

# 强非局域非线性介质中光束传输的 Ince-Gauss 解\*

张霞萍<sup>1,2)</sup> 刘友文<sup>1)†</sup>

1) 南京航空航天大学理学院, 南京 210016)

2) 南京晓庄学院物理系, 南京 210017)

(2009 年 2 月 11 日收到, 2009 年 3 月 11 日收到修改稿)

利用强非局域非线性介质中傍轴光束传输的线性模型(Snyder-Mitchell 模型)讨论了椭圆坐标系下光束传输过程. 通过设立 Ince 多项式对 Gauss 函数的调制解得到了强非局域非线性介质中光束稳定传输的 Ince-Gauss 解. 当 Ince-Gauss 光束的入射功率为临界功率时, 光束保持孤子形式传输, 否则传输光束的束宽呈现周期性波动, 即为呼吸子形式. 同时还数值模拟了呼吸子的传输过程. Ince-Gauss 光在一定条件下可以连续转换为 Hermite-Gauss 光或 Laguerre-Gauss 光, 图示展现了几个低阶 Ince 型光孤子及其转换情况.

关键词: 强非局域非线性介质, Ince-Gauss 光, Laguerre-Gauss 光, Hermite-Gauss 光

PACC: 4265S

## 1. 引 言

在非线性科学中最吸引人的研究对象就是孤子<sup>[1-22]</sup>. 非局域空间光孤子是空间非局域非线性介质中传输的空间光孤子. 所谓空间非局域非线性介质, 是指介质对光场的非线性响应不仅与该点的光场有关, 而且与空间中其他点的光场有关<sup>[1,5]</sup>. 材料的空间非局域性起源于物质内对光场响应的单元(电子、分子或激子等<sup>[6]</sup>)的空间相关性. 如果材料的这种相关性为零, 则这种材料是局域性材料. 局域非线性介质中传输的空间光孤子是局域空间光孤子, 其诱导的导波只传输一种模式场(例如 Kerr 介质). 在非局域介质中会存在不同的模式场, 那样的孤子成为多模孤子, 其能量分布呈现出多峰结构<sup>[7]</sup>.

非局域空间光孤子在传输过程中呈现的是衍射效应和由自聚焦引起的非线性效应的完美平衡<sup>[1]</sup>. 当这种平衡被打破时, 空间光束的传输呈现呼吸子状态<sup>[1,8-10]</sup>. 非局域空间孤子和呼吸子由非局域非线性 Schrödinger 方程描述, 其中非线性项反映的是对称实响应函数情况下介质的非局域形式<sup>[8]</sup>. 1997 年 Snyder 和 Mitchell 在强非局域条件下将非线性方程线性化处理, 得到了光束传输的线性模型, 即被沈

元壤称作的 Snyder-Mitchell 模型<sup>[5]</sup>, 并得到了 Gauss 型稳定的光孤子解<sup>[1]</sup>. Gauss 型孤子在传输方向的正交截面上强度分布只有一个峰值, 被认为是在传输介质中最能有效自导的光束, Gauss 型孤子为最低阶孤子, 也即基模孤子<sup>[11,12]</sup>. 高阶模孤子在其强度截面上有两个或者两个以上的峰值, 在介质中诱导的折射率变化就相当复杂. 高阶模孤子有潜在的应用价值. 例如, 以足够强度的入射光入射到非线性介质中最终将演化为一些相应的本征模, 可以产生纯净的光束, 多峰结构也为全光控制方面提供了更多的研究价值<sup>[7]</sup>.

文献 [11,12] 给出了从强非局域模型到 Snyder-Mitchell 模型的转化过程, 分别讨论了 1+1 维和 1+2 维直角坐标系下的 Hermite-Gauss 解<sup>[11]</sup>和旋转坐标系下的 Laguerre-Gauss 解<sup>[12]</sup>, 并讨论了这两类孤子的特性. 对于强非局域介质中这两种不同类型孤子之间的关系目前尚缺乏研究, 对于该介质中椭圆坐标系下解的形式还可以做更进一步探讨.

本文继文献 [11,12] 后, 利用 Snyder-Mitchell 模型, 讨论了椭圆坐标系下强非局域非线性介质中光束传输过程, 并得到了 Ince-Gauss 型正交解, 利用分步 Fourier 算法数值模拟了 Ince-Gauss 呼吸子的传输过程. Ince-Gauss 光束横向结构由 Ince 多项式描述,

\* 教育部留学回国人员科研启动基金、高等学校博士学科点专项科研基金(批准号: 200802871028)和江苏省“六大人才高峰”(批准号: 07-A-011)资助的课题.

