

超混沌吸引子的翼倍增方案^{*}

胡国四[†]

(烟台大学光电信息科学技术学院,烟台 264005)
(2009 年 1 月 29 日收到,2009 年 5 月 6 日收到修改稿)

通过对一个五维超混沌系统施加平移变换、镜像映射和滞回切换操作,将多翼混沌吸引子结构由双翼倍增为四翼,施加 $n-1$ 次相似操作可以得到 2^n 翼的超混沌吸引子.设计了一个简单的电路实现吸引子翼数量的倍增.该方法在保留了系统原有超混沌特性的基础上,增加了吸引子的拓扑结构复杂性,使之更适合保密通信等领域的应用.

关键词:多涡卷吸引子,多翼吸引子,超混沌系统

PACC:0545

1. 引言

近年来,混沌由于其电子、通信、系统控制等领域的广阔应用前景而得到广泛关注和深入研究.尤其是混沌信号可以当作保密通信中的加密信号使用,对产生复杂混沌吸引子的信号发生器方面的研究引起了人们的极大兴趣.利用混沌反控制技术,设计超混沌系统或构造具有多涡卷或多翼拓扑结构的吸引子成为研究的一个热点.

设计超混沌系统的方法主要有状态反馈^[1-11]、近似时滞状态反馈^[12]、外部驱动^[13]、切换控制^[14,15]等.目前在构造超混沌系统方面并没有系统的设计方案,一般均采用仿真计算来发现和验证超混沌吸引子的存在.在增加混沌吸引子的拓扑结构复杂性方面,分为两个方向.一是利用 Chua 系统的结构特点(可以把吸引子分为涡卷区和键波区两部分),通过构造不同的非线性函数在系统中产生动力学行为更为复杂的多涡卷混沌吸引子^[16]以满足工程需要,其中主要包括利用分段线性函数^[17,18]、阶梯波^[19]等方法.目前构造多涡卷吸引子已经具备完善的理论体系和方法.二是在双翼 Lorenz 系统族基础上,对微分方程做些许调整,得到四翼吸引子^[20-22].或增加非线性项,或加入状态反馈,构造出了具有三翼或四翼的吸引子^[23-26].这些方法均采用二次项或三次项的连续光滑函数,构造出的混沌系统也是光滑连续自

治系统.其构造过程主要依赖系统仿真发现.在分析了一类具有相似方程的超混沌系统的基础上,利用坐标变换方法^[27]构造了一类具有四翼结构的超混沌吸引子.该方法的主要缺点是通用性不够强,不能用于构造多于四翼结构的吸引子.通过将 Lorenz 系统族中的乘积项替换为分段二次函数^[28],系统可以产生 $2n$ 翼的吸引子,或利用分段二次函数和阶梯函数在 Shimizu-Morioka 系统中产生 $n \times m$ 翼的吸引子^[29].

本文在一个双翼超混沌系统的基础上,依次通过施加平移变换、镜面映射和滞回切换将超混沌吸引子由两个翼的结构变换为四翼的拓扑结构.重复施加 $n-1$ 次相似操作,可以构造出具有 2^n 翼的超混沌吸引子.由超混沌特性和多翼(多涡卷)结构结合而成的混沌吸引子将具有更大的实际应用价值.

2. 系统构造

以文献 [7] 中的下列系统为例:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -10x + 10y + u, \\ \dot{y} &= 28x - xz - y - v, \\ \dot{z} &= xy - \frac{8}{3}z, \\ \dot{u} &= -xz + k_1 u, \\ \dot{v} &= k_2 y. \end{aligned} \quad (1)$$

当 $k_1 = 2, k_2 = 8$ 时,系统产生如图 1 所示具有 3 个正 Lyapunov 指数的超混沌吸引子,该吸引子为双翼结构.

^{*} 烟台大学青年教师科学基金(批准号:WL07Z6)资助的课题.

