

振荡介质中平面波的反射^{*}

吕耀平 顾国锋 陆华春 戴 瑜 唐国宁[†]

(广西师范大学物理与电子工程学院, 桂林 541004)

(2009 年 1 月 19 日收到, 2009 年 3 月 18 日收到修改稿)

在复金慈堡-朗道方程描述的振荡介质中研究了平面波的反射. 从理论上给出了产生反射的条件, 导出了反射波和入射波这两个区域的分界线与两种介质分界线的夹角. 发现两类反射, 一类为回折射产生的反射, 对于这类反射, 理论上给出了反射角; 另一类为纯反射, 它与折射无关. 理论分析与数值模拟结果均表明: 只有当入射角大于临界入射角才会发生反射, 而且反射角等于临界入射角; 对于纯反射, 反射角随波频率增大而增大.

关键词: 复金慈堡-朗道方程, 平面波, 反射

PACC: 0547, 4225G

1. 引 言

自从 Zhabotinsky 等人于 1993 年^[1]从实验上发现了化学波的反射、折射及其他现象以来, 反应扩散系统中非线性波的反射和折射现象研究就持续受到人们的关注^[2-12], 使得人们对非线性波的反射和折射有了较清楚的认识. 研究表明: 非线性波的反射和折射都是瞬时完成的^[1], 在可激发介质或振荡介质中都可以出现反射和折射现象^[4-7]. 折射服从 Snell 定律, 反射现象只有在一定条件下才能发生. 例如, 当入射波从波速小的介质入射到波速大的介质表面时, 或者当入射波从激发性低的介质入射到激发性高的介质表面时^[4], 只要入射角大于临界入射角, 就可以发生反射现象, 而且反射角与入射角无关, 反射角等于临界入射角 $\sin^{-1} \frac{v_i}{v_r}$ ^[11], 其中 v_i 和 v_r 分别为入射波和折射波的波速. 进一步研究还发现, 非线性波的反射实际上是一种回折射(折射的再折射)^[6]. 迄今为止, 人们对于各种情况下非线性波的反射研究得还不够, 还需要作进一步研究.

本文以复金慈堡-朗道方程(CGLE)为模型研究了非线性波的两类反射. 一种是有折射波情况下的反射, 即回折射型反射; 另一种是无折射波情况下的反射, 即纯反射. 从理论上给出了产生反射的条件和

回折射型反射的反射角表达式, 并导出了反射波和入射波这两个区域的分界线与两种介质分界线的夹角 δ 的解析表达式, 发现了不存在折射波情况下的反射, 其反射角随波的频率增大而增大. 得到理论与数值模拟一致的结果.

2. 模 型

复金慈堡-朗道方程可以描述各类现象, 从各种非线性波到二阶相变, 从超导性、超流性、爱因斯坦凝聚到液晶^[13], 因此对复金慈堡-朗道方程描述的系统动力学行为研究引起了人们极大的兴趣^[14-17]. 考虑到复金慈堡-朗道方程描述的系统是一个典型的反应扩散系统, 该方程的数学表达式如下^[18]:

$$\frac{\partial A}{\partial t} = A - (1 + i\alpha) |A|^2 A + D(1 + i\beta) \nabla^2 A, \quad (1)$$

其中 A 是复数, i 是单位虚数, α 和 β 为系统参数, D 为扩散系数. 所以本文采用方程(1)来数值研究非线性波的反射. 在数值解二维方程(1)中, 时间离散采用二阶龙格库塔法, 空间离散采用二阶差分法, 在计算区域的边界上采用无流边界条件, 并固定取空间步长为 $\Delta x = \Delta y = 1.0$, 时间步长取为 $\Delta t = 0.05$, 计算区域被划分成 $N_x \times N_y = 400 \times 300$ 个格点.

数值模拟表明, 在计算区域的下边界上加上频

^{*} 国家自然科学基金(批准号:10765002)资助的课题.

