第 58 卷 第 12 期 2009 年 12 月
1000-3290/2009/58(12)/8260-04

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.58,No.12,December,2009

非傍轴矢量光束二阶矩的发散特性*

邓小玖† 汪国安 刘彩霞 赖传伟

(合肥工业大学物理系,合肥 230009)

(2008 年 8 月 11 日收到;2009 年 3 月 5 日收到修改稿)

基于非傍轴矢量光束横截面上光强的精确表示和矢量二阶矩理论,应用严格的角谱表示的矢量衍射理论,对任意非傍轴矢量衍射光束的传输进行了系统的研究.给出了光束的束宽、横向发散角的积分表达式,论证了非傍轴矢量光束二阶矩的发散特性.对非傍轴矢量光束的束宽、发散角的定义及一些相关的问题进行了分析和讨论.

关键词:矢量衍射理论,光束传输,矢量二阶矩,发散特性

PACC:4210Q

1. 引 言

由传统光强定义的二阶矩理论适用于描述除硬边衍射光束以外的其他任意傍轴标量激光束的传输特性,相应的光束传输因子 $M^2 \geqslant 1$[1—3],与量子力学的不确定关系有一定的内在联系.经过十几年的发展,光强二阶矩理论推广到了非傍轴标量光束和非傍轴矢量光束,并分别定义了相应的光束传输因子 M^2[4—6].随着线度为波长和亚波长量级光源的应用日渐增多、新型微光学器件的不断诞生和现实应用激光技术向波长和亚波长领域的推进,对激光束在非傍轴领域内传输特性的研究将显得尤为重要[7—9].在非傍轴光束传输的矢量矩理论中,用时间平均 Poynting 矢量的 z 分量 $\langle S_z\rangle$ 作为光束横截面上光强的量度,是从光束能量传输的角度对光强的严格定义,因此非傍轴光束的矢量二阶矩便反映了光束能量传输的空间分布特性.众所周知,用传统光强定义的二阶矩理论描述非傍轴标量衍射光束时存在严重的积分发散问题[6,10],然而非傍轴矢量衍射光束二阶矩的发散特性并未引起人们足够的注意.本文基于非傍轴矢量光束横截面上光强的精确表示 $\langle S_z\rangle$ 和矢量二阶矩的定义,应用严格的矢量衍射理论论证了非傍轴矢量衍射光束二阶矩的发散特性,并就一些相关的问题进行了讨论.

2. 理论分析

为方便起见,且不失一般性,设入射光束的边界条件为

$$E_x(x,y,0) = \phi(x,y),$$
$$E_y(x,y,0) = 0. \tag{1}$$

由矢量衍射理论的角谱表示[11,12],光束在 $z>0$ 半空间传输的矢量衍射场可表示为

$$E_x(x,y,z) = \iint_{\infty} \psi(f_x,f_y,z) \times \exp[\mathrm{i}2\pi(xf_x + yf_y)]\,\mathrm{d}f_x\mathrm{d}f_y, \tag{2a}$$

$$E_y(x,y,z) = 0, \tag{2b}$$

$$E_z(x,y,z) = -\lambda \iint_{\infty} \frac{\psi(f_x,f_y,z)f_x}{\gamma} \times \exp[\mathrm{i}2\pi(xf_x + yf_y)]\,\mathrm{d}f_x\mathrm{d}f_y. \tag{2c}$$

这里

$$\psi(f_x,f_y,z) = \psi_0(f_x,f_y)\exp(\mathrm{i}kz\gamma), \tag{3a}$$

$$\psi_0(f_x,f_y) = \iint_{\infty} E_x(x,y,0) \times \exp[-\mathrm{i}2\pi(xf_x + yf_y)]\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{3b}$$

$\gamma = \sqrt{1-\lambda^2 f_x^2 - \lambda^2 f_y^2}$,其中 f_x,f_y 为横向空间频率.矢量光束横截面上的光强定义为[13,14]

$$\langle S_z\rangle = \langle \boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{e}_z\rangle, \tag{4}$$

其中 S 为 Poynting 矢量.由文献[13,14]的结论,忽

* 国家自然科学基金(批准号:50776084)资助的课题.