[†] E-mail: 8051cpu@gmail.com

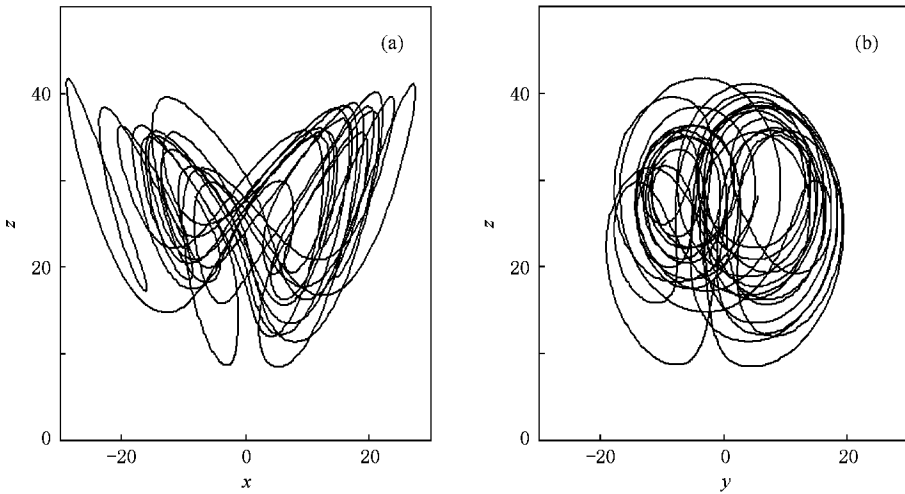


图 1 系统 1 的吸引子相图 (a)z-x, (b)z-y

将系统 1 的 z 变量替换为 $z + 12$, 得新方程为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -10x + 10y + u, \\ \dot{y} &= 28x - \alpha(z + 12) - y - v, \\ \dot{z} &= xy - \frac{8}{3}(z + 12), \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \dot{u} &= -\alpha(z + 12) + 2u, \\ \dot{v} &= 8y. \end{aligned}$$

这等效于将吸引子在 z 轴方向向下平移, 使得吸引子的轨迹有很小一部分穿越 $z = 0$ 平面, 如图 2 所示.

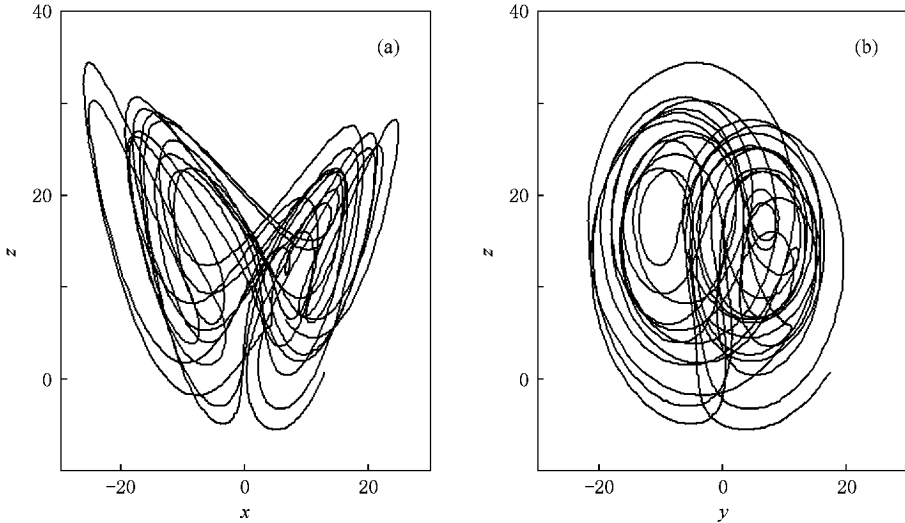


图 2 系统 2 的吸引子相图 (a)z-x, (b)z-y

对系统 2 再做镜像映射 将 z 变量替换为 $|z|$, 得

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -10x + 10y + u, \\ \dot{y} &= 28x - \alpha(|z| + 12) - y - v, \\ \dot{z} &= \text{sign}(z) \left(xy - \frac{8}{3}(|z| + 12) \right), \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \dot{u} &= -\alpha(|z| + 12) + 2u, \\ \dot{v} &= 8y. \end{aligned}$$

其中 $\text{sign}(z)$ 为 z 变量的符号函数. 系统 (3) 可以产

生如图 3 所示的四翼吸引子.