† 通讯联系人. E-mail: ywliu@nuaa.edu.cn

具有椭圆对称性. Ince-Gauss 光成功地实现了 Hermite-Gauss 光和 Laguerre-Gauss 光之间的连续转换,当椭圆参量趋于零或趋于无穷时,Ince-Gauss 光分别转换为 Laguerre-Gauss 光或 Hermite-Gauss 光.目前,实验上已经可以很方便地获得高质量的单束 Ince-Gauss 光<sup>[14]</sup>.

## 2. 傍轴条件下传输光束的 Ince-Gauss 解

描述传输光束的波动场  $u$  遵循 Maxwell 方程. 对于非线性均匀介质,光场满足下列一般非局域非线性方程<sup>[8]</sup>:

$$i\partial u/\partial z + \mu \nabla_{\perp}^2 u + \rho N(I)u = 0. \quad (1)$$

这里  $u = u(\mathbf{r}, z)$  是傍轴光束,  $\mu = 1/2k$ ,  $\rho = k\kappa$ , 其中  $k$  为介质中不包含非线性的波数(由于  $k = \omega n_0/c$ ,  $n_0$  为介质中线性折射率);  $\kappa$  为材料常数,  $\kappa > 0$ ,  $\kappa < 0$  分别相应于聚焦介质和散焦介质,  $I = I(\mathbf{r}) = I(\mathbf{r}, z) = |u|^2$ , 其中  $z$  为沿传输方向的纵向坐标,  $\mathbf{r} = (x, y)$  为二维横向坐标向量,  $\nabla_{\perp}^2 = \nabla^2 - \partial^2/\partial z^2$ , 为横向 Laplace 算符.

(1) 式中的非线性项  $N = N(I)$  由一般非局域形式表示

$$N(I) = \int_{-\infty}^{+\infty} R(\mathbf{r} - \mathbf{r}') |u(\mathbf{r}', z)|^2 d^D \mathbf{r}',$$

$D = 2$  表示横向二维空间. 这里只考虑响应函数  $R(\mathbf{r})$  为实数(即没有非线性的损耗和吸收, 功率  $P = \int I d^D \mathbf{r}'$ ), 且均匀对称(即排除了非对称的诺曼响应等). 将响应函数归一化, 有  $\int R(\mathbf{r}') d^D \mathbf{r}' = 1$ . 材料的响应函数可以设为 Gauss 型<sup>[8]</sup>,

$$R(\mathbf{r}) = \exp(-r^2/2w_m^2) (\sqrt{2\pi}w_m)^{-D},$$

其中  $w$  为传输光束的束宽,  $w_m$  为材料的响应宽度, 即材料的特征长度. 定义参量  $\alpha = w_m/w$  表征介质非局域程度<sup>[15]</sup>. 局域介质中  $\alpha = 0$ , 对于强非局域介质有  $\alpha \gg 1$ .

令

$$u(\mathbf{r}, z) = \psi(\mathbf{r}, z) \exp(i\rho R_0 P_0 z),$$

对方程作变换后可以得到强非局域非线性介质中沿  $z$  轴传输对称解  $u(\mathbf{r}, z)$  的线性模型<sup>[11]</sup>

$$i\partial\psi/\partial z + \mu \nabla_{\perp}^2 \psi - \frac{1}{2}\rho\gamma P_0 r^2 \psi = 0. \quad (2)$$

这里  $P_0$  为入射光功率,  $R_0 = R(0)$ ,  $\gamma = -d^2 R(\mathbf{r})/d r^2|_{r=0}$  ( $\gamma > 0$ ). 为了得到方程(2)的 Gauss 型解, 可

以构造试探解形式为函数  $\psi_{\text{f}}(\mathbf{r}, z)$  对 Gauss 型函数  $\psi_{\text{G}}(\mathbf{r}, z)$  的调制, 即

$$\psi(\mathbf{r}, z) = \psi_{\text{f}}(\mathbf{r}, z)\psi_{\text{G}}(\mathbf{r}, z). \quad (3)$$