[†] 通信联系人, E-mail: tangguoning@sohu.com

率为 ω 的周期驱动力,该驱动力能够在介质中产生频率为 ω 的向上传播的稳定平面波,如果这时候去掉周期驱动力,该稳定平面波的频率将会过渡到系统的固有频率上,为了方便获得不同频率入射波的反射,在方程(1)的右边加上驱动项:

$$F(t) = \begin{cases} e^{-i\omega t}, & (x, y) \in \Omega, \\ 0, & (x, y) \notin \Omega, \end{cases} \quad (2)$$

其中 ω 为驱动的圆频率, Ω 为驱动力作用的区域,该区域位于入射区的下边界上,其宽度为 2 个格点的长条.当系统参数满足 $1 + \alpha\beta > 0$ 时,方程(1)具有稳定平面波解

$$A(y, t) = A_0 e^{ky - i\omega t}. \quad (3)$$

将(3)式代入方程(1)中并利用分离变量法得到平面波的速度为

$$v = \sqrt{\frac{D\omega^2(\beta - \alpha)}{\omega - \alpha}}. \quad (4)$$

从上式可以看出,平面波的速度与系统参数、扩散系数和频率有关,当扩散系数为 0 时,波速为 0,介质传播波.

3. 理论分析

假设均匀介质被分成两个区,左边是扩散系数为 D_i 的入射区,右边是扩散系数为 D_r 的折射区,如图 1 所示,两种介质的分界线为 AB ,在同一时刻

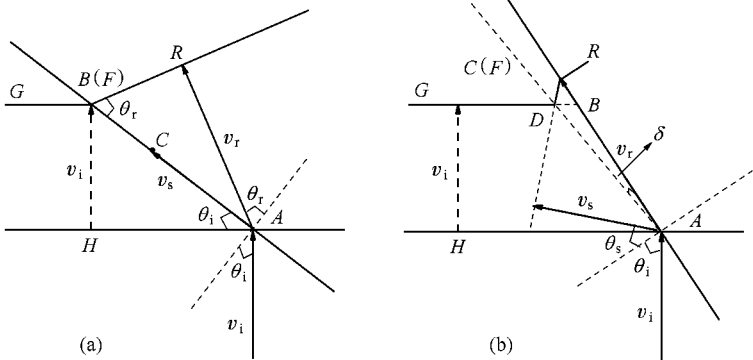


图 1 波的入射、折射和反射示意图(其中 v_i , v_r 和 v_s 分别代表入射、折射和反射波的传播速率,传播方向如图中箭头所示, GB , FR , CD 线分别为入射波、折射波、反射波波面)(a)入射角小于临界值(b)入射角大于临界值

3)如图 1(b)所示,当 $v_{fi} < v_{fs}$ ($\theta_i > \theta_s$) 时,因为在相同的时间内,反射波能从 A 点运动到 C 点,而入射波只能从 A 点运动到 B 点,反射波走在入射波前,反射发生.反射波所在区域为 $\triangle ACD$,其中 AD 为反射波区与入射波区的分界线.为了保证 $v_s = v_i$

入射波、折射波和反射波波面分别为 BG , FR , CD , 相应的波速分别为 v_i , v_r 和 v_s ,传播方向如图中箭头所示,入射角、折射角和反射角分别为 θ_i , θ_r 和 θ_s .在数值研究过程中,我们通过调节分界线 AB 与计算区域的下边界的夹角来获得不同的入射角.根据(4)式可知 $v_s = v_i$,因此入射波、折射波和反射波波面 BG , FR , CD 与分界线 AB 的交点 B , F , C 沿分界线运动的速率分别为

$$v_{fi} = \frac{v_i}{\sin\theta_i}, v_{fr} = \frac{v_r}{\sin\theta_r}, v_{fs} = \frac{v_i}{\sin\theta_s}. \quad (5)$$

当入射波由 AH 面传播至 BG 面时有:

1)如图 1(a)所示,当 $v_{fi} > v_{fs}$ ($\theta_i < \theta_s$) 时,如果入射波和反射波可以叠加在同一个区域,则在相同的时间内,入射波能从 A 点运动到 B 点,但反射波只能从 A 点运动到 C 点,入射波走在反射波前,由于入射波和反射波不能同在一个区域,所以只能观察到入射波,却无法观察到反射波.这时我们用反射角为 90° 来表示反射波不出现.考虑折射波服从 Snell 定律

$$\frac{v_i}{\sin\theta_i} = \frac{v_r}{\sin\theta_r}, \quad (6)$$

所以有 $v_{fi} = v_{fr}$,即 F 点与 B 点重合.

2)当 $v_{fi} = v_{fr} = v_{fs}$ 时,反射处于临界状态.这时的入射角为临界入射角 θ_{ic} ,而且反射角正好等于临界入射角 $\theta_s = \theta_{ic}$.