分析吸引子轨迹在 $z = 0$ 平面附近的变化趋势, 当 $z \rightarrow 0$ 时,

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \text{sign}(z) \left(xy - \frac{8}{3}(|z| + 12) \right) \\ &= \begin{cases} xy - 32 - \frac{8}{3}z & (z > 0), \\ -(xy - 32) - \frac{8}{3}z & (z < 0). \end{cases} \end{aligned} \quad (4)$$

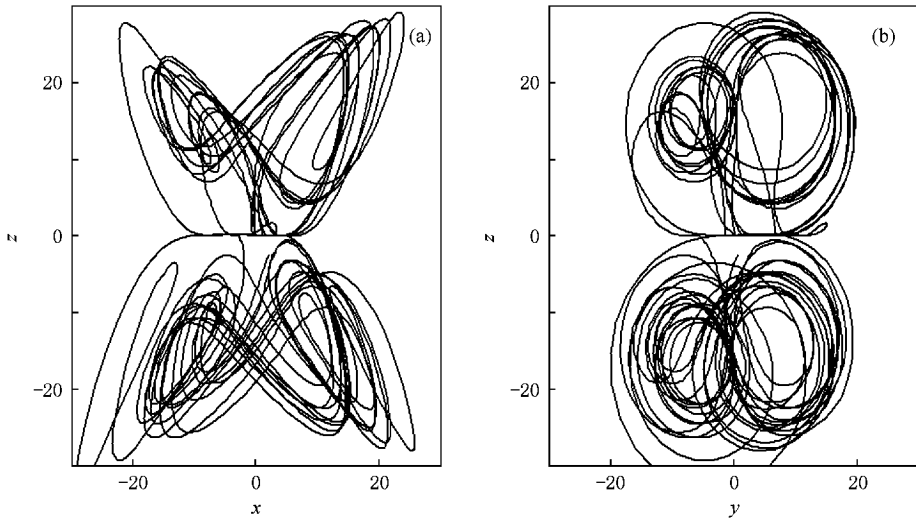


图 3 系统 3 的吸引子相图 (a)z-x, (b)z-y

设 $c(t) = xy - 32$,解方程 (4) 得

$$z(t) = e^{-\frac{8}{3}t} \left(\pm \int_0^t c(t) e^{\frac{8}{3}u} du + z_0 \right). \quad (5)$$

显然 $e^{-\frac{8}{3}t}$ 恒大于零,但 $c(t)$ 可正可负.下面分析 $c(t)$ 的符号对轨迹的影响.(1) 当 $c(t) > 0$ 时,此时在 $z > 0$ 区域, $z(t)$ 会随着时间延续而增大,亦即会远离 $z = 0$ 平面;在 $z < 0$ 区域, $z(t)$ 会随着时间延续而减小,同样也会远离 $z = 0$ 平面.(2) 当 $c(t) < 0$ 时,此时在 $z > 0$ 区域, $z(t)$ 会随着时间延续而减小,亦即会接近或越过 $z = 0$ 平面;在 $z < 0$ 区域, $z(t)$ 会随着时间延续而增加,同样也会接近或越过 $z = 0$ 平面.所以吸引子轨迹在接近 $z = 0$ 平面时,如果 $c(t) < 0$,则会在 $z = 0$ 平面附近持续一段时间,演化出一条接近直线状态的微弱振荡曲线.

