

窄带随机噪声作用下单自由度非线性 干摩擦系统的响应^{*}

戎海武^{1)†} 王向东¹⁾ 徐伟²⁾ 方同²⁾

1) 佛山大学数学系, 佛山 528000)

2) 西北工业大学应用数学系, 西安 710072)

(2009 年 1 月 23 日收到, 2009 年 3 月 20 日收到修改稿)

研究了单自由度非线性干摩擦系统在窄带随机噪声参数激励下的主共振响应问题. 用 Krylov-Bogoliubov 平均法得到了关于慢变量的随机微分方程. 在没有随机扰动情形, 得到了系统响应幅值满足的代数方程. 在有随机扰动情形, 用线性化方法和矩方法给出了系统响应稳态矩计算的近似计算公式. 讨论了系统阻尼项、非线性项、随机扰动项和干摩擦项等参数对于系统响应的影响. 理论计算和数值模拟表明, 当非线性强度增大时系统的响应显著变小, 系统分岔点滞后. 随着激励频率的增大系统响应变大, 而当激励频率小于一定的值时, 系统响应为零. 增加干摩擦强度或者阻尼, 可以减少系统的响应, 并且使得系统分岔滞后. 随机扰动可以使得系统的响应从一个极限环变为一个扩散的极限环. 数值模拟表明该方法是有效的.

关键词: 单自由度非线性干摩擦系统, 主共振响应, Krylov-Bogoliubov 平均法

PACC: 0547

1. 引 言

在实际系统中, 干摩擦的影响往往是不可忽略的^[1], 很多干摩擦系统是不连续系统, 而不连续系统有丰富的动力学特性如分岔和混沌等^[2-4], 从而吸引了众多学者的兴趣. 自从 Den Hartog^[5]在 1931 年建立起干摩擦的理论基础以来, 有关确定性干摩擦系统的理论得到了蓬勃发展, 并建立了比较成熟的理论体系^[6,7]. 随着现代科学技术的飞速发展, 各种设备承受的激励源正由早期的稳态简谐激励向随机激励过渡, 因此研究干摩擦振动系统在随机激励下的响应问题一直是国内外学者关注的重要理论课题, 在工程中也有广泛的应用^[8,9], 并提出了一些有效的方法, 如等效线性化方法^[10,11], 随机平均法^[12,13], 能量平衡法^[14], 以及随机模拟法^[15]等. 总的说来, 关于干摩擦系统在随机激励下系统响应分析的研究处于起步阶段, 并且绝大部分研究集中在线

性系统 (这里的线性系统指的是去掉干摩擦力后系统运动的微分方程是线性的) 在宽带随机激励的响应分析上, 对于在窄带随机外部激励特别是参数激励下非线性干摩擦系统响应的研究则很少见, 本文将在这方面作一尝试. 本文研究了单自由度非线性干摩擦系统窄带随机噪声参数激励下的响应问题. 本文的干摩擦力采用 Coulomb 模型^[1,16] 利用 Krylov-Bogoliubov 平均法给出了系统响应稳态矩的计算公式. 讨论了系统阻尼项、非线性项、随机扰动项和干摩擦强度等参数对于系统响应的影响. 理论计算和数值模拟表明, 非线性项、随机项和阻尼项等对于系统响应有较大影响, 可以使得系统的分岔点滞后. 随机扰动可以使得系统的响应从一个极限环变为一个扩散的极限环.

2. 模型的提出及理论分析

考虑如下受到随机噪声参数激励的单自由度非

^{*} 国家自然科学基金(批准号: 10772046)和广东省自然科学基金(批准号: 7010407)资助的课题.

[†] 通讯联系人. E-mail: ronghw@foshan.net

线性干摩擦系统:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + r\text{sgn}(\dot{x}) + \Omega_1^2 x + \alpha x^3 = x_f(t), \quad (1)$$

式中 x 上方的圆点表示对时间 t 的导数, β 为系统的阻尼系数, α 代表系统的非线性恢复力的强度, Ω_1 是系统的自然频率, r 是干摩擦力强度, $\text{sgn}(x)$ 是符号函数, 即当 $x > 0$ 时 $\text{sgn}(x) = 1$, 而当 $x < 0$ 时 $\text{sgn}(x) = -1$. 系统(1)的干摩擦力模型就是经典的 Coulomb 模型, 而随机激励 $f(t)$ 采用如下的模型:

$$f(t) = h\sin\varphi(t), \quad \dot{\varphi}(t) = \Omega_2 + \gamma\xi(t), \quad (2)$$