将方程(3)代入方程(2), 得到如下变换:

$$\begin{aligned} & i\psi_{\text{G}}(\mathbf{r}, z) \frac{\partial\psi_{\text{f}}(\mathbf{r}, z)}{\partial z} + \mu\psi_{\text{G}}(\mathbf{r}, z) \nabla_{\perp}^2 \psi_{\text{f}}(\mathbf{r}, z) \\ & + 2\mu \left( \frac{\partial\psi_{\text{f}}(\mathbf{r}, z)}{\partial x} \frac{\partial\psi_{\text{G}}(\mathbf{r}, z)}{\partial x} + \frac{\partial\psi_{\text{f}}(\mathbf{r}, z)}{\partial y} \frac{\partial\psi_{\text{G}}(\mathbf{r}, z)}{\partial y} \right) \\ & + \psi_{\text{f}}(\mathbf{r}, z) \left( i \frac{\partial\psi_{\text{G}}(\mathbf{r}, z)}{\partial z} + \mu \nabla_{\perp}^2 \psi_{\text{G}}(\mathbf{r}, z) \right. \\ & \left. - \frac{1}{2}\rho\gamma P_0 r^2 \psi_{\text{G}}(\mathbf{r}, z) \right) = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

令

$$\begin{aligned} & i \frac{\partial\psi_{\text{G}}(\mathbf{r}, z)}{\partial z} + \mu \nabla_{\perp}^2 \psi_{\text{G}}(\mathbf{r}, z) \\ & - \frac{1}{2}\rho\gamma P_0 r^2 \psi_{\text{G}}(\mathbf{r}, z) = 0, \end{aligned} \quad (5)$$

有

$$\begin{aligned} & i\psi_{\text{G}}(\mathbf{r}, z) \frac{\partial\psi_{\text{f}}(\mathbf{r}, z)}{\partial z} + \mu\psi_{\text{G}}(\mathbf{r}, z) \nabla_{\perp}^2 \psi_{\text{f}}(\mathbf{r}, z) \\ & + 2\mu \left( \frac{\partial\psi_{\text{f}}(\mathbf{r}, z)}{\partial x} \frac{\partial\psi_{\text{G}}(\mathbf{r}, z)}{\partial x} \right. \\ & \left. + \frac{\partial\psi_{\text{f}}(\mathbf{r}, z)}{\partial y} \frac{\partial\psi_{\text{G}}(\mathbf{r}, z)}{\partial y} \right) = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

方程(5)就是所谓的 Snyder-Mitchell 模型<sup>[11]</sup>. 对于自聚焦介质( $\kappa > 0$ ), 方程(5)有如下 Gauss 形式的单光束精确解<sup>[14, 8]</sup>

$$\begin{aligned} \psi_{\text{G}}(\mathbf{r}, z) = & \sqrt{P_0} \exp[i\theta(z)] \mathcal{K}(\sqrt{\pi}u(z)) \\ & \times \exp[-r^2(2u(z)^2) + i\alpha(z)r^2]. \end{aligned} \quad (7)$$

(7) 式中的  $u(z)$ ,  $\alpha(z)$  和  $\theta(z)$  分别为光束束宽、波前曲率和复振幅相位, 表达如下:

$$u(z) = w_0 \left[ \cos^2(\beta_0 z) + \frac{P_c}{P_0} \sin^2(\beta_0 z) \right]^{1/2}, \quad (8)$$

$$\alpha(z) = \frac{k\beta_0(P_c/P_0 - 1)w_0^2 \sin(2\beta_0 z)}{4w^2}, \quad (9)$$

$$\theta(z) = -\arctan \left[ \sqrt{\frac{P_c}{P_0}} \tan(\beta_0 z) \right], \quad (10)$$

其中

$$w_0 = u(z)|_{z=0},$$

$$\beta_0 = \sqrt{\gamma\kappa P_0},$$

$$P_c = 1\mathcal{K}(\gamma\kappa w_0^4 k^2).$$

$P_c$  是形成孤子的临界功率. 当  $P_0 = P_c$  时, 非线性

压缩刚好平衡线性衍射展宽, Gauss 光束在传输过程中束宽保持不变, 也就是孤子传输状态. 当  $P_0 \neq P_c$  时, Gauss 光束在传输过程中束宽沿传输轴线周期性波动, 即为呼吸子传输状态, 变化关系满足方程 (8).

为了获得椭圆坐标系下光束传输的情况, 将调制光束改写为

$$\psi_i(r, z) = E(\xi)N(\eta)\exp[iZ(z)], \quad (11)$$

其中  $E(\xi), N(\eta), Z(z)$  均为实函数. 在正交于传输轴  $z$  的光束截面上, 定义椭圆坐标变换公式为

$$\begin{aligned} x &= f(z) \cosh \xi \cos \eta, \\ y &= f(z) \sinh \xi \sin \eta, \\ z &= z, \end{aligned}$$

其中  $\xi$  为径向椭圆变量,  $\eta$  为角向椭圆变量,  $\xi \in [0, \infty), \eta \in [0, 2\pi]$ . 椭圆半焦距  $f$  与 Gauss 光束宽变化一致, 即  $f(z) = f_0 u(z)/w_0$ , 其中  $f_0$  为  $z=0$  处的椭圆半焦距.

