

# 圆腔回音壁模的自洽场描述

仇善良<sup>1)</sup> 李永平<sup>1)†</sup>

1) 中国科学技术大学物理系, 合肥 230026)

2) 中国科学技术大学 中国科学院量子信息重点实验室, 合肥 230026)

(2009 年 2 月 18 日收到, 2009 年 6 月 12 日收到修改稿)

在引进圆腔特征场及其反射系数的概念基础上, 讨论了圆腔回音壁模(WGM)的自洽场描述. 基于自洽场要求, 得到了同直接求解描述 WGM 问题的 Helmholtz 方程一样的本征值方程. 基于特征场描述的波-光线对应性, 讨论了圆腔 WGM 自洽形成的几何射线描述. 根据特征光线束自洽的直观图像推导了 WGM 谐振波数与品质因子  $Q$  值, 并与直接求解本征值方程所获得的结果符合很好.

关键词: 自洽场描述, 波-光线对应性, 回音壁模

PACC: 4260D, 4225G, 4215

## 1. 引 言

近来, 光学微腔由于其在低阈值激光器、窄带滤波器、灵敏生物传感器、单光子源及腔量子电动力学等理论和实验方面的重要性引起了研究者极大的兴趣<sup>[1-12]</sup>. 基于全内反射, 微米尺度的电介质微球<sup>[9, 10]</sup>、微盘及微柱<sup>[11, 12]</sup>可以支持具有甚高甚至极高品质因子  $Q$  的回音壁模式(WGM). WGM 是 Maxwell 方程在给定边界条件下的自由振荡解, 尽管可以通过直接求解 Maxwell 方程获得 WGM 的解, 但是我们仍然可以使用几何光学的术语去理解 WGM. Roll 等<sup>[13, 14]</sup>细致讨论了微球及微盘腔内 WGM 场与几何光线间的对应关系, 并粗略描述了 WGM 的自洽场图像. 和直接求解 Maxwell 方程相比较, 自洽场描述更自然. 不过 Roll 等只是简单地描述了 WGM 的自洽场图像, 对如何利用这种图像计算有关 WGM 的参数并未涉及. 因此进一步揭示 WGM 自洽场描述的特性是本文关注的重点.

本文仅讨论二维(2D)圆腔情形. 这是很有意义的, 因为在有效折射率的近似下, 微盘或微柱的情况可以简化为 2D 圆腔的情况<sup>[2]</sup>. 另外, 本文的结果可以很容易扩展到三维微球的情况. 在引入圆腔特征波场及其反射、透射系数的基础上, 我们将细致讨论圆腔 WGM 的自洽场描述.

## 2. 圆腔特征波场及其在圆腔边界下的反射、透射和 WGM 形成的自洽场描述

2D 微腔谐振问题是求 Helmholtz 方程

$$\nabla^2 \psi + n^2(\rho)k^2 \psi = 0 \quad (1)$$

在边界条件  $\psi_{s1} = \psi_{s2}$  和  $\alpha_1 \frac{\partial \psi_{s1}}{\partial n} = \alpha_2 \frac{\partial \psi_{s2}}{\partial n}$  下的自由振荡解<sup>[15, 16]</sup>. 这里标量函数  $\psi$  在 TE, TM 偏振下分别表示为  $H_z, E_z, n(\rho)$  表示折射率分布,  $k$  为波数, 下标  $s1$  和  $s2$  分别表示谐振腔的内表面和外表面,  $n$  指腔的单位外法向矢量, 并且在 TE, TM 偏振下分别有  $\alpha_1 = n_1^{-2}, \alpha_2 = n_2^{-2}$  或  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ , 其中  $n_1, n_2$  分别为腔内外介质的折射率, 通常  $n_1 > n_2$  已使得腔存在较高品质因子  $Q$  值的模式. 在此已经假定微腔介质是非磁性的并且在腔内外均匀分布, 如图 1(a) 所示. 对于图 1(a)中的圆腔, 在柱坐标中采用分离变量法并考虑自由振荡解应满足的远场辐射条件<sup>[15, 16]</sup>, 可将腔内外的场表示为

$$\psi(\rho) = \begin{cases} [H_m^{(1)}(n_1 k \rho) + r_m H_m^{(2)}(n_1 k \rho)] e^{jm\varphi} & (\rho < R), \\ t_m H_m^{(1)}(n_2 k \rho) e^{jm\varphi} & (\rho > R, m = 0, \pm 1, \dots), \end{cases} \quad (2)$$

其中  $m$  表示角向模数,  $H_m^{(1)}$  和  $H_m^{(2)}$  分别表示第一类和第二类 Hankel 函数,  $r_m, t_m$  为待定系数. 在远场条