† E-mail:dengxjxls@sina.com

略无关紧要的常数因子，考虑到 $E_y(\boldsymbol{r})=0$，则矢量衍射光束横截面上的光强可表示为

$$\langle S_z\rangle = J_z + \mathrm{Re}\left[\frac{1}{\mathrm{i}k}E_z^*(\boldsymbol{r})\frac{\partial}{\partial z}E_z(\boldsymbol{r})\right] + \nabla\times\mathbf{F}\cdot\mathbf{e}_z, \tag{5}$$

其中

$$\boldsymbol{F} = \mathrm{Re}\left[\frac{1}{\mathrm{i}k}E_z^*(\boldsymbol{r})E_x(\boldsymbol{r})\right]\boldsymbol{e}_y,$$

$$J_z = \mathrm{Re}\left[\frac{1}{\mathrm{i}k}E_x^*(\boldsymbol{r})\frac{\partial}{\partial z}E_x(\boldsymbol{r})\right]. \tag{6}$$

这里 J_z 为非傍轴标量光束横截面上光强[13—15]，也称功率密度；$k=2\pi/\lambda$ 为波数.由于自由空间中的光场是无源场，$\nabla\cdot\mathbf{E}=0$，因而(5)式还可以进一步表示为

$$\langle S_z\rangle = J_z + \mathrm{Re}\left[\frac{1}{\mathrm{i}k}E_x(\boldsymbol{r})\frac{\partial}{\partial x}E_z^*(\boldsymbol{r})\right]. \tag{7}$$

若忽略光场的 z 分量，便过渡到非傍轴标量光束的情况.由(7)式经较为复杂的计算，可求得任一横截面上矢量光束的总功率为

$$\begin{aligned}P(z) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\langle S_z\rangle\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &= \iint_{f_x^2+f_y^2\leqslant 1/\lambda^2}|\psi_0(f_x,f_y)|^2\gamma\mathrm{d}f_x\mathrm{d}f_y\\ &\quad+\iint_{f_x^2+f_y^2\leqslant 1/\lambda^2}\frac{|\psi_0|^2}{\gamma}\lambda^2 f_x^2\mathrm{d}f_x\mathrm{d}f_y.\end{aligned} \tag{8}$$

显然，光束在传输过程中总功率 P 与 z 无关，这正是能量守恒的要求.取光束中心的传输方向为 z 轴的正向，则基于矢量光束横截面上光强 $\langle S_z\rangle$，定义二阶矩光束宽度为[5]

$$\begin{bmatrix} W_x^2(z) & W_{xy}^2(z)\\ W_{xy}^2(z) & W_y^2(z)\end{bmatrix} = \frac{4}{P}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\langle S_z\rangle\begin{bmatrix} x^2 & xy\\ xy & y^2\end{bmatrix}\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{9}$$

将(1)—(3)，(7)，(8)式代入(9)式，利用 Fourier 变换及 δ 函数的基本性质，可求得

$$\begin{aligned}W_x^2(z) &= -\frac{1}{\pi^2 P(z)}\mathrm{Re}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\psi_0^*(1-\lambda^2 f_y^2)}{\gamma^*}\right.\\ &\quad\left.\times\exp[\mathrm{i}kz(\gamma-\gamma^*)]\frac{\partial^2\psi_0}{\partial f_x^2}\mathrm{d}f_x\mathrm{d}f_y\right\}\\ &\quad+z\mathrm{Re}\left\{\frac{\mathrm{i}4\lambda}{\pi P(z)}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\psi_0^* f_x(1-\lambda^2 f_y^2)}{\gamma^*\gamma}\right.\\ &\quad\left.\times\exp[\mathrm{i}kz(\gamma-\gamma^*)]\frac{\partial\psi_0}{\partial f_x}\mathrm{d}f_x\mathrm{d}f_y\right\}\\ &\quad+z^2\frac{4\lambda^2}{P(z)}\iint_{f_x^2+f_y^2\leqslant 1/\lambda^2}|\psi_0|^2\frac{f_x^2(1-\lambda^2 f_y^2)}{\gamma^3}\mathrm{d}f_x\mathrm{d}f_y\\ &\equiv W_{xh}^2(z)+W_{xe}^2(z).\end{aligned} \tag{10}$$