将方程 (7)–(11) 代入方程 (6) 并分离变量, 有

$$\frac{d^2 E}{d\xi^2} - \epsilon \sinh 2\xi \frac{dE}{d\xi} - (a - p\epsilon \cosh 2\xi)E = 0, \quad (12)$$

$$\frac{d^2 N}{d\eta^2} + \epsilon \sin 2\eta \frac{dN}{d\eta} + (a - p\epsilon \cos 2\eta)N = 0, \quad (13)$$

$$-w^2(z)2\mu \frac{dZ}{dz} = p. \quad (14)$$

这里  $p$  和  $a$  为常数,  $\epsilon = f_0^2/w_0^2$  为椭圆参量, 决定了 Ince-Gauss 光横向结构模式. 方程 (14) 的解为  $Z(z)$

$$= p\theta(z).$$

方程 (13) 为 Hill 方程的特例 Ince 方程<sup>[16]</sup>. 令  $i\xi = \eta$ , 方程 (12) 可以转换为方程 (13), 反之亦然. 方程 (13) 的解为  $p$  阶  $m$  级奇偶 Ince 多项式, 分别为  $C_p^m(\eta, \epsilon), S_p^m(\eta, \epsilon)$ . 对于偶函数有  $0 \leq m \leq p$ , 对于奇函数有  $1 \leq m \leq p$ ,  $p, m$  具有相同的奇偶性, 即  $(-1)^{p-m} = 1$ . 方程 (13) 的解为<sup>[16, 17]</sup>

$$\begin{aligned} \psi_{e,p,m}^e(r, \epsilon) &= C_p^m(i\xi, \epsilon)C_p^m(\eta, \epsilon) \\ &\times \exp[ip\theta(z)], \quad (15a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi_{e,p,m}^o(r, \epsilon) &= S_p^m(i\xi, \epsilon)S_p^m(\eta, \epsilon) \\ &\times \exp[ip\theta(z)]. \quad (15b) \end{aligned}$$

结合方程 (7)–(11), 强非局域介质中椭圆坐标系下的 Ince-Gauss 型解为

$$\begin{aligned} R_{e,p,m}^{IG}(r, \epsilon) &= C/w(z)C_p^m(i\xi, \epsilon)C_p^m(\eta, \epsilon) \\ &\times \exp[-r^2/w^2(z) + i\alpha(z)r^2 \\ &+ \mathfrak{I}(p+1)\theta(z)], \quad (16a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_{o,p,m}^{IG}(r, \epsilon) &= S/w(z)S_p^m(i\xi, \epsilon)S_p^m(\eta, \epsilon) \\ &\times \exp[-r^2/w^2(z) + i\alpha(z)r^2 \\ &+ \mathfrak{I}(p+1)\theta(z)], \quad (16b) \end{aligned}$$

其中  $C, S$  为归一化常数, 使得光束的功率为  $P_0$ ,

由  $\int_{-\infty}^{+\infty} |R_{e,o,p,m}^{IG}|^2 dS = P_0$  确定,  $dS$  为光束横向截面的面积微分单元. Ince-Gauss 解在任意  $z$  平面满足正交性, 有