† 通讯联系人. E-mail: liyp@ustc.edu.cn

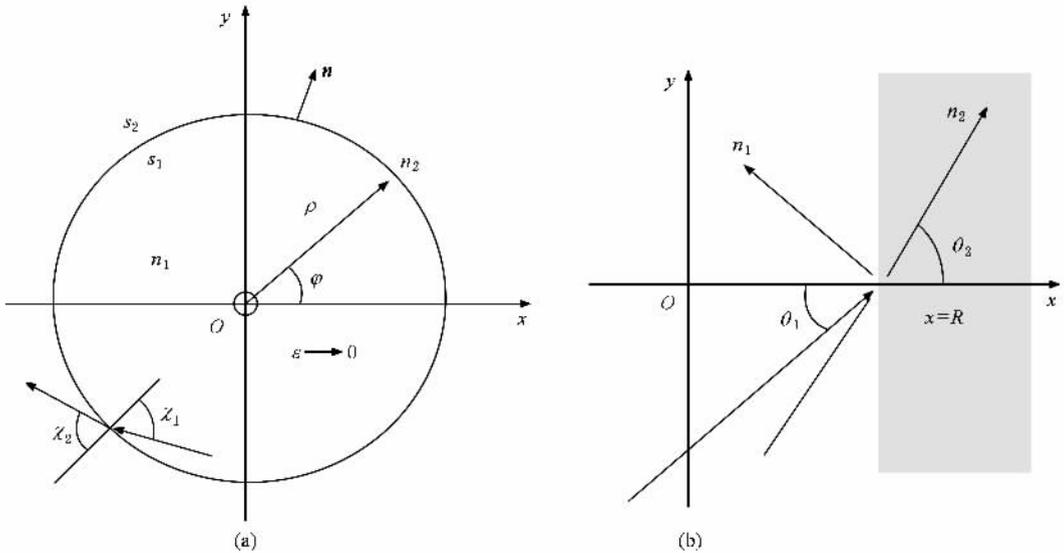


图 1 圆腔特征波场及反射示意图 (a)圆腔几何及其光学参数 (b)平面波在平直界面上的反射

件下  $H_m^{(1)}$ ,  $H_m^{(2)}$  行为就像分别向内外行进的柱面波, 因此可将其分别理解为外向行波和内向行波. 考虑腔场应满足的边界条件及坐标原点处的场值为有限的要求(此要求  $r_m = 1$ ), 可得本征波数方程

$$\alpha_2 n_2 J_m'(n_1 kR) H_m^{(2)'}(n_2 kR) - \alpha_1 n_1 J_m'(n_1 kR) H_m^{(2)'}(n_2 kR) = 0. \quad (3)$$

此处  $J_m$  为 Bessel 函数,  $J_m^{(2)'}$  表示导函数. 在给定的  $m$  下, 可以求得本征值方程一系列的谐振波

$$r_m = \frac{\alpha_1 n_1 H_m^{(1)'}(n_1 kR) H_m^{(1)}(n_2 kR) - \alpha_2 n_2 H_m^{(1)'}(n_2 kR) H_m^{(1)}(n_1 kR)}{\alpha_2 n_2 H_m^{(1)'}(n_2 kR) H_m^{(2)}(n_1 kR) - \alpha_1 n_1 H_m^{(2)'}(n_1 kR) H_m^{(1)}(n_2 kR)},$$

$$t_m = \frac{\alpha_1 n_1 [H_m^{(2)}(n_1 kR) H_m^{(1)'}(n_1 kR) - H_m^{(2)'}(n_1 kR) H_m^{(1)}(n_1 kR)]}{\alpha_2 n_2 H_m^{(1)'}(n_2 kR) H_m^{(2)}(n_1 kR) - \alpha_1 n_1 H_m^{(2)'}(n_1 kR) H_m^{(1)}(n_2 kR)}. \quad (4)$$

其中  $k$  并不要求满足本征值方程, 可以为任意值. 既然我们可以将  $H_m^{(1)}$ ,  $H_m^{(2)}$  分别理解为外向行波和内向行波, 那么我们就可以将 (4) 式作如下理解: 单位振幅的入射场 ( $H_m^{(1)}(n_1 k\rho) e^{im\varphi}$ ) 在腔内向圆腔边界行进, 在到达圆腔边界后, 一部分波 ( $r_m H_m^{(2)}(n_1 k\rho) e^{im\varphi}$ ) 被反射回腔内, 另一部分波 ( $t_m H_m^{(1)}(n_2 k\rho) e^{im\varphi}$ ) 从腔内透射出去. 就像平面波经历平直介质分界面, 反射之后其反射波、透射波依然是平面波, 只是波矢的大小和方向有变化外, 从而可以引进反射以及透射系数描述问题一样, 可以引入反射系数和透射系数描述入射波  $H_m^{(1)}(n_1 k\rho) e^{im\varphi}$  在圆腔边界下的反射和折射行为. 此  $H_m^{(1)}(n_1 k\rho) e^{im\varphi}$  就充当

数, 依大小次序可以用另一个模式数——径向模数  $l$  标记<sup>[2]</sup>,  $l = 1, 2, \dots$ . 故 (2) 和 (3) 式给出了圆腔 WGM 的解.