式中 $h > 0$ 是随机激励的强度, Ω_2 为激励的中心频率, $\xi(t)$ 是单位强度的零均值高斯白噪声. 由(2)式可以看出, 与通常的简谐激励相比, $f(t)$ 可以看作是简谐激励的频率 Ω_2 受到了随机扰动 $\gamma\xi(t)$, 实际上很多激励如海浪等都有随机扰动. $f(t) \leq h$ 是一种有界噪声, 非线性系统在有界噪声作用下的响应问题引起了许多学者的注意^[7]. 由文献[18]可以知道 $f(t)$ 功率谱密度为

$$S_f(\omega) = \frac{1}{4\pi} \frac{h^2 \gamma^2 (\Omega_2^2 + \omega^2 + \gamma^4/4)}{(\Omega_2^2 - \omega^2 + \gamma^4/4)^2 + \Omega_2^2 \gamma^4}. \quad (3)$$

当 $\gamma \rightarrow 0$ 时, $S_f(\omega)$ 在 $\omega = \pm \Omega_2$ 处取值为无穷大而在其他处的值趋于零, 这是一种典型的窄带噪声的功率谱密度, 本文就研究这种情形, 即假设 $\gamma \ll \Omega_2$; 当 $h = \gamma/\sqrt{2} \rightarrow \infty$ 时, $S_f(\omega)$ 趋于常数 $\frac{1}{2\pi}$ 为白噪声(典型的宽带噪声)的功率谱密度. 需要指出的是, 由(3)式表示的 $f(t)$ 功率谱密度和常用的窄带随机噪声模型——滤过随机噪声的功率谱密度是相同的, 但是两者的概率密度函数却是不同的, 常用的滤过噪声的概率密度函数是高斯的, 而本文中 $f(t)$ 的概率密度函数显然是非高斯的.

系统(1)是个比较复杂的系统, 包含了干摩擦力、非线性恢复力和窄带随机参数激励项等, 要精确求解比较困难. 为了方便起见, 假设系统中的参数 α, β, r, h 都为小参数, 这样就可以用 Krylov-Bogoliubov 平均法^[19]进行分析. 本文主要研究参数主共振 $\Omega_2 \approx 2\Omega_1$ 情形, 记 $\mu = \Omega_2 - 2\Omega_1$ 为调谐参数, 做变换

$$x = A(t) \sin\Phi(t), \quad \dot{x} = \Omega_1 A(t) \cos\Phi(t). \quad (4)$$

并引入慢变量 $\vartheta(t) = \varphi(t) - 2\Phi(t)$, 可将(1)式转化为

$$\dot{A} = \frac{\cos\Phi}{\Omega_1} [-2\beta\Omega_1 A \cos\Phi - r\text{sgn}(\cos\Phi) - \alpha A^3 \sin^3\Phi + hA \sin\Phi \sin(\theta + 2\Phi)],$$

$$\begin{aligned} \dot{\theta} = & \mu + \gamma\xi(t) + \frac{2\sin\Phi}{A\Omega_1} [-2\beta\Omega_1 A \cos\Phi \\ & - r\text{sgn}(\cos\Phi) - \alpha A^3 \sin^3\Phi \\ & + hA \sin\Phi \sin(\theta + 2\Phi)]. \end{aligned} \quad (5)$$

在(5)式中, A 和 θ 都是关于时间 t 的慢变量, Φ 是快变量, 这样在(5)式关于快变量 Φ 取平均可以得到如下关于慢变量 A 和 θ 的方程:

$$\begin{aligned} \dot{A} = & -\beta A - \frac{2r}{\pi\Omega_1} + \frac{h}{4\Omega_1} A \cos\theta, \\ \dot{\theta} = & \mu - \frac{3\alpha A^2}{4\Omega_1} - \frac{h}{2\Omega_1} \sin\theta + \gamma\xi(t). \end{aligned} \quad (6)$$

下面我们首先讨论当 $\gamma = 0$ 即没有随机扰动时, 干摩擦系统(1)在确定性谐和激励下系统的响应. 此时方程(6)式变为

$$\begin{aligned} \dot{A} = & -\beta A - \frac{2r}{\pi\Omega_1} + \frac{h}{4\Omega_1} A \cos\theta, \\ \dot{\theta} = & \mu - \frac{3\alpha A^2}{4\Omega_1} - \frac{h}{2\Omega_1} \sin\theta, \end{aligned} \quad (7)$$

由(7)式可以知道, 立方非线性不直接影响振幅 A , 而是通过 θ 的变化间接影响振幅 A . 对应于稳态响应 $A = A_0, \theta = \theta_0$, 有 $\dot{A} = 0, \dot{\theta} = 0$, 方程(7)变为

$$\begin{aligned} 4\beta\Omega_1 A_0 + \frac{8r}{\pi} &= hA_0 \cos\theta_0, \\ 2\mu\Omega_1 A_0 - \frac{3\alpha}{2} A_0^3 &= hA_0 \sin\theta_0. \end{aligned} \quad (8)$$