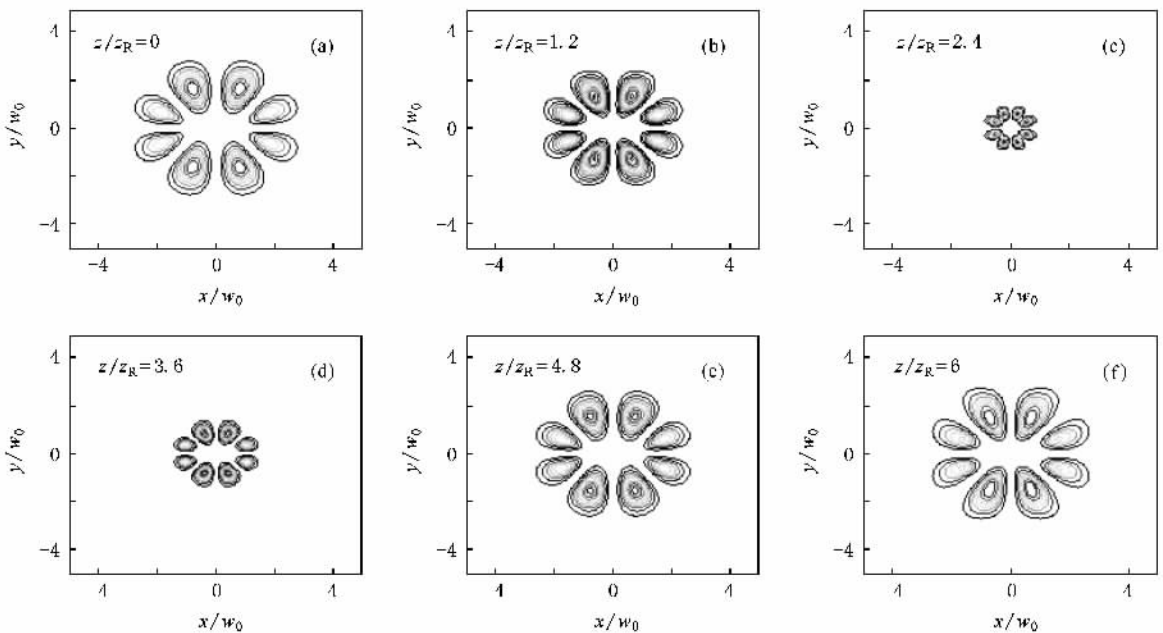


图 1 奇 Ince-Gauss 呼吸子在一般非局域非线性介质中的传输过程. 模拟条件为  $\alpha = 0.3, P_0/P_c = 0.7, \epsilon = 2, p = 4, m = 4$ . 这里  $Z_R = kw_0^2$  为 Rayleigh 长度.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R_{\sigma, p, m}^{IG} R_{\sigma', p', m'}^{IG} dS = \delta_{\sigma\sigma'} \delta_{pp'} \delta_{mm'}$$

其中  $\sigma = e, \rho$ .

当入射光束功率为临界功率时,即  $P_0 = P_c$ , Ince-Gauss 光以孤子形式传输,即 Ince-Gauss 光孤子<sup>[18]</sup>.当  $P_0 \neq P_c$  时,介质中传输的光束为 Ince-Gauss 呼吸子.图 1 利用分布 Fourier 算法<sup>[19]</sup>根据方程(1)数值模拟了 Ince-Gauss 呼吸子在一般非局域非线性介质中的传输过程.

当  $p = 0, m = 0$  时,方程(16a)(16b)为最低阶 Ince-Gauss 型解,由于  $C_0^0(\eta, \varepsilon) = 1$ ,Ince-Gauss 型解退化为方程(7)所描述的 Gauss 型解.

### 3. 强非局域介质中几种 Gauss 型解之间的关系

Ince-Gauss 解、Hermite-Gauss 解和 Laguerre-Gauss 解分属于不同的完备正交解系,揭开它们之间的联系必然对研究强非局域介质中光束传输有着重要的意义.先给出文献[11,12]中的强非局域介质中 Hermite-Gauss 解和 Laguerre-Gauss 解,这里我们仅分析孤子形式的解,对于呼吸子有相似的分析方法.

1+2 维空间强非局域非线性介质中传输光束的 Hermite-Gauss 型和 Laguerre-Gauss 型高阶孤子解

分别表示如下:

$$R_{n_x, n_y}^{HG}(x, y, z) = AH_{n_x}\left(\frac{x}{w_0}\right)H_{n_y}\left(\frac{y}{w_0}\right)e^{-i\beta_{nm}z} \times \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2w_0^2}\right)$$

其中  $H_{n_x}, H_{n_y}$  为 Hermite 多项式,传输常数满足表达式

$$\beta_{nm} = \chi(m + n + 1)\sqrt{\mu\phi\gamma P_0/2}$$

$$R_{f, n}^{LG}(r, \varphi, z) = C_{fn} L_f^n(r^2/w^2) \frac{r^n}{w^n} \times \exp(-r^2/2w^2) \times \exp[-i\mu(4f + 2n + 2)z/w^2] \times (a \cos n\varphi + b \sin n\varphi)$$

其中  $L_f^n$  为 Laguerre 多项式,  $a, b$  为任意实数. Laguerre-Gauss 光场的角向分布可选择  $\cos n\varphi$  和  $\sin n\varphi$  的线性组合,  $n$  表征角向分布,径向分布则由  $n$  和  $f$  共同决定.  $A, C_{fn}$  分别为这两种类型解的归一化常数,以保证传输光束的总功率守恒.