如上所述, 尽管可通过直接求解描述微腔问题的方程求解出 WGM, 但是我们还是可以从更加符合直觉的角度去理解 WGM. 有趣的是, 如果在要求满足腔边界条件时没有强迫原点处的场值为有限, 即  $r_m = 1$ , 我们依然可以获得有意义的物理解

着入射平面波的角色, 它可以定义为圆腔的特征波场 (4) 式给出的就是特征波场的反射系数、透射系数. 确切地 (4) 式给出是腔内反射系数、透射系数, 因为波除了可以从腔内入射外还可以从腔外入射. 与 (2) (4) 式类似, 还可以定义腔外部反射系数、透射系数, 陷于篇幅以及 WGM 自洽场描述的相关性, 此处仅讨论腔内情形. 假设入射波、反射波和透射波的形式分别为  $e^{i(k_x x + k_y y)}$ ,  $e^{i(-k_x x + k_y y)}$  和  $e^{i(k'_x x + k'_y y)}$ , 其中  $k_x, k_y, k'_x, k'_y$  为波矢分量, 根据图 1 可求出相应的反射系数和透射系数. 由于入射场、反射场其相位参考点并不在腔的边界上, 由 (4) 式给出的反射系数、透射系数并不唯一地反映界面性质, 还包括参考

相位的信息. 这一点可以从图 1(b) 所示的平面波情况加以理解, 由图 1(b) 给出的平面波的反射系数、透射系数分别为

$$r_{\text{plane}} = \frac{\alpha_1 n_1 \cos(\theta_1) - \alpha_2 n_2 \cos(\theta_2)}{\alpha_1 n_1 \cos(\theta_1) + \alpha_2 n_2 \cos(\theta_2)} \times e^{2i n_1 k R \cos(\theta_1)},$$

$$t_{\text{plane}} = \frac{2\alpha_2 n_1 \cos(\theta_1)}{\alpha_2 n_1 \cos(\theta_1) + \alpha_1 n_2 \cos(\theta_2)} \times e^{2i k R [n_1 \cos(\theta_1) - n_2 \cos(\theta_2)]}, \quad (5)$$

其中  $\theta_1$  和  $\theta_2$  分别为入射角和反射角,  $\alpha_1, \alpha_2$  在 s, p 偏振下分别同上述的 TM, TE 偏振情况. 反射系数和透射系数中指数相位部分反映参考相位点的信息, 去除它可以得到通常所使用的平面波反射系数和透射系数. 对于上述圆腔的情况, 可以如下定义一个“缓变”的反射系数和透射系数以去除参考相位的信息,

$$\tilde{r}_m = r_m \frac{H_m^{(2)}(n_1 k_\rho)}{H_m^{(1)}(n_1 k_\rho)} \Big|_{\rho=R},$$

$$\tilde{t}_m = t_m \frac{H_m^{(1)}(n_2 k_\rho)}{H_m^{(1)}(n_1 k_\rho)} \Big|_{\rho=R}, \quad (6)$$

其中  $\tilde{r}_m, \tilde{t}_m$  唯一地反映了界面的特性. 由于场  $H_m^{(1)}(nk_\rho)e^{jm\varphi}$  在远离焦圆时可以将其看作是波矢为  $k_\rho = \sqrt{(nk_\rho)^2 - m^2/\rho}$ ,  $k_\rho = m/\rho$  向外的行波. 我们可以定义入射角  $\chi_1$  和透射角  $\chi_2$  为

$$\sin \chi_1 = \frac{m}{n_1 k R},$$

$$\sin \chi_2 = \frac{m}{n_2 k R}. \quad (7)$$

此时由(6)式给出的反射系数和透射系数可以分别表示为

$$\tilde{r}_m = \tilde{r}_m(\sin \chi_1, \sin \chi_2),$$

$$\tilde{t}_m = \tilde{t}_m(\sin \chi_1, \sin \chi_2).$$

这样可以与平面波的反射系数和透射系数进行比较. 结果如图 2 所示. 值得一提的是, 圆腔的反射系数和透射系数不仅依赖于入射角而且还依赖于角向模数或入射波长. 并且从图 2 可以看出:  $m$  越大(或等效地波长越短), 圆腔系数越是接近平面波的情况. 这反映了短波长极限下波动图像向几何光学图像的逼近. 当入射角满足  $\sin \chi_1 > n_2/n_1$ , 出现所谓的全内反射现象. 此时平面波的反射率严格为 1. 对于圆腔情形, 却存在着一个随入射角增加而指数减小的间隙(见图 2(c)), 表明入射波在弯曲的圆腔界面

情况下存在着隧穿效应, 不存在严格的全内反射. 此对于圆腔高  $Q$  值的 WGM 的损耗有直接联系.