系统 3 在 $z = 0$ 平面处的局部子系统为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -10x + 10y + u, \\ \dot{y} &= 16x - y - v, \\ \dot{u} &= -12x + 2u, \\ \dot{v} &= 8y. \end{aligned} \quad (6)$$

显然,系统 (6) 只有一个平衡点 $(0, 0, 0, 0)$,其子系统的 Jacobi 矩阵为常数矩阵.

$$J = \begin{pmatrix} -10 & 10 & 1 & 0 \\ 16 & -1 & 0 & -1 \\ -12 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

矩阵 J 的特征值和特征向量如表 1 所列.

由于有三个特征值大于零,一个特征值小于零,

表 1 系统 6 的 Jacobi 矩阵的特征值和特征向量

特征值	对应的特征向量 (x, y, u, v)
-18.3884	$(0.6587, -0.5913, 0.3877, 0.2573)$
6.0975	$(-0.2269, -0.4317, 0.6644, -0.5663)$
0.1837	$(0.0590, 0.0211, 0.3897, 0.9188)$
3.1072	$(-0.0785, -0.1880, 0.8510, -0.4841)$

所以平衡点为不稳定的鞍点.从表 1 可以看出,对应正特征值的特征向量,其 x 和 y 的符号均相同,对应负特征值的特征向量,其 x 和 y 的符号相反.所以从 $x-y$ 平面的任一点(平衡点除外)出发,经过一段时间演化后必然走向发散方向(x 和 y 的符号相同的方向),此时 x 和 y 符号相同,故其二者乘积往正方向增大,最终会导致 $c(t) > 0$.一旦 $c(t) > 0$,轨迹将跳出 $z = 0$ 平面附近的微弱振荡曲线,进入吸引子的正常轨迹.

为了使得吸引子轨迹能很快走出 $z = 0$ 平面附近微弱振荡曲线,可以将系统 (3) 中的 $\text{sign}(z)$ 替换为具有滞回特性的符号函数

$$H(z) = \begin{cases} 1 & (z \rightarrow 1), \\ -1 & (z \rightarrow -1). \end{cases} \quad (8)$$

新系统为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -10x + 10y + u, \\ \dot{y} &= 28x - x(|z| + 12) - y - v, \\ \dot{z} &= H(z) \left(xy - \frac{8}{3}(|z| + 12) \right), \\ \dot{u} &= -x(|z| + 12) + 2u, \\ \dot{v} &= 8y. \end{aligned} \quad (9)$$

其吸引子相图如图 4 所示.

