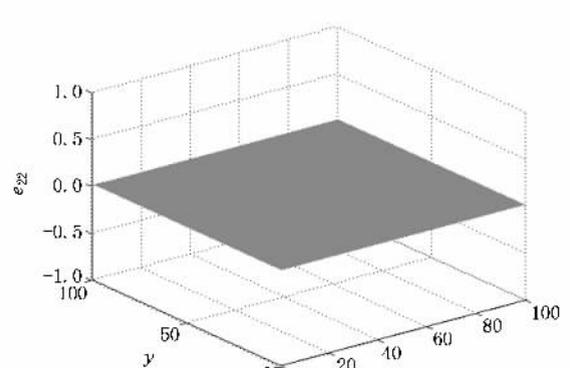
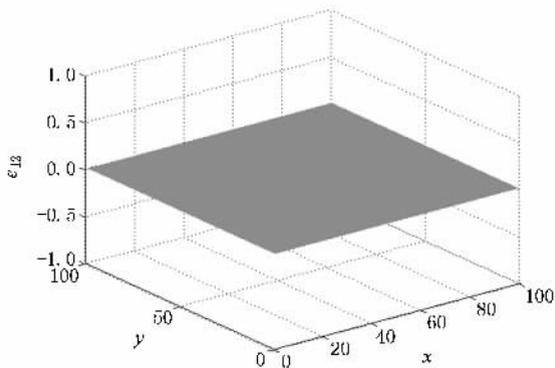


图5 误差变量 e_{21} 的时空演化($t = 30$ s)

$v_2)^T, e_2 = (e_{21}, e_{22})^T = (u_2 - u_3, v_2 - v_3)^T$ 随时空的演化有很大差别,但经过一个暂态过程后,三个节点 Fitzhugh-Nagumo 模型的状态变量随时空的演化完全相同,此时,网络同步得以实现.图 7—10 显示的是第 80 秒时网络同步后误差变量随时空的演化结果.可以看到,网络同步后其误差变量均趋于零.当网络节点数 N 取其它值时,重复上述仿真模拟过程,发现同步结果无明显改变,说明网络规模的大小

图 6 误差变量 e_{22} 的时空演化 ($t = 30 \text{ s}$)图 9 误差变量 e_{21} 的时空演化 ($t = 80 \text{ s}$)图 7 误差变量 e_{11} 的时空演化 ($t = 80 \text{ s}$)图 10 误差变量 e_{22} 的时空演化 ($t = 80 \text{ s}$)图 8 误差变量 e_{12} 的时空演化 ($t = 80 \text{ s}$)

4. 结 论

本文利用 N 个 Fitzhugh-Nagumo 模型作为网络节点,通过非线性耦合构成完全网络,研究了这种网络的时空混沌同步问题.首先给出了复杂网络中连接节点之间的非线性耦合函数的一般性选取原则.进一步基于 Lyapunov 稳定性定理,理论分析了实现网络同步的条件以及控制增益的取值范围.最后,通过仿真模拟检验了以 Fitzhugh-Nagumo 模型作为网络节点所构成的完全网络的时空混沌同步效果.仿真结果表明,这种完全网络不但同步快速有效,而且网络规模的大小对网络同步稳定性的影响不敏感.

对网络同步稳定性的影响不敏感.另外,控制增益系数矩阵 B 的选取也十分灵活.只要 B 在 $A - B \leq 0$ 的范围内取值,均可以实现整个网络的完全同步.

- [4] Stelling J , Klamt S , Bettenbrock K , Schuster S , Gilles E D 2002 *Nature* **420** 190
- [5] Ravasz E , Barabási A L 2003 *Phys. Rev. E* **67** 26112
- [6] Lü L , Xia X L 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 814 (in Chinese) [吕翎、夏晓岚 2009 物理学报 **58** 814]
- [7] Adamic L A , Huberman B A 2000 *Science* **287** 2115
- [8] Haken H 2005 *Physica D* **205** 1
- [9] Moreno Y , Kuramoto A F 2004 *Europhys. Lett.* **68** 603
- [10] Timme M , Wolf F , Geisel T 2004 *Phys. Rev. Lett.* **92** 74101
- [11] Checco P , Biey M , Kocarev L 2008 *Chaos, Solitons and Fractals* **35** 562
- [12] Li C G , Chen G R 2004 *Physica A* **343** 263
- [13] Yu W W , Cao J D 2007 *Physica A* **373** 252
- [14] Hung Y C , Huang Y T , Ho M C , Hu C K 2008 *Phys. Rev. E* **77** 16202
- [15] Kuang J Y , Deng K , Huang R H 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 1856 (in Chinese) [匡锦瑜、邓昆、黄荣怀 2001 物理学报 **50** 1856]
- [16] Lü L , Li Y , Guo Z A 2008 *Sci. Chin. G* **51** 1638
- [17] Lü L , Li Y 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 131 (in Chinese) [吕翎、李岩 2009 物理学报 **58** 131]
- [18] Zhang X , Shen K 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 2702 (in Chinese) [张旭、沈柯 2002 物理学报 **51** 2702]
- [19] Lü L 2000 *Nonlinear dynamics and chaos* (Dalian : Dalian publishing house) (in Chinese) [吕翎 2000 非线性动力学与混沌 (大连 : 大连出版社)]
- [20] Hildebrand M , Bär M , Eiswirth M 1995 *Phys. Rev. Lett.* **75** 1503

The synchronization of spatiotemporal chaos of all-to-all network using nonlinear coupling^{*}

Jing Xiao-Dan^{1,2)} Lü Ling¹⁾*

1) *College of Physics and Electronic Technology, Liaoning Normal University, Dalian 116029, China*

2) *The Department of Mathematics and Physics, Liaoning University of Technology, Jinzhou 121001, China*

(Received 23 February 2009 ; revised manuscript received 31 March 2009)

Abstract

N Fitzhugh-Nagumo models are used as network nodes, and synchronization of spatiotemporal chaos is studied using a all-to-all network constructed through a nonlinear coupling. The general principle of selecting coupling functions between nodes of the complex network is introduced. The theoretical analysis of the conditions for synchronization is made and the range of the feedback gain is obtained based on Lyapunov stability theory. The simulation is made to test the synchronization effect of the spatiotemporal chaos of the all-to-all network whose nodes are Fitzhugh-Nagumo models. The results show that the synchronization is fast and efficient, and the size of the network size has no sensitive effect on the stability of the network synchronization.

Keywords : synchronization, complex network, spatiotemporal chaos, nonlinear coupling

PACC : 0545

^{*} Project supported by the Natural Science Foundation of Liaoning Province, China (Grant No. 20082147) and the Innovative Team Program of Liaoning Educational Committee, China (Grant No. 2008T108).

[†] Corresponding author. E-mail: luling1960@yahoo.com.cn