将(8)式两端平方相加可以得到稳态解 A_0 满足的方程为

$$\begin{aligned} \left(4\beta\Omega_1 A_0 + \frac{8r}{\pi}\right)^2 + \left(2\mu\Omega_1 A_0 - \frac{3\alpha}{2} A_0^3\right)^2 \\ = h^2 A_0^2. \end{aligned} \quad (9)$$

给定系统的参数后, 可以通过数值方法由(8)和(9)式求出稳态解 A_0, θ_0 . 由方程(9)可以知道稳态解可以有多个, 这些稳态解的稳定性可以通过引入小摄动项进行研究, 即设

$$A = A_0 + A_1, \quad \theta = \theta_0 + \theta_1, \quad (10)$$

式中 A_0, θ_0 由(8)和(9)式确定, A_1, θ_1 是小摄动项. 将(10)式代入(7)式并略去 A_1, θ_1 的高阶项得到如下关于 A_1, θ_1 的线性方程组:

$$\begin{aligned} \dot{A}_1 = & \left(-\beta + \frac{h}{4\Omega_1} \cos\theta_0\right) A_1 - \frac{h}{4\Omega_1} A_0 \sin\theta_0 \theta_1, \\ \dot{\theta}_1 = & -\frac{3\alpha A_0}{2\Omega_1} A_1 - \frac{h}{2\Omega_1} \cos\theta_0 \theta_1, \end{aligned} \quad (11)$$

方程组(11)系数矩阵对应的特征值为

$$\lambda_{1,2} = - \left(\frac{\beta}{2} + \frac{h \cos \theta_0}{8\Omega_1} \right) \pm \sqrt{\left(\frac{\beta}{2} + \frac{h \cos \theta_0}{8\Omega_1} \right)^2 - \left[\left(\beta - \frac{h \cos \theta_0}{4\Omega_1} \right) \frac{h \cos \theta_0}{2\Omega_1} + \frac{3\alpha h A_0^2 \sin^2 \theta_0}{8\Omega_1^2} \right]}. \quad (12)$$

从而可得方程(7)的稳态解 A_0, θ_0 稳定的充分必要条件为 $\lambda_{1,2}$ 的实部小于零,即

$$\left(\beta - \frac{h \cos \theta_0}{4\Omega_1} \right) \frac{h \cos \theta_0}{2\Omega_1} + \frac{3\alpha h A_0^2 \sin^2 \theta_0}{8\Omega_1^2} > 0. \quad (13)$$

由(9)式给出的是方程(7)的非平凡解,实际上平凡解 $x(t) \equiv 0$ 也是方程(1)的解.故当条件(13)不满足时,方程(1)只有平凡解 $x(t) \equiv 0$.下面我们研究当 $\gamma \neq 0$ 时随机系统(6)的稳态响应.作变换

$$u = A \cos \theta, \quad v = A \sin \theta, \quad (14)$$

可以将(6)式转化为

$$\begin{aligned} \dot{u} = & - \left(\beta + \frac{2r}{\pi\Omega_1 \sqrt{u^2 + v^2}} \right) u \\ & - \left[\mu - \frac{3\alpha(u^2 + v^2)}{4\Omega_1} \right] v \\ & + \frac{h(u^2 + 2v^2)}{4\Omega_1 \sqrt{u^2 + v^2}} - \gamma v \xi(t), \\ \dot{v} = & \left[\mu - \frac{3\alpha(u^2 + v^2)}{4\Omega_1} \right] u \\ & - \left(\beta + \frac{2r}{\pi\Omega_1 \sqrt{u^2 + v^2}} \right) v \\ & - \frac{huv}{4\Omega_1 \sqrt{u^2 + v^2}} + \gamma u \xi(t). \quad (15) \end{aligned}$$

一般将方程(15)看作 Stratonovich 方程(15)式右端的白噪声 $\xi(t)$ 是物理白噪声.为了数学上处理方便,需要加上 Wong-Zakai 修正项^[19]将方程(15)转化为如下伊藤(Ito)随机微分方程:

$$\begin{aligned} du = & \left\{ - \left(\beta + \frac{\gamma^2}{2} + \frac{2r}{\pi\Omega_1 \sqrt{u^2 + v^2}} \right) u \right. \\ & - \left[\mu - \frac{3\alpha(u^2 + v^2)}{4\Omega_1} \right] v \\ & \left. + \frac{h(u^2 + 2v^2)}{4\Omega_1 \sqrt{u^2 + v^2}} \right\} dt - \gamma v dW(t), \\ dv = & \left\{ \left[\mu - \frac{3\alpha(u^2 + v^2)}{4\Omega_1} \right] u \right. \\ & - \left(\beta + \frac{\gamma^2}{2} + \frac{2r}{\pi\Omega_1 \sqrt{u^2 + v^2}} \right) v \\ & \left. - \frac{huv}{4\Omega_1 \sqrt{u^2 + v^2}} \right\} dt + \gamma u dW(t). \quad (16) \end{aligned}$$

式中 $W(t)$ 是标准 Wiener 过程.