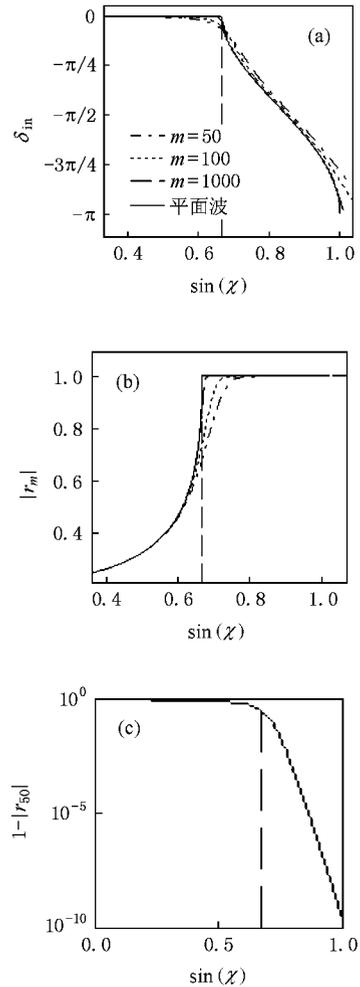


图 2 不同角向模数的圆腔特征场在圆腔边界上的反射系数随入射角的变化情况同平面波系数的比较 (a) 反射系数的幅角, 即界面相移 (b) 反射率 (c) 反射率接近于 1 的情况. 虚线表示全内反射角所在

反射波  $r_m H_m^{(2)}(n_1 k_\rho) e^{jm\varphi}$  在腔内向原点方向汇聚, 由于能量守恒, 此反射波在行进到一定的位置时必定扭转方向, 成为离开原点的波  $r_m H_m^{(1)}(n_1 k_\rho) e^{jm\varphi}$ . 设在原圆腔的圆心处(如图 1(a))存在另一个半径更小、折射率为任意的小圆腔, 当小圆腔的半径  $\epsilon \rightarrow 0$  时, 波  $r_m H_m^{(2)}(n_1 k_\rho) e^{jm\varphi}$  在遭受到小圆腔的散射后, 散射场即为  $r_m H_m^{(1)}(n_1 k_\rho) e^{jm\varphi}$  [17], 可理解为原点充当着一个反射系数为 1 的反射镜. 以自洽场的图像描述 WGM 形成, 就是反射场  $r_m H_m^{(2)}(n_1 k_\rho) e^{jm\varphi}$  扭转方向后的场  $r_m H_m^{(1)}(n_1 k_\rho) e^{jm\varphi}$  与原入射场  $H_m^{(1)}(n_1 k_\rho) e^{jm\varphi}$  应当具有完全相同的相位与振幅分

布,亦即  $r_m H_m^{(1)}(n_1 k \rho) e^{jm\varphi} = H_m^{(1)}(n_1 k \rho) e^{jm\varphi}$  或  $r_m = 1$ . 由此给出的本征值方程同(3)式一致,对它求解也可以获得圆腔的 WGM 解.关于圆腔 WGM 自治场图像,将在下面说明.

### 3. 圆腔 WGM 自治场图像的几何射线描述——波-光线对应性

#### 3.1. 圆腔特征场的几何光学近似

与平面波可以用一簇平行的几何射线束描述类似,圆腔特征场也可以用一簇几何射线束描述. Roll 等<sup>[13,14]</sup>细致讨论了微球或微盘腔内 WGM 场与几何光线间的对应关系,根据他们的讨论,特征场  $H_m^{(1)}(k\rho) e^{jm\varphi}$ ,  $H_m^{(2)}(k\rho) e^{jm\varphi}$  可以分别用图 3(a)(b)所示的特征光线束图像描述.特征光线(射线)束中所有的光线都与一个半径为  $\rho_c = m/k$  的圆相切,此圆就是焦散圆.外向行波如同是从这个焦散圆发射出来一样,内向行波则向着这个焦散圆汇聚,在焦散圆的内部场为倏逝场.在  $\rho > \rho_c$  位置,光线有如下波矢分量:

$$k_\rho = \frac{\sqrt{(k\rho)^2 - m^2}}{\rho},$$

$$k_\varphi = \frac{m}{\rho}. \quad (8)$$

在焦散线  $\rho = \rho_c$  处,径向波矢分量消失,由此波沿着焦散圆传输,波场值的唯一性要求导致焦散圆的周长为波长的整数倍,即  $m$  为整数.在焦散圆的内部,由(8)式给出的角向波矢  $k_\varphi > k$ ,以致径向波数为虚数,此时焦散圆内部场为径向倏逝场.当  $m < 0$  时,光线束逆时针行进.