AD 线必须是角 $\angle GDC$ 的平分线,由此可以得到 AD 线与介质分界线 AB 的夹角 δ 为

$$\delta = \frac{\theta_i - \theta_s}{2}, \quad (7)$$

我们把这个角称为平分线角. δ 越大,反射就越明

显, 当入射角等于 90° 时, 平分线角 δ 达到最大, 所以反射就最明显.

从上述分析可以得到 (i) 假设反射波是由折射波的回折射产生的, 我们称这种反射为回折射型反射. 考虑平面波由低速介质入射到高速介质情况, 对于这种反射的产生条件是 $v_r = v_{fr} = v_{fs} > v_{fi}$. 当反射处于临界状态时有 $v_r = v_{fr} = v_{fi}$, 折射角为 90° , 临界角

$\theta_{ic} = \arcsin \frac{v_i}{v_r}$, 当 $\theta_i > \theta_{ic}$ 时, $\frac{v_i}{\sin \theta_i} < v_r$, 所以 $v_r = v_{fr} \geq v_{fi}$, 导致介质分界线被折射波占据, 折射波产生回折射形成反射波, 这种情况与图 1(b) 所示的 C 点与 F 点重合对应, 所以 $v_{fs} = v_{fr} = v_r$, 由此得到反射角为

$$\theta_s = \arcsin \frac{v_i}{v_r}. \quad (8)$$

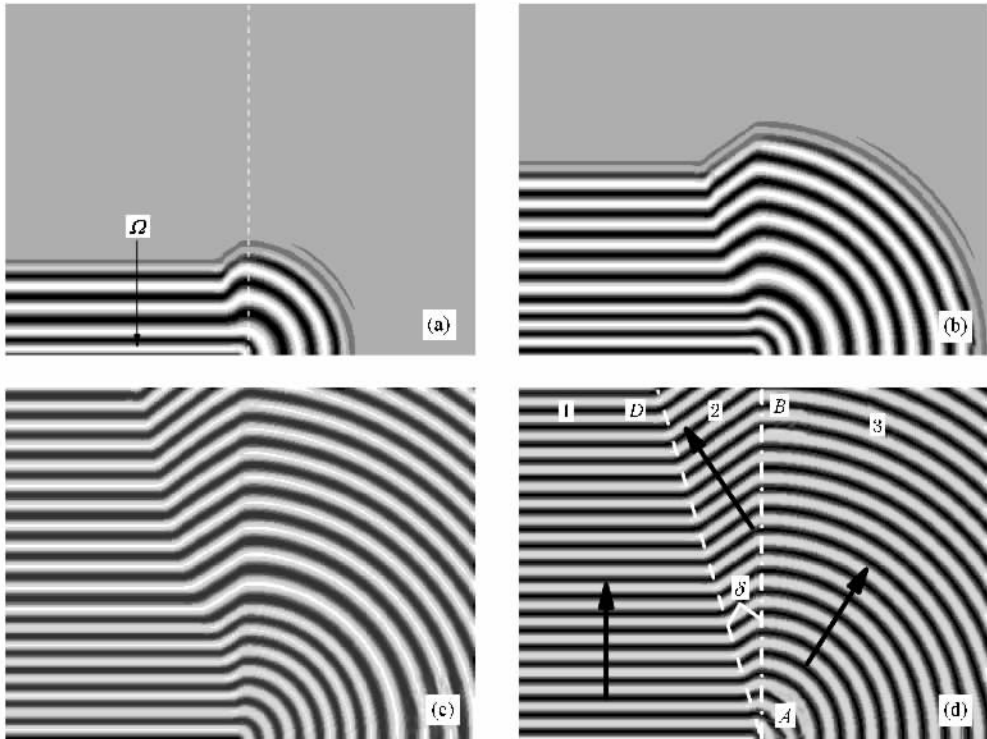


图 2 平面波的入射、折射和反射演化图 ($\theta_i = 90^\circ$, $D_i = 1.0$, $D_r = 1.5$, $\omega = -0.1$). (a) (b) (c) (d) 分别对应 $t = 25, 50, 100, 500$ 时刻变量 A 的实部的灰度图. (a) 中入射介质的下边界为驱动力区域 Ω . (d) 中 AB, AD 两白色的虚线分别与图 1 中的 AB, AD 两条线相对应, 1, 2, 3 分别代表入射区、反射区和折射区, 箭头表示波的传播方向)