$W_{xh}^2(z)$ 表示传播波的贡献，可表示为

$$W_{xh}^2(z) = W_{xh}^2(0) + 2zA_{xh} + \tan^2\theta_x z^2, \tag{11}$$

其中

$$W_{xh}^2(0) = -\mathrm{Re}\left[\frac{1}{\pi^2 P(z)}\iint_{f_x^2+f_y^2\leqslant 1/\lambda^2}\frac{\psi_0^*(1-\lambda^2 f_y^2)}{\gamma}\times\frac{\partial^2\psi_0}{\partial f_x^2}\mathrm{d}f_x\mathrm{d}f_y\right], \tag{12a}$$

$$A_{xh} = \mathrm{Re}\left[\frac{\mathrm{i}2\lambda}{\pi P(z)}\iint_{f_x^2+f_y^2\leqslant 1/\lambda^2}\frac{\psi_0^* f_x(1-\lambda^2 f_y^2)}{\gamma^2}\times\frac{\partial\psi_0}{\partial f_x}\mathrm{d}f_x\mathrm{d}f_y\right], \tag{12b}$$

$$\tan^2\theta_x = \frac{4\lambda^2}{P(z)}\iint_{f_x^2+f_y^2\leqslant 1/\lambda^2}|\psi_0|^2\times\frac{f_x^2(1-\lambda^2 f_y^2)}{\gamma^3}\mathrm{d}f_x\mathrm{d}f_y. \tag{12c}$$

$W_{xe}^2(z)$ 表示倏逝波的贡献，可表示为

$$W_{xe}^2(z) = W'^2_{xe}(z) + 2zA_{xe}, \tag{13}$$

其中

$$W'^2_{xe}(z) = \mathrm{Re}\left[\frac{\mathrm{i}}{\pi^2 P(z)}\iint_{f_x^2+f_y^2\geqslant 1/\lambda^2}\exp(-2k|\gamma|z)\times\frac{\psi_0^*(\lambda^2 f_y^2-1)}{|\gamma|}\frac{\partial^2\psi_0}{\partial f_x^2}\mathrm{d}f_x\mathrm{d}f_y\right], \tag{14a}$$

$$A_{xe} = \mathrm{Re}\left[\frac{\mathrm{i}2\lambda}{\pi P(z)}\iint_{f_x^2+f_y^2\geqslant 1/\lambda^2}\exp(-2k|\gamma|z)\times\frac{\psi_0^* f_x(1-\lambda^2 f_y^2)}{|\gamma|^2}\frac{\partial\psi_0}{\partial f_x}\mathrm{d}f_x\mathrm{d}f_y\right]. \tag{14b}$$

显然，$W_{xe}^2(z)$ 随传播距离 z 的增大迅速衰减；若 $z=0$ 处光场复振幅的角谱 $\psi_0(f_x,f_y)$ 为实数或纯虚数，则倏逝波对光场二阶矩的贡献为零，即 $W_{xe}^2(z)\equiv 0$.由(10)，(12c)式可知光束的远场发散角 θ_x 仅取决于传播波的贡献，与倏逝波无关，其物理意义是显然的.类似地，可求得

$$W_y^2(z) = W_{yh}^2(z) + W_{ye}^2(z), \tag{15}$$

$$W_{xy}^2(z) = W_{xyh}^2(z) + W_{xye}^2(z). \tag{16}$$

下面仅给出传播波对二阶矩的贡献 $W_{yh}^2(z)$，$W_{xyh}^2(z)$，

$$W_{yh}^2(z) = W_{yh}^2(0) + 2zA_{yh} + \tan^2\theta_y z^2, \tag{17}$$

$$W_{xyh}^2(z) = W_{xyh}^2(0) + 2zA_{xyh} + \tan^2\theta_{xy} z^2, \tag{18}$$

其中

$$W_{yh}^2(0) = -\mathrm{Re}\left[\frac{1}{\pi^2 P(z)}\iint\limits_{f_x^2+f_y^2\leqslant 1/\lambda^2}\frac{\psi_0^*(1-\lambda^2 f_y^2)}{\gamma}\times\frac{\partial^2\psi_0}{\partial f_y^2}\mathrm{d}f_x\mathrm{d}f_y\right], \tag{19a}$$

$$A_{yh} = \mathrm{Re}\left[\frac{\mathrm{i}2\lambda}{\pi P(z)}\iint\limits_{f_x^2+f_y^2\leqslant 1/\lambda^2}\frac{\psi_0^* f_y(1-\lambda^2 f_y^2)}{\gamma^2}\times\frac{\partial\psi_0}{\partial f_y}\mathrm{d}f_x\mathrm{d}f_y\right], \tag{19b}$$