根据 Roll 等的讨论,由图 3(a)所示特征光线束描述可得<sup>[13,14]</sup>

$$H_m^{(1)}(k\rho) \sim \begin{cases} e^{[ \phi_\rho(k\rho) - \pi/4 ]} \sqrt{k^2 \rho^2 - m^2} & (k\rho > m), \\ \frac{1}{2} \frac{e^{j\psi_\rho(k\rho)}}{\sqrt{k^2 \rho^2 - m^2}} - j \frac{e^{-j\psi_\rho(k\rho)}}{\sqrt{k^2 \rho^2 - m^2}} & (k\rho < m), \end{cases} \quad (9)$$

其中

$$\phi_\rho(k\rho) = \sqrt{k^2 \rho^2 - m^2} - \text{marccos}\left(\frac{m}{k\rho}\right),$$

$$\psi_\rho(k\rho) = \sqrt{m^2 - k^2 \rho^2} - \text{marccosh}\left(\frac{m}{k\rho}\right). \quad (10)$$

这里  $\phi_\rho(k\rho)$  为焦散圆外特征场  $H_m^{(1)}(k\rho) e^{jm\varphi}$  的径向相位分布,(9)式就是函数  $H_m^{(1)}(k\rho)$  的几何光学近似,也是它的 Debye 展开.然而计算表明,由上述近似所给出相位分布结果与真实情况存在误差  $\delta(k\rho) = \arg(H) - \arg(H_{\text{approx}})$ . 这里  $\arg(H)$  为  $H_m^{(1)}(k\rho)$  的幅角,  $\arg(H_{\text{approx}})$  是由(9)式近似给出的幅角.在焦散线附近误差更为明显,如图 3(c)所示.这反映了几何描述在焦散圆附近的不足.我们可以把  $\delta(k\rho)$  称作波动修正,这在后面用谐振方程精确确定 WGM 的谐振波数时有意义.由图 3(c)可见,  $m$  越大,波动修正的范围就越小,再次反映波的图像向几何图像的逼近.

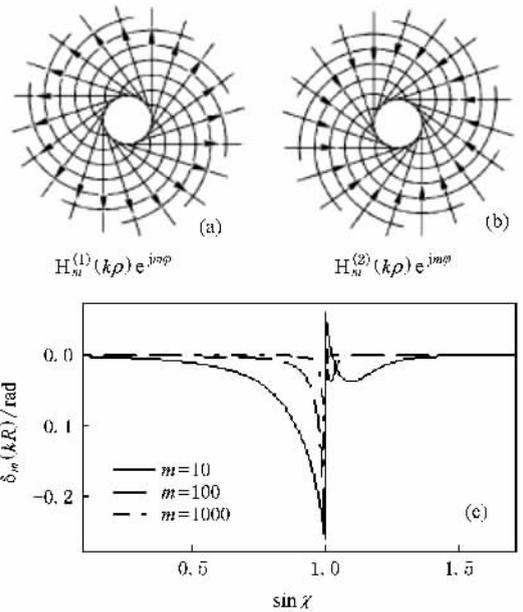


图 3 圆腔特征场的几何光线描述与相位波动修正 (a)(b) 分别是圆腔特征场  $H_m^{(1)}(k\rho) e^{jm\varphi}$  和  $H_m^{(2)}(k\rho) e^{jm\varphi}$  的几何光线描述, (c) 不同角向模数的圆腔特征场的相位波动修正随入射角的变化情况,其中入射角  $\sin \chi > 1$  的范围也同时给出,在  $\sin \chi > 1$  区域入射场是径向倏逝场,此范围对 WGM 形成无贡献

有趣的是,由图 3(a)和(b)给出的光线束中的光线在到达焦散圆时并不能跨越焦散圆,除非在原点处存在一个散射体.只要在原点处存在一个不管多小的散射体,入射场  $H_m^{(2)}(k\rho) e^{jm\varphi}$  就会从散射体外部入射,经过散射后成为出射场  $H_m^{(1)}(k\rho) e^{jm\varphi}$ ,表明光线可以跨越焦散圆.在焦散圆上入射场具有径向相位  $\phi_\rho(k\rho_c) = \pi/4$ ,而散射场具有相位  $\phi_\rho(k\rho_c) = -\pi/4$  所以,光线跨越焦散圆必伴随焦散相滞后  $-\pi/2$ <sup>[13,14]</sup>.