从数学角度看,这三种解之间存在着必然的联系.当  $f_0 \rightarrow 0$ ,也即椭圆参量  $\varepsilon \rightarrow 0$  时,椭圆坐标系演变为极坐标系,Ince-Gauss 光相应演变为 Laguerre-Gauss 光.当  $f_0 \rightarrow \infty$ ,即椭圆参量  $\varepsilon \rightarrow \infty$  时,椭圆坐标系演变为直角坐标系,Ince-Gauss 光相应演变为 Hermite-Gauss 光.图 2 给出了不同  $\varepsilon$  下两个奇偶 Ince 多项式  $C_3^3(\eta)$  和  $S_3^3(\eta)$  在半平面  $0 \leq \eta < \pi$  内随

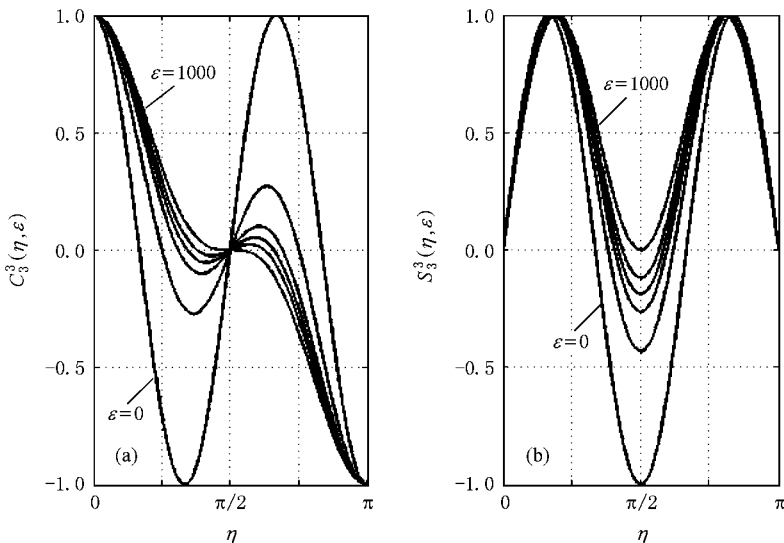


图 2 Ince 多项式  $C_3^3(\eta)$  和  $S_3^3(\eta)$  函数图  $\varepsilon = 0, 2, 4, 6, 10, 1000$ .横坐标取点分别对应  $\eta = 0, \pi/4, \pi/2, 3\pi/4, \pi$ .由于  $m$  为奇数,多项式周期为  $\pi$ ,在  $0 \leq \eta < \pi$  内有  $m$  个零点,即当  $m = 3$  时 Ince 光束在全平面椭圆上有 6 个节点.(a)  $C_3^3(\eta)$  关系 (b)  $S_3^3(\eta)$  关系

着  $\eta$  的变化关系. 从物理角度看, 根据光束传输理论, 为了构建结构稳定的光束传输模式, 同时保证不同光束类型转换之间传输稳定性, 不同类型光束解的形式传输过程中必须有相同的估衣( gouy )相移<sup>[17]</sup>, 即有  $(p + 1)\beta_0 = -\beta_{mn} = -\mu(4f + 2n + 2)/w^2$ .  $P_0 = P_c = 1/(\gamma\kappa w_0^4 k^2)$  时,  $p$  的取值满足  $p = 2f + n = n_x + n_y$ . 对于偶 Ince-Gauss 光的形式, 转换为

Hermite-Gauss 光模式满足关系式  $n_x = m, n_y = p - m$ , 对于奇 Ince-Gauss 光形式有  $n_x = m - 1, n_y = p - m + 1$ . 当 Ince-Gauss 光转换为 Laguerre-Gauss 光时满足关系式<sup>[17]</sup>  $m = n, p = 2f + n$ .

图 3—图 5 给出几个 Ince-Gauss 光光子转换为相应的 Laguerre-Gauss 光光子和 Hermite-Gauss 光光子的图例.

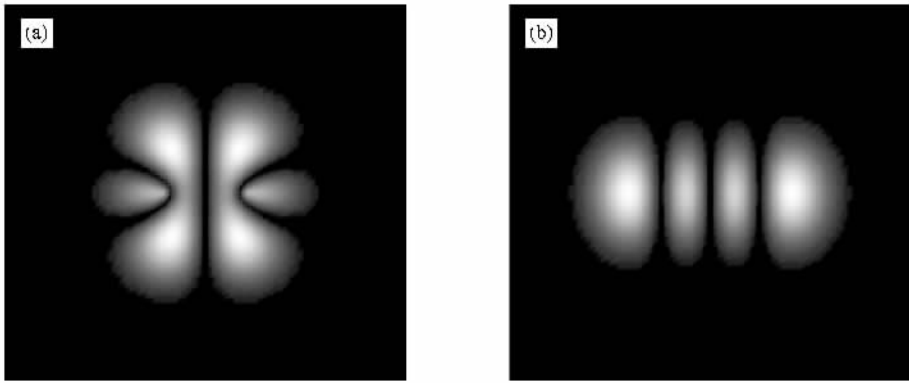


图 3  $\epsilon = 2$  时的偶 Ince-Gauss 光光子在  $\epsilon \rightarrow \infty$  时转换为 Hermite-Gauss 光光子  $p = 3, m = 3$ . (a)  $\epsilon = 2$  (b)  $\epsilon \rightarrow \infty$