要精确求解方程(16)并不容易,这里我们给出

一种近似算法求其近似稳态解.由于随机扰动项 $\gamma \xi(t)$ 不大,可以令(16)式右端中的随机项为零得到如下确定性微分方程:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} = & - \left(\beta + \frac{\gamma^2}{2} + \frac{2r}{\pi\Omega_1 \sqrt{u^2 + v^2}} \right) u \\ & - \left[\mu - \frac{3\alpha(u^2 + v^2)}{4\Omega_1} \right] v + \frac{h(u^2 + 2v^2)}{4\Omega_1 \sqrt{u^2 + v^2}}, \\ \frac{dv}{dt} = & \left[\mu - \frac{3\alpha(u^2 + v^2)}{4\Omega_1} \right] u \\ & - \left(\beta + \frac{\gamma^2}{2} + \frac{2r}{\pi\Omega_1 \sqrt{u^2 + v^2}} \right) v \\ & - \frac{huv}{4\Omega_1 \sqrt{u^2 + v^2}}. \quad (17) \end{aligned}$$

对应于稳态响应 $u = u_0, v = v_0$, 有 $\dot{u} = 0, \dot{v} = 0$, 方程(17)变为

$$\begin{aligned} & \left(\beta + \frac{\gamma^2}{2} + \frac{2r}{\pi\Omega_1 \sqrt{u^2 + v^2}} \right) u \\ & + \left[\mu - \frac{3\alpha(u^2 + v^2)}{4\Omega_1} \right] v \\ & - \frac{h(u^2 + 2v^2)}{4\Omega_1 \sqrt{u^2 + v^2}} = 0, \\ & \left[\mu - \frac{3\alpha(u^2 + v^2)}{4\Omega_1} \right] u \\ & - \left(\beta + \frac{\gamma^2}{2} + \frac{2r}{\pi\Omega_1 \sqrt{u^2 + v^2}} \right) v \\ & - \frac{huv}{4\Omega_1 \sqrt{u^2 + v^2}} = 0. \quad (18) \end{aligned}$$

给定参数后,可以用数值方法由(18)式解出系统(17)的稳态响应 $u = u_0, v = v_0$.而系统(16)的解可以设为

$$u = u_0 + u_1, \quad v = v_0 + v_1, \quad (19)$$

式中 u_0, v_0 由(18)式确定, u_1, v_1 是小摄动项.将(19)式代入(16)式并略去 u_1, v_1 的高阶项得到如下关于 u_1, v_1 的线性随机微分方程组:

$$\begin{pmatrix} du_1 \\ dv_1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} -v_0 \\ u_0 \end{pmatrix} dW(t). \quad (20)$$

式中 $C = [c_{ij}]_{i,j=1,2}$ 是(17)式右端关于 u, v 雅可比矩阵当 $u = u_0, v = v_0$ 的值.由(20)式可以得到 u_1, v_1 的一阶稳态矩为 $Eu_1 = Ev_1 = 0$, 而二阶稳态矩

Eu_1^2, Eu_1v_1, Ev_1^2 容易用矩方法^[20]得到, 这里不再赘述. 这样, 系统响应幅值的二阶稳态矩为

$$(A^*)^2 = E(u^2 + v^2) = u_0^2 + v_0^2 + Eu_1^2 + Ev_1^2 \quad (21)$$

在数值模拟中, 我们用 A^* 作为衡量系统响应大小的度量.

3. 数值模拟

有关随机过程数值模拟的方法可见文献 [20—22] 本文数值模拟中设 $\xi(t)$ 的谱密度为

$$\mathcal{S}(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}, & 0 < \omega \leq 2\Omega_1 \\ 0, & \omega > 2\Omega_1. \end{cases}$$

则 $\xi(t)$ 可取为如下形式^[19]:

$$\xi(t) = \sqrt{\frac{2\Omega_1}{N\pi}} \sum_{k=1}^N \cos\left[\frac{\Omega_1}{N}(2k-1)t + \varphi_k\right],$$

式中 φ_k 是 $(0, 2\pi]$ 上均匀分布的独立同分布随机变量序列, N 是一个较大的整数.