### 3.2. 圆腔 WGM 自洽形成的几何光学描述与谐振方程

如果以光线自洽的图像理解如图 4(a)所示圆腔中 WGM 的形成,就是从 A 点发出的光线沿线 AP 传输经过圆腔边界的反射后,沿线 PB 向焦散圆方向行进,当其行进到焦散圆上的 B 点并跨越 B 点时

与另一入射光线 B'Q (B 和 B' 点重合)同相时, WGM 就出现了,此时特征光线束中的任何一条光线都经历相同的自洽图像.有意思的是,完全不同于通常谐振腔中的光线闭合自洽,此处的自洽是光线束中的一条入射光线经反射后与另一条入射光线的自洽.自洽要求相位差

$$\Delta\delta = \Delta\delta_1 + \delta_{in}$$

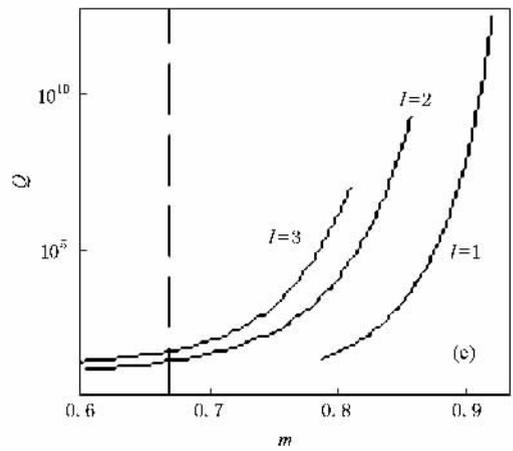
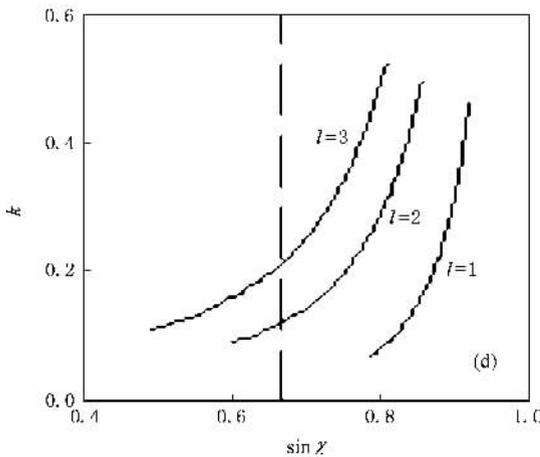
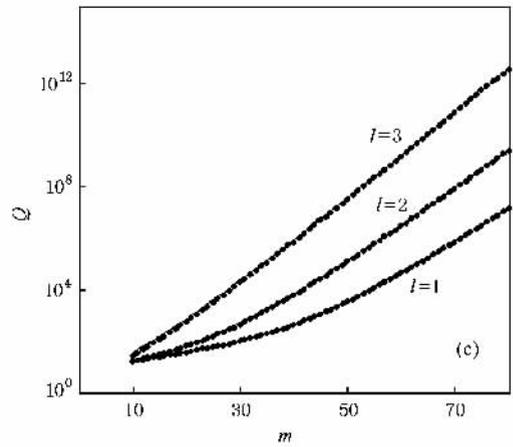
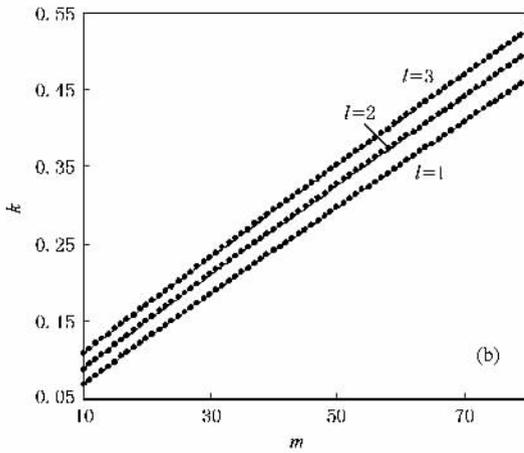
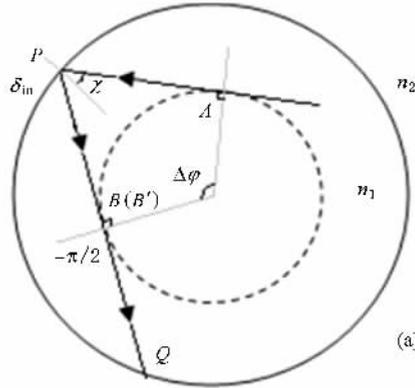


图 4 圆腔 WGM 形成的几何光学描述与谐振波数的结果 (a)圆腔 WGM 形成的几何光线自洽描述 (b)不同模次 WGM 的谐振波数的几何光学近似结果与精确结果的比较 (c)Q 值的比较 (d)WGM 谐振波数随 WGM 入射角的变化 (e)Q 值随 WGM 入射角的变化.图中离散点为近似结果,曲线为精确结果

$$\begin{aligned}
 &= 2\phi_\rho(n_1 kR) + 2\delta(n_1 kR) - \pi/2 + \delta_{in} \\
 &= 2\pi(l-1). \quad (11)
 \end{aligned}$$