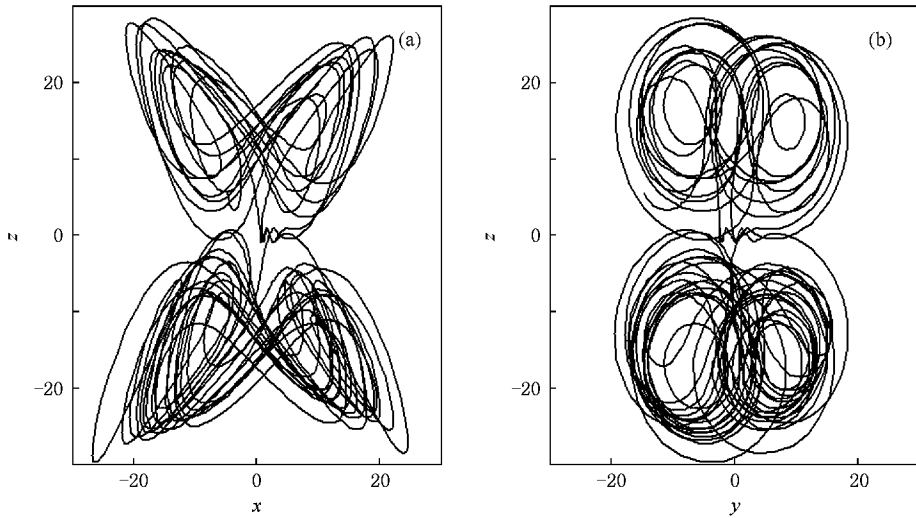


图 4 系统 (9) 的吸引子相图 (a)z-x (b)z-y

显然,加入了滞回符号切换后, $z=0$ 平面附近的轨迹在做几次滞回切换后就进入上或下吸引子轨迹中.由于平移变换和镜像映射不更改系统的 Jacobi 矩阵,如果初始系统为超混沌系统,则结果系统将仍然是超混沌系统.继续对 x 变量施加平移变换、镜像映射和滞回切换,得

$$\begin{aligned} \dot{x} &= H(x) \left(-10(|x|-20) + 10y + u \right), \\ \dot{y} &= 28(|x|-20) - (|x|-20)(|z|+12) - y - v, \\ \dot{z} &= H(z) \left((|x|-20)y - \frac{8}{3}(|z|+12) \right), \quad (10) \\ \dot{u} &= -(|x|-20)(|z|+12) + 2u, \\ \dot{v} &= 8y. \end{aligned}$$

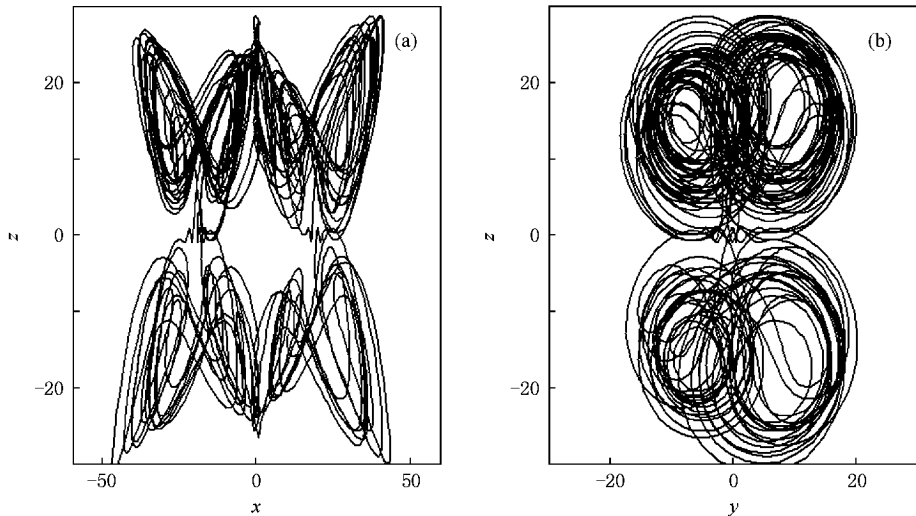


图 5 系统 (10) 的吸引子相图 (a)z-x (b)z-y

系统 (10) 可以产生 8 翼超混沌吸引子,如图 5 所示.显然,对系统施加平移变换、镜像映射和滞回切换 $n-1$ 次,可以产生 2^n 翼的超混沌吸引子.

3. 电路实验

为了验证 2^n 翼超混沌吸引子的存在,在此设计一个模拟电路.在原混沌电路^[7]的基础上,需要添加两个主要模块.(1)绝对值加偏移电路,即 $|x| + e$.使用精密整流电路作为绝对值求解电路,使用运算放大器加法电路完成偏移运算.此电路比较简单(只需要 3 个运算放大器即可),所以电路图省略.(2)滞回变量符号乘积电路,即 $H(x)(x, y, z, u,$