在本文的数值模拟中, 取系统 (1) 和 (2) 中的参数为 $\beta = 0.2, h = 1.7, r = 0.2, \Omega_1 = 1$. 在数值模拟中主要讨论 $\Omega_2 \approx 2$ 即参数主共振时的情形, 用四阶龙格库特法可计算出系统 (1) 的响应. 先考虑当 $\gamma = 0$ 即系统只受确定性谐和激励时, 对应于不同的激励频率 Ω_2 , 当 $\alpha = 0.05, 0.1$ 时由 (9) 式给出的系统 (1) 响应的振幅 A_0 的理论值与数值计算值的比较见图 1. 由图 1 可见, 理论解与数值解符合得很好, 这说明用 Krylov-Bogoliubov 平均法求解方程 (1) 是有效的.

由图 1 可见, 当非线性强度阻尼 α 增大时系统的响应显著变小, 这说明在干摩擦系统中考虑非线性恢复力是有必要的. 随着 Ω_2 的增大系统响应变

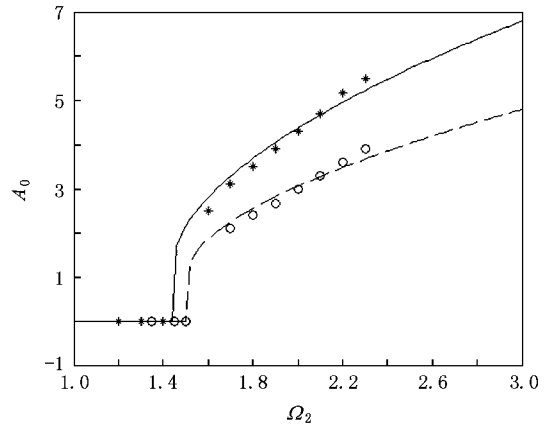


图 1 系统 (1) 频率响应曲线 ($\gamma=0$) (—: 理论解 ($\alpha=0.05$), ---: 理论解 ($\alpha=0.1$), * * *: 数值解 ($\alpha=0.05$), ...: 数值解 ($\alpha=0.1$))

大, 而当 Ω_2 小于一定的值时, 系统响应为零. 如当 $\alpha = 0.1$ 时, 如果 $\Omega_2 < 1.51$, 则系统响应为零; $\Omega_2 > 1.51$, 系统响应不为零. 不妨将这种现象 (系统响应从零变为非零) 看作分岔现象, 则 $\Omega_2 = 1.51$ 是系统的分岔点. 当 $\alpha = 0.05$ 时, 分岔点提前到 $\Omega_2 = 1.45$. 图 1 及进一步的数值模拟表明当激励频率 Ω_2 接近于主共振频率 2 时, 系统响应的理论解和数值解符合得较好; 而当 Ω_2 偏离 2 时, 由 (9) 式给出的理论解和数值解之间略有偏差, 这可能是由平均法引起的, 因为在平均法中要求 $\Omega_2 \approx 2\Omega_1 = 2$.

对于 $\gamma = 0, \alpha = 0.05, \Omega_2 = 2.1$, 系统 (1) 响应的时程和相轨的数值解见图 2, 图中 $y(t) = \dot{x}(t)$ 表示速度. 显然, 图 2 中表示的响应是一周期运动.

下面研究随机扰动 $\xi(t)$ 对系统响应的影响. 当 $\gamma = 0.25$ 即系统受随机扰动时, 对应于不同的激励频率 Ω_2 , 当 $\alpha = 0.05, 0.1$ 时由 (21) 式给出的系统

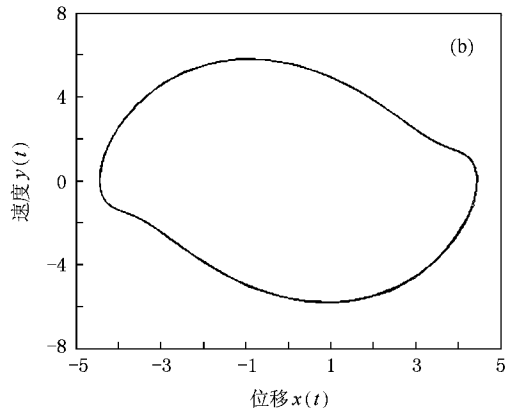
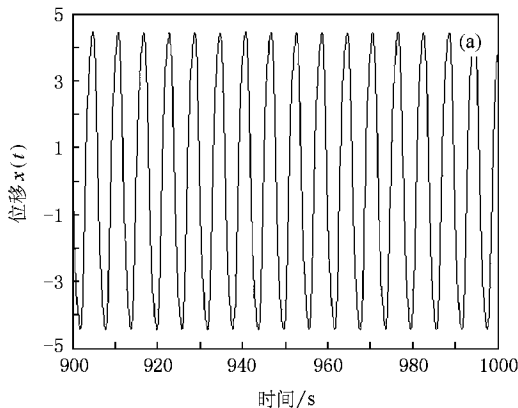


图 2 系统 (1) 的数值结果 ($\gamma=0, \alpha=0.05, \Omega_2=2.1$) (a) 时间历程图 (b) 相轨图

(1) 响应的振幅 A^* 的理论值与数值计算值的比较见图 3.