在此注意入射光线  $B'Q$  比  $AP$  滞后一个固有相位差  $m\Delta\varphi$  此相位差是波在焦散圆上沿焦散圆传输导致的相位滞后。(11)式中  $\delta_{in}$  为界面相滞后  $2\delta(n_1 kR)$  为几何光学近似不足引起的相位波动修正,  $-\pi/2$  为焦散相滞后,  $l=1, 2, \dots$  可以诠释为径向模式数.  $2\phi_\rho(n_1 kR)$  为传输相滞后, 其可由(10)式求出, 也可由图 4(a) 中的线段直观地给出,

$$2\phi_\rho(n_1 kR) = \frac{2\pi}{\lambda} n_1 (\overline{AP} + \overline{B'Q} - \widehat{AB'}).$$

这里  $\overline{AP}$ ,  $\overline{B'Q}$  分别为线段  $AP$ ,  $B'Q$  长,  $\widehat{AB'}$  为弧长. 由此式可以确定谐振波数(或波长和频率). 现在我们可以将  $r_m$  写为  $r_m = \tilde{r}_m e^{i\Delta\delta_1}$ , 其中  $\Delta\delta_1$  就是我们在定义  $\tilde{r}_m$  去除的相位. 既然修正  $2\delta(n_1 kR)$  只在焦散线附近有较大的值, 那么在一般的计算中就可以将其忽略, 如果此时我们再用平面波的界面相移  $\delta_{plane}$  代替  $\delta_{in}$ , 则可以认为由(11)式给出的结果是几何光学考虑的结果. 图 4(b) 给出了  $r_m=1$  下谐振波数几何光学近似结果与精确结果的比较, 可以看出二者符合很好.

### 3.3. 损耗或 $Q$ 值

单独的相位复原条件不足以描述 WGM 的损耗特性, 光线每次在经历边界反射时都要损耗其能量, 从而腔内 WGM 的能量在逐渐减少. 根据通常处理激光模式反射损耗问题的方法<sup>[18]</sup>, 可以得到 WGM 的  $Q$  值几何光学近似结果,

$$\begin{aligned}
 Q &= \frac{k_{res} \Delta\delta' |_{k=k_{res}}}{2 \ln |\tilde{r}_m|^{-1}} \\
 &\approx \frac{k_{res} \phi'_\rho |_{k=k_{res}}}{\ln |\tilde{r}_m|^{-1}}, \quad (12)
 \end{aligned}$$

其中  $k_{res}$  为谐振波数,

$$\begin{aligned}
 \Delta\delta' |_{k=k_{res}} &= \left. \frac{\partial \Delta\delta}{\partial k} \right|_{k=k_{res}}, \\
 \Delta\phi'_\rho |_{k=k_{res}} &= \left. \frac{\partial \phi_\rho(n_1 kR)}{\partial k} \right|_{k=k_{res}}
 \end{aligned}$$

为谐振波数处等效全光学腔长, 即等效于平行平面镜腔的一周光程长度. (12) 式中的近似表明我们已经忽略由界面反射以及波动修正所导致的额外光程. 实际上, 我们可以直接从  $r_m=1$  中求得  $Q$  值, 由条件  $r_m=1$  所给出的波数是一个复数, 其实部  $k_r$  为通常意义下的谐振波数(由它可得谐振波长或频率), 其负虚部  $k_i$  描述损耗, 可得  $Q = -k_r/(2k_i)$ . 图 4(c) 给出了  $Q$  值几何光学近似结果与精确结果的比较. 由图 4(c) 可见, 在全内反射区  $Q$  值随角向模数呈指数变化规律. 其实这是源于反射率在此区域内(见图 4(c)) 以指数形式接近于 1 所致, 在此区域内, WGM 其损耗机制为隧穿效应. 图 4(c) 仅给出较低径向模次的模式, 基本上都位于全内反射区域. 如果径向模次增高, 模式入射角由于小于全内反射角而发生折射损耗, 此时  $Q$  值将会较小或很小而没有实际应用价值.

最后需要提及的是, 图 4(b) 和 (c) 的精确结果是在 2D 复波数平面上用 Newton 方法<sup>[16]</sup> 搜索方程  $y = r_m - 1$  的零点而获得.