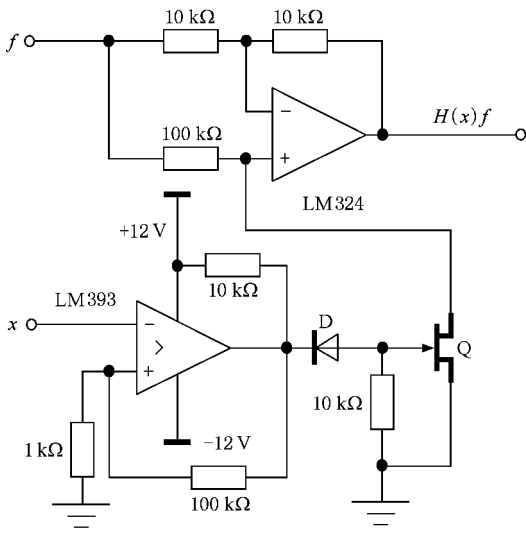


图 6 滞回变量符号乘积电路

v) 在文献 [13] 中符号乘积电路采用运算放大构造的反向器从 f 中得到 $-f$ 并通过比较器输出的控制信号控制模拟开关 CD4052 选择 $-f$ 和 f 中的一个。本文采用如图 6 所示电路, 将滞回特性和符号乘积统一在一个简单电路中。由 LM393 构成的滞回电压比较器输出变量 x 的符号电压, 控制 n 型场效应晶体管 Q 导通或截止; $x < 0$, 则 Q 导通, LM324 工作于反向器状态; $x > 0$, 则 Q 截止, LM324 工作于跟随器

状态), D 的作用为防止在 Q 的漏极上产生正压影响反向器的虚地电压。

为使电路简明起见, 在此只实现系统 (9) 的电路设计。使用运算放大器完成加减法和积分运算, 使用 AD633 完成乘法运算, 如图 7。同原混沌电路^[7]相比, 图 7 只增加了虚线框中的部分。将 z 变量对应电路中的加法部分和积分部分中间的连接断开, 加入滞回变量符号乘积电路 $H(z)f$; 将 z 变量通过绝对值加偏移电路得到 $|z| + 0.6$, 并将 $|z| + 0.6$ 替换原先所有出现 z 变量的地方。示波器记录混沌电路的波形, 得到图 8 所示的四翼超混沌吸引子相图。

从图 8 给出的结果可知, 四翼超混沌吸引子是可以模拟电路实现的。

4. 结 论

通过对一个连续光滑超混沌系统的方程进行平移变换、镜像映射和滞回切换, 将超混沌系统的吸引子由原先简单的双翼结构转变为具有四个翼的复杂结构, 对系统施加 $n - 1$ 次相似变换后, 可以产生 2^n 翼的超混沌吸引子。其优点是不需要给系统增加乘积项。在电路实现方面, 只需要在原系统基础上增加两个简单模块(绝对值加偏移模块和滞回变量符号