首先研究存在折射波情况下的反射. 驱动圆频率为 $\omega = -0.1$, 入射介质的扩散系数为 $D_i = 1.0$, 折射介质的扩散系数为 $D_r = 1.5$. 在此参数下, 根据 (4) 式可知 $v_i < v_r$. 图 2 给出了当入射角等于 90° 时, 波的入射、反射和折射的演化图形, 其中图 2(a), (b) (c) 是波速不稳定时的结果, 这时波的频率略低于波源频率, (d) 是波速稳定时的结果. 模拟得到入

(8) 式和 (4) 式结果表明, 反射角正好等于临界入射角, 反射角为常数, 该常数与波的频率、扩散系数和系统参数有关. 当平面波由高速介质进入低速介质时, 由于数值模拟得不到稳定的折、反射波, 本文不考虑该情况下的反射. (ii) 假设反射波与折射波无关, 这种反射波我们称为纯反射, 只要 $v_{fs} > v_{fi}$, 就会产生纯反射.

4. 数值模拟结果

考虑到改变系统参数, 其结果与改变 ω, D 结果相同, 本文研究中, 系统参数固定取 $\alpha = 0.2, \beta = -1.4$, 驱动频率 ω 和扩散系数 D 为可变参数, 在此参数下, 方程 (1) 描述的介质为振荡介质.

射波、折射波和反射波在稳定后的圆频率都等于波源 0.1 , 折射角为 $\theta_r = 90^\circ$, 反射角约为 $\theta_s = 55^\circ$, 根据 (4) 式得到入射和反射波速率分别为 $v_i = v_s = 0.23$, $v_r = 0.28$, 这些速率值与测量结果一致. 根据 (8) 式 $\theta_s = \arcsin \frac{v_i}{v_r} = 54.7^\circ$, 这说明, 反射波与折射波满足 Snell 定律, 反射是一种回折射. 根据 (7) 式得到平分

线角 $\delta = 17.5^\circ$,与测量结果 $\delta = 17^\circ$ 在误差范围内一致(本文角度测量误差约为 0.5°)。

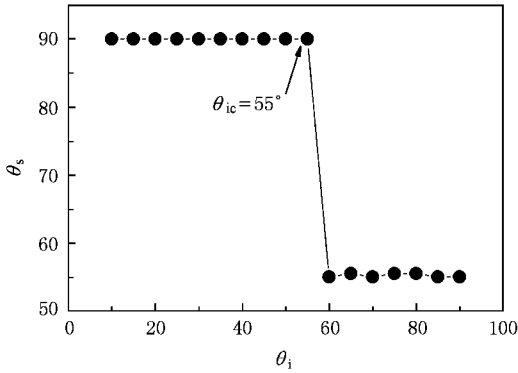


图3 反射角随入射角的变化曲线(参数与图2相同)

为了了解反射角 θ_s 与入射角 θ_i 的关系,图3给出了反射角随入射角变化的关系曲线.从图3我们可以看出:当入射角小于 55° 时,反射波不存在,我们用反射角 $\theta_s = 90^\circ$ 表示,因为这时可以认为反射波沿介质分界面运动,但是反射区域面积为0.当入射角大于 55° 时,出现反射,并且随着入射角的增大,反射角几乎不变,其值约为 55° . 这结果表明反射角等于临界入射角.这些结果与理论分析结果(8)式和文

献[1]的实验结果一致.

为了进一步了解反射波与折射波的关系,下面考虑不存在折射情况下波的反射.取驱动频率为 $\omega = -0.2$,入射介质的扩散系数固定取 $D_i = 1.0$,折射介质的扩散系数固定取 $D_r = 0.0$,这时在折射介质中不存在折射波.

为减少形成稳定反射波的暂态时间,我们先在均匀介质产生稳定的向上传播的平面波后,然后抹去折射区的波来获得反射波.为观察到清晰的反射,取入射角为 90° ,得到反射波随时间的演化如图4所示.测得反射角为约 $\theta_s = 45^\circ$,入射波和反射波速率分别为 $v_i = v_s = 0.40$,反射波面与介质分界线交点的

运动速率 $v_{is} = 0.56$, $\delta = 22.5^\circ$. 根据 $\sin\theta_s = \frac{v_s}{v_{is}}$ 算得反射角为 $\theta_s = 45.6^\circ$,根据(7)式得到 $\delta = 22.5^\circ$,理论与数值模拟结果在误差范围内一致.为了了解反射角 θ_s 与入射角 θ_i 的关系,在图4的参数下图5给出了反射角随入射角的变化关系曲线.由图5我们可以知道:当入射角大于 45° 时,反射波开始形成,随着入射角的继续增大,反射角近似不变,其值约为 45° . 由此可知形成的反射角是不变的,反射角等于临界入射角,与回折射情况相同.