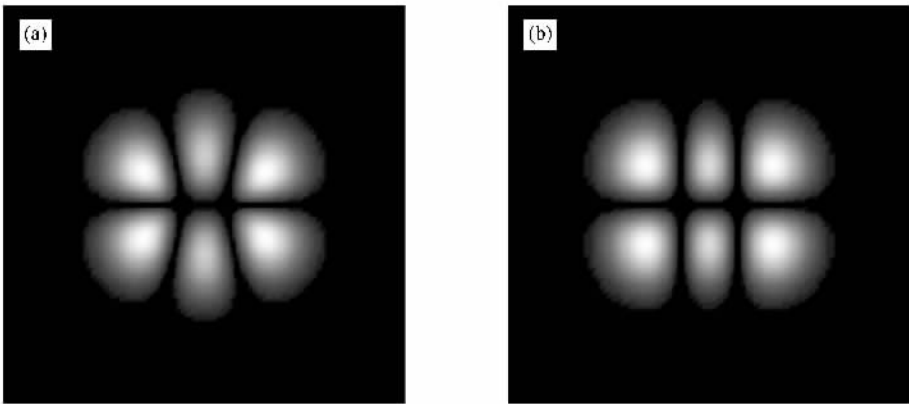


图 4  $\epsilon = 2$  时的奇 Ince-Gauss 光光子在  $\epsilon \rightarrow \infty$  时转换为 Hermite-Gauss 光光子  $p = 3, m = 3$ . (a)  $\epsilon = 2$  (b)  $\epsilon \rightarrow \infty$

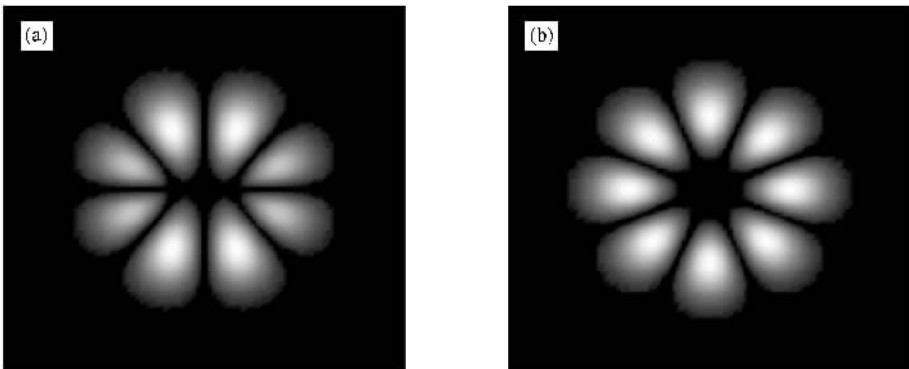


图 5  $\epsilon = 2$  时的奇 Ince-Gauss 光光子在  $\epsilon \rightarrow 0$  时转换为 Laguerre-Gauss 光光子  $p = 4, m = 4$ . (a)  $\epsilon = 2$  (b)  $\epsilon \rightarrow \infty$

## 4. 结 论

本文利用强非局域非线性介质中光束传输所满足的 Snyder-Mitchell 模型得到了椭圆坐标系下  $1+2$  维传输光束的 Ince-Gauss 呼吸子解. 同时还数值模

拟了 Ince-Gauss 呼吸子的传输过程. 当 Ince-Gauss 光束的入射功率为临界功率时, 光束保持孤子形式传输. Ince-Gauss 光束横向结构由 Ince 多项式描述, 具有椭圆对称性. 一定条件下 Ince-Gauss 光可以连续而精确地转换为 Laguerre-Gauss 光或 Hermite-Gauss 光.