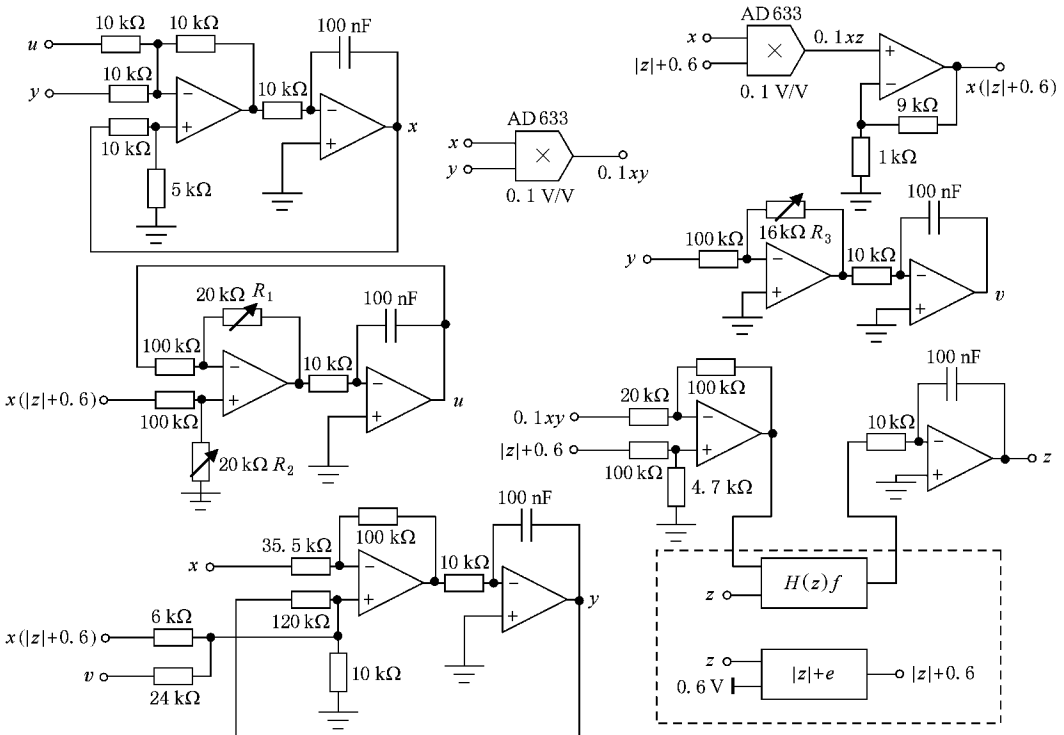


图 7 系统(9)电路实现

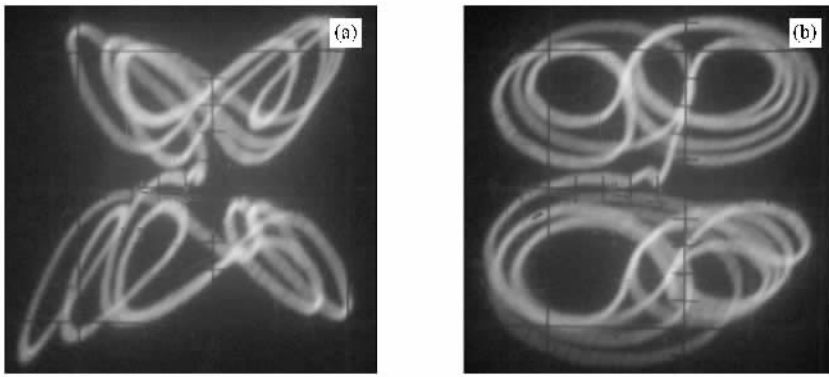


图 8 四翼超混沌吸引子示波器相图 (a) $x-z$, (b) $y-z$

乘积模块)即可完成,电路方案十分简单,实现吸引子的翼倍增只需要在原系统上增加 4 个运算放大器和 1 个电压比较器.该 2ⁿ 翼吸引子设计方法也可以

用于其他连续光滑超混沌系统或 Chua 系统中,这为保密通信领域提供了更好的混沌信号发生器的选择方案.