$$\tan^2\theta_y = \frac{4\lambda^2}{P(z)}\iint\limits_{f_x^2+f_y^2\leqslant 1/\lambda^2}|\psi_0|^2\times\frac{f_y^2(1-\lambda^2 f_y^2)}{\gamma^3}\mathrm{d}f_x\mathrm{d}f_y, \tag{19c}$$

$$W_{xyh}^2(0) = -\mathrm{Re}\left[\frac{1}{\pi^2 P(z)}\iint\limits_{f_x^2+f_y^2\leqslant 1/\lambda^2}\frac{\psi_0^*(1-\lambda^2 f_y^2)}{\gamma}\times\frac{\partial^2\psi_0}{\partial f_x\partial f_y}\mathrm{d}f_x\mathrm{d}f_y\right], \tag{20a}$$

$$A_{xyh} = \mathrm{Re}\left[\frac{\mathrm{i}\lambda}{\pi P(z)}\iint\limits_{f_x^2+f_y^2\leqslant 1/\lambda^2}\frac{\psi_0^*(1-\lambda^2 f_y^2)}{\gamma^2}\times\left(f_x\frac{\partial\psi_0}{\partial f_y}+f_y\frac{\partial\psi_0}{\partial f_x}\right)\mathrm{d}f_x\mathrm{d}f_y\right], \tag{20b}$$

$$\tan^2\theta_{xy} = \frac{4\lambda^2}{P(z)}\iint\limits_{f_x^2+f_y^2\leqslant 1/\lambda^2}|\psi_0|^2\times\frac{f_x f_y(1-\lambda^2 f_y^2)}{\gamma^3}\mathrm{d}f_x\mathrm{d}f_y. \tag{20c}$$

由(12c)，(19c)式可知，横向发散角正切的平方对应的积分一般是发散的，即发散角 $\theta = 90°$，除非角谱函数 $\psi_0(f_x, f_y)$在 $f_x^2 + f_y^2 = 1/\lambda^2$ 时恒等于零．也就是非傍轴矢量衍射光束的精确光强二阶矩一般是发散的．因此，以精确光强二阶矩表征的光束束宽便没有确切的含意，这是本文的主要结论．文献[10]在研究传统光强定义下的非傍轴标量光束的二阶矩传输时，也提出了类似的二阶矩发散问题，这也正是引入非傍轴标量光束功率密度二阶矩的原因[6]．对于 TE 矢量高斯光束，其 $z=0$ 处光场复振幅的角谱为

$$\psi_0(f_x, f_y) = \pi\omega_0^2\times\exp[-\pi^2\omega_0^2(f_x^2+f_y^2)], \tag{21}$$

其中 ω_0 为高斯光束的束腰半径．由于(21)式表示的角谱为实函数，代入(12)和(19)式便可求得与文献[16]一致的结论．文献[17，18]关于任意线偏振高斯光束的非傍轴传输，可通过本文的结论经一次坐标旋转变换而求得．

3．结　论

本文运用非傍轴光束传输的矢量矩理论和严格的角谱表示的矢量衍射理论，给出了光束的束宽、横向发散角的积分表达式，论证了非傍轴矢量光束二阶矩的发散特性．研究表明，Porras 建立的非傍轴光束传输的矢量矩理论[5]，虽然在数学形式上是正确的，但由于其发散特性，以光强二阶矩表征的光束束宽并无确切的物理意义．文献[17，18]在处理发散积分时，将积分中的发散因子 γ^{-3}进行幂级数展开再进行积分，通过前 n 项求和的方式计算发散角．然而，发散角的大小敏感地依赖于 n 的取值，取决于光束的非傍轴特性，其结果的有效性及物理意义还需要作进一步的探讨．由(7)式可知，非傍轴矢量光束二阶矩的发散特性是由于光场 z 分量的贡献．然而，实际上光场的 z 分量仅在光束的非傍轴区对光强有明显的贡献，也就是光场 z 分量对光束实际束宽的影响不应该起决定作用，更不应该导致光束实际束宽的发散．因此，非傍轴光束矢量二阶矩的发散，并不表示实际光束束宽的发散．由传统光强二阶矩定义的傍轴标量激光束的束宽在自由空间传输过程中满足双曲线规律，相应的光束质量因子 $M^2 \geqslant 1$．这与量子力学的不确定关系有一定的内在联系[2,4,19]．按功率密度定义的非傍轴标量光束的束宽在自由空间传输过程中虽然也满足双曲线规律，但光束质量因子 M^2 可以小于 1[6]．由于非傍轴矢量光束光强二阶矩的发散特性，$M^2 \to \infty$，因而不能有效地描述非傍轴矢量光束的光束质量．有关非傍轴光束传输的研究还处于起步阶段，特别是关于非傍轴矢量光束的束宽定义及传输规律，还有光束质量都需作进一步研究[20,21]．