## 4. 结 论

基于圆腔特征场及其反射系数的概念, 我们较为细致地讨论了圆腔 WGM 的自洽场描述. 反射场与原入射场的自洽不仅给出正确的本征值方程而且也给出了 WGM 形成的直观图像. 圆腔特征场反射系数与平面波在平直界面上的反射系数比较, 在高次角向模数下的符合一再表明: 短波长极限下波动图像向几何图像逼近. 基于特征场描述的波-光线对应性, 同时讨论了圆腔 WGM 自洽形成的几何光线描述. 不同于通常的情况, 自洽并不要求反射光线与入射光线的闭合, 只是特征光线束中的一条入射光线经反射后与特征光线束中的另一条入射光线的自洽. 根据特征光线束自洽的直观图像, 推导了圆腔 WGM 谐振波数和  $Q$  值, 同精确结果比较获得了较符合的结果. 我们的探讨进一步揭示了圆腔 WGM 的波动图像描述与几何光线图像描述间的关系.

[1] McCall S L, Levi A F J, Slusher R E, Pearton S J, Logan R A 1992 *Appl. Phys. Lett.* **60** 289

[2] Chin M K, Chu D Y, Ho S T 1994 *J. Appl. Phys.* **75** 3302

[3] Slusher R E, Levi A F J, McCall S L, Pearton S J, Logan R A 1993

- Appl. Phys. Lett.* **63** 1310
- [ 4 ] Boriskina S V ,Benson T M ,Sewell P ,Nosich A I 2006 *IEEE J. Sel. Top. Quantum Electron.* **12** 1175
- [ 5 ] Fujita M ,Baba T 2002 *Appl. Phys. Lett.* **80** 2051
- [ 6 ] Yang J ,Guo L J 2006 *IEEE J. Sel. Top. Quantum Electron.* **12** 143
- [ 7 ] Boyd R W ,Heebner J E 2001 *Appl. Opt.* **40** 5742
- [ 8 ] Vahala K J 2003 *Nature* **424** 839
- [ 9 ] Gorodetsky M L ,Savchenkov A A ,Ilchenko V S 1996 *Opt. Lett.* **21** 453
- [ 10 ] Cai M ,Painter O ,Vahala K J ,Sercel P C 2000 *Opt. Lett.* **25** 1430
- [ 11 ] Borselli M ,Srinivasan K ,Barclay P E ,Painter O 2004 *Appl. Phys. CM Lett.* **85** 3693
- [ 12 ] Whittaker D M ,Guimaraes P S S ,Sanvitto D ,Vinck H ,Lam S , Daraei A ,Timpson J A ,Fox A M ,Skolnick M S ,Ho Y L D ,Rarity J G ,Hopkinson M ,Tahraoui A 2007 *Appl. Phys. Lett.* **90** 161105
- [ 13 ] Roll G ,Kaiser T ,Lange S ,Schweiger G 1998 *J. Opt. Soc. Am. A* **15** 2879
- [ 14 ] Roll G ,Kaiser T ,Schweiger G 1999 *J. Opt. Soc. Am. A* **16** 882
- [ 15 ] Boriskina S V ,Sewell P ,Benson T M 2004 *J. Opt. Soc. Am. A* **21** 393
- [ 16 ] Wiersig J 2003 *J. Opt. A* **5** 53
- [ 17 ] Tureci H E ,Schwefel H G L ,Jacquod P ,Stone A D 2005 *ArXiv : Physics* **4** 0308016
- [ 18 ] Wang Q P ,Zhang X Y ,Liu Z J ,Li P 2003 *Principles of Laser* ( Shandong :Shandong University Press )p91( in Chinese ) 王青圃、张行愚、刘泽金、李平 2003 *激光原理*( 山东 :山东大学出版社 )第 91 页 ]

## Self-consistent field description of whispering-gallery mode in circular cavity

Qiu Shan-Liang<sup>1)</sup> Li Yong-Ping<sup>1) 2)</sup>

<sup>1)</sup> Department of Physics ,University of Science and Technology of China ,Hefei 230026 ,China )

<sup>2)</sup> Key Laboratory of Quantum Information of Chinese Academy of Sciences ,University of Science and Technology of China , Hefei 230026 ,China )

( Received 18 February 2009 ; revised manuscript received 12 June 2009 )

### Abstract

On the base of introduction of circular cavity eigenfield and its reflection coefficient ,the self-consistent field description of whispering-gallery mode ( WGM ) in circular cavity is discussed . Accroding to the self-consistency ,the same eigenvalue equation as the one directly deduced from the Helmholtz equation determining WGM is obtained . Also based on the wave-ray correspondence of circular cavity eigenfield ,the self-consistent ray description of WGM is discussed . The results of resonance wavenumbers and the  $Q$ -factors of WGMs deduced from the intuitive self-consistent picture of eigenray beam are well coincident with the ones obtained by directly solving the eigenvalue equation .

**Keywords** : self-consistent field description , wave-ray correspondence , whispering-gallery mode

**PACC** : 4260D , 4225G , 4215