- [1] Li Y X, Tang W K S, Chen G R 2005 *Int. J. Bifur. Chaos* **15** 3367
- [2] Jia Q 2007 *Phys. Lett. A* **366** 217
- [3] Wang J Z, Chen Z Q, Yuan Z Z 2007 *Int. J. Mod. Phys. C* **18** 1013
- [4] Gao T G, Chen Z Q, Yuan Z Z, Chen G R 2006 *Int. J. Mod. Phys. C* **17** 471
- [5] Wang G Y, Zheng Y, Liu J B 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 3113 (in Chinese)[王光义、郑 艳、刘敬彪 2007 物理学报 **56** 3113]
- [6] Liu Y Z 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 1439 (in Chinese)[刘扬正 2008 物理学报 **57** 1439]
- [7] Hu G S 2009 *Int. J. Bifur. Chaos* **19** 651
- [8] Wang X Y, Wang M J 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 5136 (in Chinese) [王兴元、王明军 2007 物理学报 **56** 5136]
- [9] Wang G Y, Liu J B, Zheng X 2007 *Chin. Phys. B* **16** 2278
- [10] Wang G Y, Bao X L, Wang Z L 2008 *Chin. Phys. B* **17** 3596
- [11] Cai G L, Zheng S, Tian L X 2008 *Chin. Phys. B* **17** 4039
- [12] Hu G S, Jiang S Q 2008 *Int. J. Bifur. Chaos* **18** 3485
- [13] Li Y X, Chen G R, Tang W K S 2005 *IEEE Trans. Circ. Syst. II* **52** 204
- [14] Yu S M, Yu Z D 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 6859 (in Chinese)[禹思敏、禹之鼎 2008 物理学报 **57** 6859]
- [15] Liu Y Z, Jiang C S, Li X C, Sun H 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 6808 (in Chinese)[刘扬正、姜长生、李心朝、孙 晗 2008 物理学报 **57** 6808]
- [16] Lü J H, Chen G R 2006 *Int. J. Bifur. Chaos* **16** 775
- [17] Lou X H, Li H Q, Dai X G 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 7511 (in Chinese)[罗小华、李华青、代祥光 2008 物理学报 **57** 7511]
- [18] Yu S M, Lin Q H, Qiu S S 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 25 (in Chinese)[禹思敏、林清华、丘水生 2003 物理学报 **52** 25]
- [19] Yalcin M E, Suykens J A K, Vandewalle J 2002 *Int. J. Bifur. Chaos* **12** 23
- [20] Elwakil A S, Özoguz S, Kennedy M P 2002 *IEEE Trans. Circuits Syst. I* **49** 527
- [21] Elwakil A S, Özoguz S, Kennedy M P 2003 *Int. J. Bifur. Chaos* **13** 3093
- [22] Yu S M, Tang K S, Lü J H, Chen G R 2008 *IEEE Int. Symp. Circ. Syst. Seattle, USA 18–21 May 2008*, p768–771
- [23] Qi G Y, Wyk B J, Wyk M A 2009 *Chaos Solitons Fract.* **40** 2016
- [24] Hu G S 2009 *Int. J. Mod. Phys. C* **20** 323
- [25] Lü J H, Chen G R, Cheng D Z 2004 *Int. J. Bifur. Chaos* **14** 1507
- [26] Qi G Y, Chen G R, Li S W, Zhang Y H 2006 *Int. J. Bifur. Chaos* **16** 859
- [27] Hu G S 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 3734 (in Chinese)[胡国四 2009 物理学报 **58** 3734]
- [28] Yu S M, Tang W K S, Lü J H, Chen G R 2008 *Int. J. Circ. Theor. Appl.* DOI: 10.1002/cta.558
- [29] Yu S M, Tang W K S, Lü J H, Chen G R 2008 *IEEE Trans. Circ. Syst. II* **55** 1168

Scheme for doubling the number of wings in hyperchaotic attractors^{*}

Hu Guo-Si[†]

(*Institute of Science and Technology for Opto-Electronic Information , Yantai University , Yantai 264005 , China*)

(Received 29 January 2009 ; revised manuscript received 6 May 2009)

Abstract

The construction methods for designing multi-wing attractors are rarely mentioned little. With the application of coordinate translation , mirror mapping and hysteresis switching to an existing five-dimensional hyperchaotic system , we can double the number of wings and a four-wing attractor is realized. If similar operations have been applied to the system $n - 1$ times , a 2^n - wing attractor can be constructed. A simple circuit implementation was designed for doubling the number of wings in attractors. On the basis of preserving the hyperchaotic property of resulting system , the complexity of attractor is enhanced and it is more suitable for use in secure encryption communication.

Keywords : multi-scroll attractors , multi-wing attractors , hyperchaotic system

PACC : 0545

^{*} Project supported by the Scientific Research Foundation for Young Teachers of Yantai University , China (Grant No. WL07Z6).

[†] E-mail : 8051cpu@gmail.com