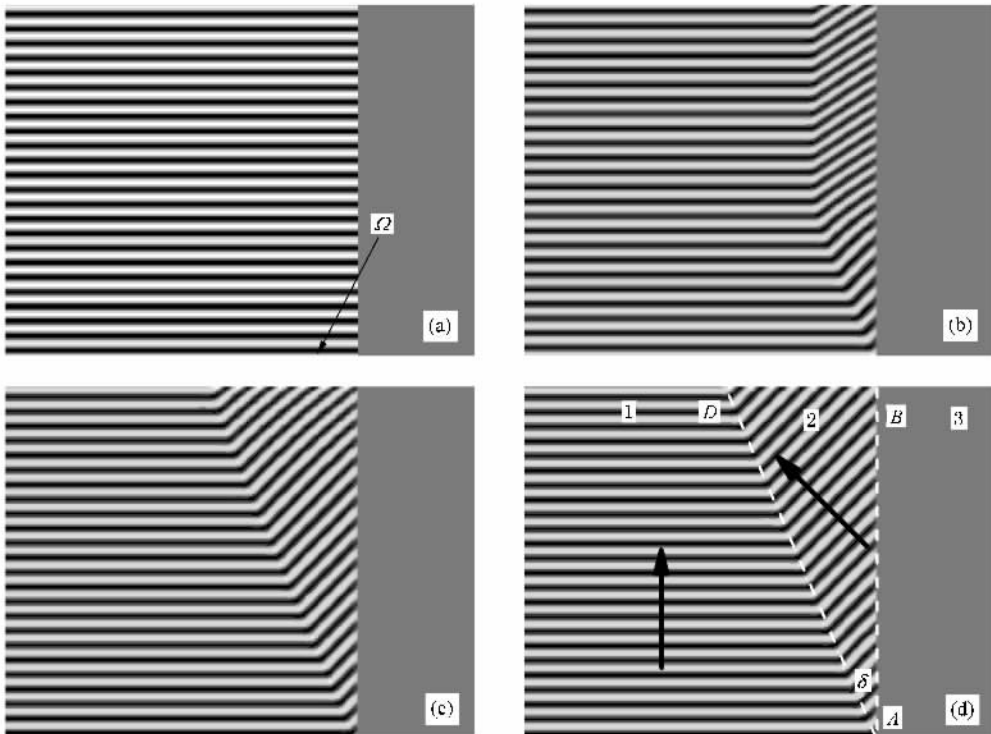


图4 不同时刻的反射波斑图($D_i = 1.0$, $D_r = 0.0$, $\omega = -0.2$; (d)中 AB , AD 两白色的虚线分别与图1中的 AB , AD 两条线相对应,箭头表示波的传播方向) (a) $t = 0$; (b) $t = 100$; (c) $t = 250$; (d) $t = 500$

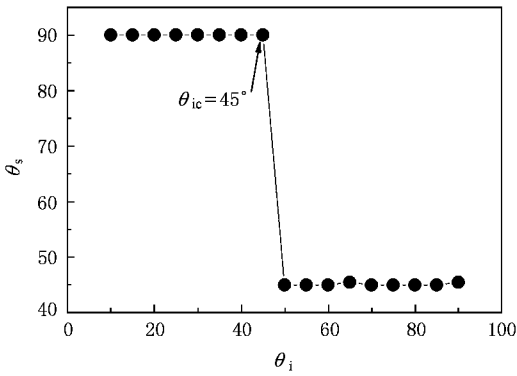


图 5 反射角随入射角的变化关系(参数与图 4 相同)

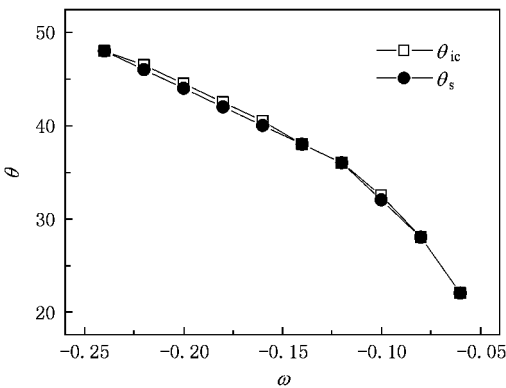


图 6 反射角和临界入射角随波频率的变化, $D_i = 1.0$, $D_r = 0.0$

由(4)式可知,波速与波的频率有关,为了了解在纯反射情况下波的频率对反射角 θ_s 和临界入射角 θ_{ic} 影响,图 6 给出反射角 θ_s 和临界入射角 θ_{ic} 随驱动圆频率(波频) ω 变化的关系曲线.由图我们可以知道:反射角与临界入射角在误差范围内相等,并且随着波频率的增大,反射角和临界入射角逐渐增大,表明入射波频率对反射角有影响.