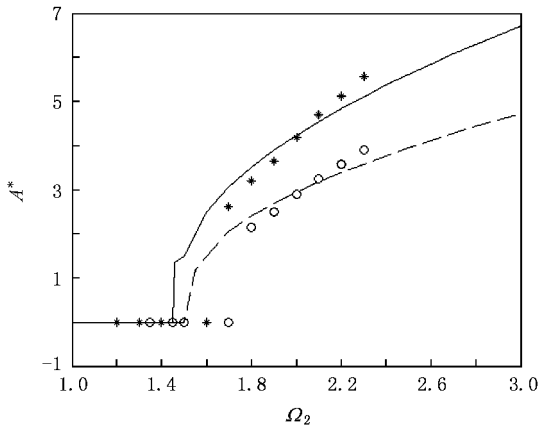


图 3 系统(1)频率响应曲线($\gamma = 0.25$; — : 理论解($\alpha = 0.05$), - - -: 理论解($\alpha = 0.1$), * * *: 数值解($\alpha = 0.05$), ... 数值解($\alpha = 0.1$))

由图 3 可见,理论解与数值解符合得较好. 当非线性强度阻尼 α 增大时系统的响应显著变小,系统分岔点滞后,随着 Ω_2 的增大系统响应变大,而当 Ω_2 小于一定的值时,系统响应为零. 当激励频率 Ω_2 接近于主共振频率 2 时,系统的响应理论解和数值解符合得较好,而当 Ω_2 偏离 2 时,理论解和数值解之间略有偏差,这些结论与前述当 $\gamma = 0$ 系统没有随机扰动时的情形一致. 比较图 1 和图 3,注意到二个图中的系统参数除 γ 不同外其余都相同,可知道随机扰动使得系统的响应变小. 进一步计算表明,随着 γ 的增大系统响应变小,分岔点滞后. 对于 $\gamma = 0.25$, $\alpha = 0.05$, $\Omega_2 = 2.1$, 系统(1)响应的时间历程和相轨的数值解见图 4.

比较图 2 和图 4,同样注意到二个图中的系统

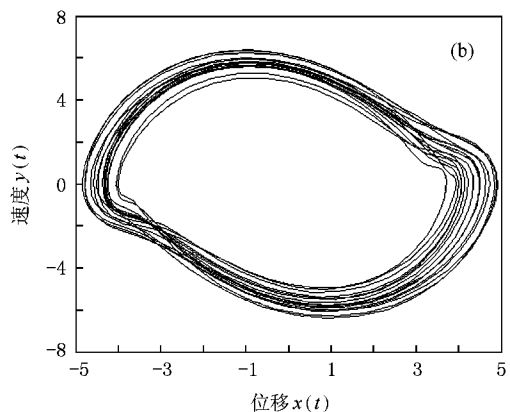
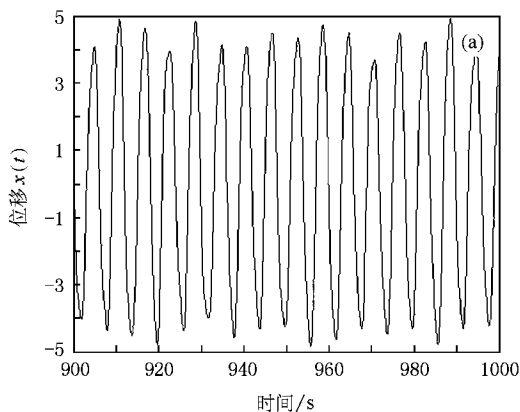


图 4 系统(1)的数值结果($\gamma = 0.25$, $\alpha = 0.05$, $\Omega_2 = 2.1$) (a) 时间历程图 (b) 相轨图

参数除 γ 不同外其余参数都相同,可以看出由于随机扰动 $\xi(t)$ 的存在,系统响应幅值变小(确切地说,是大部分相轨的幅值变小),且从一周解变为一拟周期解,系统的相轨也从一极限环变为一扩散的极限环. 计算表明,随着 γ 的增大,此扩散极限环的宽度将增大.

由(9)式可以分析干摩擦强度 r 对于确定性系统响应的影响,而由(21)式可以分析 r 对于随机系统响应的影响. 理论分析和进一步数值模拟表明,无论是在确定性还是随机情形,增加干摩擦强度 r ,可以减少系统的响应,并且使得系统分岔滞后. 当

$$\beta = 0.2, h = 1.7, r = 0.4, \Omega_1 = 1, \\ \gamma = 0, \alpha = 0.05, \Omega_2 = 2.1$$

时,系统(1)的响应的的时间历程和相轨的数值解见图 5,图 5 中的系统参数除了 r 不同外,其余都和图 2 中的参数相同,只是 r 的值从图 2 的 0.2 增加到图 5 的 0.4. 比较图 2 和图 5 可以发现,增加 r 后系统响应变小. 实际上,响应 $x(t)$ 的振幅从图 2 的 4.45 减少到图 5 的 4.33.