- [ 1 ] Snyder A W , Mitcher D J 1997 *Science* **276** 1538
- [ 2 ] Ouyang S G , Hu W , Guo Q 2007 *Phys. Rev. A* **76** 053832
- [ 3 ] Hu W , Ouyang S G , Yang P B , Guo Q 2008 *Phys. Rev. A* **77** 033842
- [ 4 ] Guo Q , Zhang X P , Hu W , Shou Q 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 1832 ( in Chinese ) [ 郭 旗、张霞萍、胡 巍、寿 倩 2006 物理学报 **55** 1832 ]
- [ 5 ] Shen Y R 1997 *Science* **276** 1520
- [ 6 ] Shen Y R 1984 *The Principles of Nonlinear Optics* ( New York : Wiley ) p286
- [ 7 ] Yuri S K , George I S 2002 *Opt. Photon. News* **13** 59
- [ 8 ] Guo Q , Luo B , Yi F 2004 *Phys. Rev. E* **69** 016602
- [ 9 ] Deng D M , Zhao X , Guo Q , Lan S 2007 *J. Opt. Soc. Am. B* **24** 2537
- [ 10 ] Deng D M , Guo Q 2008 *Pure Appl. Opt.* **10** 035101
- [ 11 ] Zhang X P , Guo Q 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 3178 ( in Chinese ) [ 张霞萍、郭 旗 2005 物理学报 **54** 3178 ]
- [ 12 ] Zhang X P , Guo Q 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 5189 ( in Chinese ) [ 张霞萍、郭 旗、胡 巍 2005 物理学报 **54** 5189 ]
- [ 13 ] Xie Y Q , Guo Q 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 3020 ( in Chinese ) [ 谢逸群、郭 旗 2004 物理学报 **53** 3020 ]
- [ 14 ] Ohtomo T , Kamikariya K , Otsuka K , Chu S C 2007 *Opt. Express* **15** 10705
- [ 15 ] Cao J N , Guo Q 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 3688 ( in Chinese ) [ 曹觉能、郭 旗 2005 物理学报 **54** 3688 ]
- [ 16 ] Arscott F M 1964 *Periodic Differential Equations* ( Oxford : Pergamon )
- [ 17 ] Bandres M A , Gutierrez J C 2004 *J. Opt. Soc. Am. A* **21** 873
- [ 18 ] Deng D M , Guo Q 2008 *Opt. Lett.* **32** 3206
- [ 19 ] Agrawal G P 2002 *Nonlinear Fiber Optics and Application of Nonlinear Fiber Optics* ( Beijing : Electronic Industry Press ) pp34 , 35 64—69 94—97 ( in Chinese ) [ Agrawal G P 2002 非线性光纤光学原理及应用( 中译本 ) 北京 : 电子工业出版社 ] 第 34 , 35 , 64—69 94—97 页 ]
- [ 20 ] Dai J H , Guo Q 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 1752 ( in Chinese ) [ 戴继慧、郭 旗 2009 物理学报 **58** 1752 ]
- [ 21 ] Cao L G , Lu D Q , Hu W , Yang P B , Zhu Y Q , Guo Q 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 6365 ( in Chinese ) [ 曹龙贵、陆大全、胡 巍、杨平保、朱叶青、郭 旗 2008 物理学报 **57** 6365 ]
- [ 22 ] Liang Y B , Zheng Y J , Yang P B , Cao L G , Lu D Q , Hu W , Guo Q 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 5690 ( in Chinese ) [ 梁炎斌、郑亚建、杨平保、曹龙贵、陆大全、胡 巍、郭 旗 2008 物理学报 **57** 5690 ]

# Analytical solution in the Ince-Gaussian form of the beam propagating in the strong nonlocal media<sup>\*</sup>

Zhang Xia-Ping<sup>1,2)</sup> Liu You-Wen<sup>1)†</sup>

<sup>1</sup> *Faculty of Science, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China*

<sup>2</sup> *Department of Physics, Nanjing Xiaozhuang University, Nanjing 210017, China*

( Received 11 February 2009 ; revised manuscript received 11 March 2009 )

## Abstract

Based on the Snyder-Mitchell model that describes the paraxial beam propagating in strongly nonlocal nonlinear media and by constituting the trial solution with modulating the Gaussian beam by Ince polynomials in elliptic coordinate, the close forms of Ince-Gaussian beams have been accessed. Depending on the power of the beam, the Ince-Gaussian beams can be either a soliton state when the input power is equal to the critical power or a breather state. The Ince-Gaussian beams constitute the exact and continuous transition modes between Hermite-Gaussian beams and Laguerre-Gaussian beams. The profiles of the breather at different propagating distance are numerically obtained and the transitions of a few Ince solitons are given.

**Keywords** : strong nonlocal nonlinear media , Ince-Gaussian beam , Laguerre-Gaussian beam , Hermite-Gaussian beam

**PACC** : 4265S

<sup>\*</sup> Project supported by the Scientific Research Foundation for the Returned Overseas Chinese Scholars, the Doctoral Program Foundation of Institution of Higher Education, China ( Grant No. 200802871028 ) and the Summit of the " Six Great Talents " of Jiangsu Province, China ( Grant No. 07-A-011 ).

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail: ywliu@nuaa.edu.cn