5. 结 论

本文的理论分析和数值模拟结果表明:非线性波的反射可以分成两类,一类是回折射型反射波,另一类为纯反射波,它们产生的机理有所不同.回折射反射波与折射波有关,反射波是折射波的回折射产生的,纯反射与折射波无关.不论是哪一种反射,只有当入射角大于临界值才发生反射,反射角都等于临界入射角,反射角不随入射角变化而变化,但是反射角与系统参数、扩散系数和波的频率有关.对于纯反射,其反射角随波的频率增大而增大.这些结果对人们了解心脏中电信号的传播有积极意义.由于纯反射的反射波与入射波之间不遵循 Snell 定律,所以反射角还无法从理论上导出,因此需要进一步研究解决.

[1] Zhabotinsky A M , Eager M D , Epstein I R 1993 *Phys. Rev. Lett.* **71** 1526
 [2] Kosek J , Marek M 1995 *Phys. Rev. Lett.* **74** 2134
 [3] Hwang S C , Timothy H H 1996 *Phys. Rev. E* **54** 3009
 [4] Brazhnik P K , Tyson J J 1996 *Phys. Rev. E* **54** 1958
 [5] Pechenik L , Levine H 1998 *Phys. Rev. E* **58** 2910
 [6] Sainhas J , Dilão R 1998 *Phys. Rev. Lett.* **80** 5216
 [7] Rabinovitch A , Gutman M , Aviram I 2003 *Phys. Rev. E* **67** 036212
 [8] Remhof A , Wijngaarden R J , Griessen R 2003 *Phys. Rev. Lett.* **90** 145502
 [9] Gutman M , Aviram I , Rabinovitch A 2004 *Phys. Rev. E* **69** 016211

[10] Skaar J 2006 *Phys. Rev. E* **73** 026605
 [11] Zhang R , Yang L , Zhabotinsky A M , Epstein I R 2007 *Phys. Rev. E* **76** 016201
 [12] Hu Y H , Fu X Q , Wen S C , Su W H , Fan D Y 2006 *Chin. Phys. Lett.* **15** 2970
 [13] Aranson I S , Kramer L 2002 *Rev. Mod. Phys.* **74** 99
 [14] Xiao J H , Hu G , Hu B B 2004 *Chin. Phys. Lett.* **21** 1224
 [15] Wang X , Tian X , Wang H L , Ouyang Q , Li H 2004 *Chin. Phys. Lett.* **21** 2365
 [16] Shao X , Ren Y , Ouyang Q 2006 *Chin. Phys.* **15** 513
 [17] Tang Z H , Yan J R , Liu L H 2006 *Chin. Phys.* **15** 2638
 [18] Shao X , Wu Y B , Zhang J Z , Wang H L , Ouyang Q 2008 *Phys. Rev. Lett.* **100** 198304

Reflection of plane wave in oscillatory media^{*}

Li Yao-Ping Gu Guo-Feng Lu Hua-Chun Dai Yu Tang Guo-Ning[†]

(College of Physics and Electronic Engineering , Guangxi Normal University , Guilin 541004 , China)

(Received 19 January 2009 ; revised manuscript received 18 March 2009)

Abstract

The reflection of plane waves in oscillatory media described by complex Ginzburg-Landau equation has been researched. The reflection condition and the angle formed by the boundary line between incident and reflected waves and the boundary line separating two regions of different kinetics are theoretically given. Two kinds of reflections have been found. One is a back refraction-induced reflection. The corresponding angle is theoretically obtained. The other is a pure reflection, which is independent of refraction. The theoretical results are supported by numerical results. The theoretical and numerical results show that the reflection takes place only if the angle of incidence is larger than a critical value. The angle of reflection is equal to the critical angle of incidence, and it increases as the frequency of the incident wave increases for the pure reflection.

Keywords : complex Ginzburg-Landau equation , plane wave , reflection

PACC : 0547 , 4225G

^{*} Supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10765002).

[†] Corresponding author. E-mail : tangguoning@sohu.com