阻尼系数 β 和 r 有类似的作用,增加阻尼 β ,可以减少系统的响应,并且使得系统分岔滞后. 实际上,干摩擦力可以看作为一种阻尼,所以上结论是符合物理直觉的.

4. 结论与讨论

本文将 Krylov-Bogoliubov 平均法引入非线性随机干摩擦系统的响应分析中,并结合线性化和矩方法研究了干摩擦系统在窄带随机噪声参数激励下系统的共振响应. 由于所研究系统的复杂性(非线性,随机性和非光滑性),精确求解很困难甚至是不可能

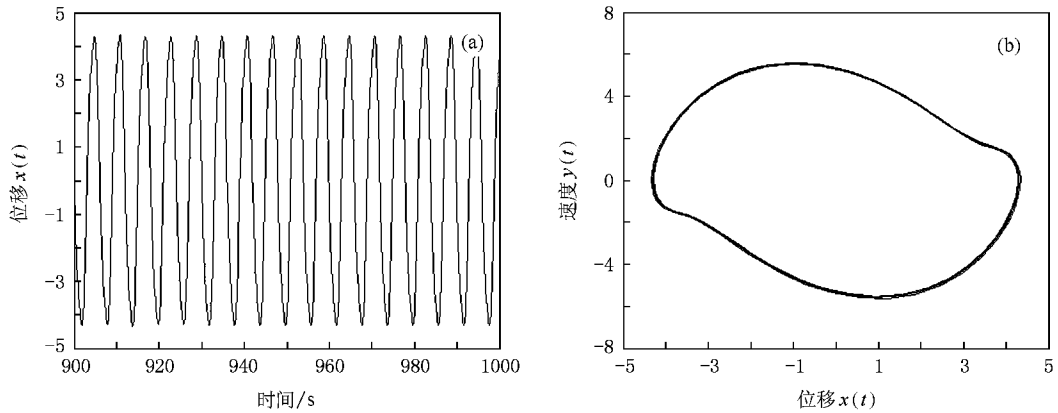


图5 系统(1)的数值结果($\gamma=0, \alpha=0.05, \Omega_2=2.1, r=0.4$) (a)时间历程图 (b)相轨图

的事实上,即使对于确定性的单自由度非线性系统,大部分也不可能求出精确的解析解.只能通过各种近似方法如小参数法、坐标变形法、谐波平衡法、慢变参数法、KBM法、等效线性化法、谐波平衡法、里茨-伽辽金法,等等.对于非线性随机系统,各种近似方法得到了广泛的应用,如等效线性化法和随机平均法等.随机系统的等效线性化法可看作是确定性系统的等效线性化法在随机系统中的推广,故确定性系统的其他近似方法如谐波平衡法^[23]和多项式逼近法等^[24]都可推广到随机碰撞系统的分析中去.

理论计算和数值模拟表明,当非线性强度阻尼 α 增大时系统的响应显著变小,系统分岔点滞后,这说明在干摩擦系统中考虑非线性恢复力是有必要的.随着激励频率 Ω_2 的增大系统响应变大,而当 Ω_2 小于一定的值时,系统响应为零,增加干摩擦强

度 r 或者阻尼 β ,可以减少系统的响应,并且使得系统分岔滞后.

如果将这种在随机扰动下系统运动的突变现象(响应从零变为非零)称为随机分岔,则研究系统参数如 $\alpha, \beta, \gamma, r, h$ 等变化对系统随机分岔点和混沌^[25]的影响是我们今后的研究方向.

本文的窄带随机噪声 $\xi(t)$ 模型(2)是一种特殊的模型,模型(1)中的非线性项也是一种特殊的类型,但是本文的方法对于其他类型的窄带随机噪声模型如滤过噪声模型等以及其他的非线性系统也是适用的,具体的公式推导是我们今后进一步的工作.本文的结果是在系统参数 $\alpha, \beta, \gamma, r, h$ 等都为小参数的假设下得到的,如果这些参数不是小参数,有关结论是否还成立值得进一步研究,实际上在本文的数值模拟中 h 的值并不小.