[1] Siegman A E 1990 *Proc. SPIE* **1224** 2
[2] Gao C, Weber H 2000 *Opt. Laser Technol.* **32** 221
[3] Siegman A E 1998 *Trends in Optics and Photonics Series* (Vol.17) (Washington: Optical Society of America) p184
[4] Cao Q, Deng X M, Guo H 1996 *Acta Opt. Sin.* **16** 1345 (in Chinese) [曹 清、邓锡铭、郭 弘 1996 光学学报 **16** 1345]
[5] Porras M A 1996 *Opt. Commun.* **127** 79
[6] Porras M A 1999 *Optik* **110** 417
[7] Lezec H J, Degiron A, Devaux E, Linke R A, Martin-Moreno L, Garcia-Vidal F J, Ebbesen T W 2002 *Science* **297** 820
[8] Popov E, Nevière M, Boyer P, Bonod N 2005 *Opt. Commun.* **255** 338
[9] Xu T J, Wang J, Sun L Q, Xu J Y, Tian Q 2002 *Acta Opt. Sin.* **22** 1421 (in Chinese) [徐铁军、王 佳、孙利群、许吉英、田 芊 2002 光学学报 **22** 1421]
[10] Porras M A 1994 *Opt. Commun.* **111** 338
[11] Chen C G, Konkola P T, Ferrera J, Heilmann R K, Schattenburg M L 2002 *J. Opt. Soc. Am.* A **19** 404
[12] Ciattoni A, Crosignani B, Porto P D 2000 *Opt. Commun.* **177** 9
[13] Cao Q, Deng X M, Guo H 1996 *Acta Opt. Sin.* **16** 897 (in Chinese) [曹 清、邓锡铭、郭 弘 1996 光学学报 **16** 897]
[14] Cao Q, Deng X M 1998 *Opt. Commun.* **151** 212
[15] Deng X J, Wu B K, Xiao S 2001 *Acta Opt. Sin.* **21** 1432 (in Chinese) [邓小玖、吴本科、肖 苏 2001 光学学报 **21** 1432]
[16] Zhou G Q, Wang S M 2005 *Chin. J. Lasers* **32** 67 (in Chinese) [周国泉、王绍民 2005 中国激光 **32** 67]
[17] Zhou G Q 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 1572 (in Chinese) [周国泉 2005 物理学报 **54** 1572]
[18] Zhou G Q 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 4710 (in Chinese) [周国泉 2005 物理学报 **54** 4710]
[19] Deng X J, Hu J G, Liu C X, Wang J G 2002 *J. Hefei Univ. Tech.* **25** 1187 (in Chinese) [邓小玖、胡继刚、刘彩霞、王建国 2002 合肥工业大学学报 **25** 1187]
[20] Kang X P, He Z, Lü B D 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 4569 (in Chinese) [康小平、何 仲、吕百达 2006 物理学报 **55** 4569]
[21] Kang X P, Lü B D 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 4563 (in Chinese) [康小平、吕百达 2006 物理学报 **55** 4563]

Divergent characteristic of the second order moment of nonparaxial vector beams*

Deng Xiao-Jiu† Wang Guo-An Liu Cai-Xia Lai Chuan-Wei

(*Department of Physics, Hefei University of Technology, Hefei 230009, China*)

(Received 11 August 2008; revised manuscript received 5 March 2009)

Abstract

Based on the accurate expression of light intensity of nonparaxial vector beams at the transverse plane and the vectorial second order moment theory of light beam propagation, by applying rigorous vectorial diffraction theory of the angular spectrum representation, the nonparaxial propagation of any vectorial diffraction beam has been systemically investigated, the integral expressions of beam width, transversal divergence angle have been presented, and the divergent characteristic of the second order moment of nonparaxial vector beams has been demonstrated. The definitions of beam width, transversal divergence angle of non-paraxial vector beams and some related problems have been discussed.

Keywords: vectorial diffraction theory, beam propagation, vectorial second order moment, divergent characteristic
PACC: 4210Q

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 50776084).

† E-mail: dengxjxls@sina.com