- [1] Berger E G 2002 *Applied Mechanics Reviews* **55** 535
- [2] Blazejczyk-Okolewska B, Czolczynski K, Kapitaniak T, Wojewoda J 1999 *Chaotic Mechanics in Systems with Impacts and Friction* (World Scientific, Singapore) 1
- [3] Li M, Ma X K, Dai D, Zhang H 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 1084 (in Chinese) [李明、马西奎、戴栋、张浩 2005 物理学报 **54** 1084]
- [4] Wang L Z, Zhao W L 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 4038 (in Chinese) [王林泽、赵文礼 2005 物理学报 **54** 4038]
- [5] Den Hartog J P 1931 *Transaction of the ASME* **53** 107
- [6] Wiercigroch M, Kraker de 1999 *Nonlinear Dynamics and Chaos in Mechanical Systems with Discontinuities* (World Scientific, Singapore) 1
- [7] Wriggers P, Nackenhorst U 2006 *Lectures Notes in Applied and Computational Mechanics* (Berlin, Heidelberg: Springer) 1
- [8] Rakheja S, Afework Y, Sankar S 1994 *Vehicle System Dynamics* **23** 501
- [9] Gunston T P, Rebelle J, Griffin M J 2004 *J. Sound. Vib.* **278** 117
- [10] Sakata M, Kimura K 1980 *J. Sound. Vib.* **73** 333
- [11] Zhang M 1994 *J. Vib. Eng.* **7** 223 (in Chinese) [张明 1994 振动工程学报 **7** 223]
- [12] Roberts J B 1978 *J. Appl. Mech.* **45** 923
- [13] Roberts J B 1980 *J. Sound. Vib.* **72** 71
- [14] Iourtchenko D V, Dimentberg M F 2001 *J. Sound. Vib.* **248** 913
- [15] Stein G J, Zahoransky R, Mucka P 2008 *J. Sound. Vib.* **311** 74
- [16] Mostaghel N, Davis T 1997 *Earthquake Eng. Stru. Dyn.* **26** 541
- [17] Sun X J, Xu W, Ma S J 2006 *Acta. Phys. Sin.* **55** 610 [孙晓娟、徐伟、马少娟 2006 物理学报 **55** 610]
- [18] Lin Y K, Cai G Q 1995 *Probabilistic Structural Dynamics* (New York, McGraw-Hill) 1

- [19] Sanders J , Verhulst F 1985 *Averaging methods in Nonlinear dynamical Systems* (New York , Springer-Verlag) 1 362
- [20] Zhu W Q 1992 *Random Vibration* (Beijing : Science Press)(in Chinese)[朱位秋 1992 随机振动 (北京 科学出版社)]
- [21] Shinozuka M 1971 *J. Sound. Vib.* **19** 357
- [22] Shinozuka M 1971 *J. Sound. Vib.* **25** 111
- [23] Rong H W , Xu W , Meng G , Fang T 2001 *J. Sound. Vib.* **242**
- [24] Ma S J , Xu W , Li W , Le Y F 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 3508 (in Chinese)[马少娟、徐 伟、李 伟、靳艳飞 2005 物理学报 **54** 3508]
- [25] Niu Y J , Xu W , Rong H W , Wang L , Feng J Q 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 7535 (in Chinese)[牛玉俊、徐 伟、戎海武、王 亮、冯进钤 2008 物理学报 **57** 7535]

Resonance response of a single-degree-of-freedom nonlinear dry system to a randomly disordered periodic excitation *

Rong Hai-Wu^{1)†} Wang Xiang-Dong¹⁾ Xu Wei²⁾ Fang Tong²⁾

¹ *Department of Mathematics , Foshan University , Foshan 528000 , China)*

² *Department of Applied Mathematics , Northwestern Polytechnical University , Xi 'an 710072 China)*

(Received 23 January 2009 ; revised manuscript received 20 March 2009)

Abstract

The resonance response of a single-degree-of-freedom nonlinear dry oscillator of Coulomb type to narrow-band random parameter excitation is investigated. The analysis is based on the Krylov-Bogoliubov averaging method. The averaged equations are solved exactly and the algebraic equation of the amplitude of the response is obtained in the case without random disorder. Linearization method and moment method are used to obtain the mean square response amplitude for the case with random disorder. The effects of damping , nonlinear intensity , detuning , bandwidth , dry intensity , and magnitudes of random excitations are analyzed. The theoretical analyses are verified by numerical results. Theoretical analyses and numerical simulations show that the peak amplitudes may be strongly reduced and the bifurcation of the system will be delayed when intensity of the nonlinearity increases. The peak amplitudes will also be reduced and the bifurcation of the system will be delayed when damping and dry intensity of the system increases.

Keywords : single-degree-of-freedom nonlinear dry system , resonance response , Krylov-Bogoliubov averaging method

PACC : 0547

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10772046) , the Natural Science Foundation of Guangdong Province , China (Grant No. 7010407) .

† Corresponding author. E-mail : ronghw@foshan.net