

超声速流体 Kelvin-Helmholtz 不稳定性 速度梯度效应研究*

王立锋^{1)B)} 滕爱萍¹⁾ 叶文华^{2)B)†} 范征锋³⁾ 陶焯晟¹⁾ 林传栋¹⁾ 李英骏¹⁾

1) 中国矿业大学(北京)力学与建筑工程学院和理学院, 北京 100083)

2) 北京大学应用物理与技术研究中心, 北京 100871)

3) 北京应用物理与计算数学研究所, 北京 100088)

(2008 年 11 月 26 日收到, 2008 年 12 月 30 日收到修改稿)

利用加权本质上无振荡(WENO)方法模拟超声速流体 Kelvin-Helmholtz(KH)不稳定性, 研究速度梯度对 KH 不稳定性线性增长率和后期非线性演化的影响. 模拟发现超声速流体中的速度梯度对 KH 不稳定性具有较强的致稳作用, 给出了包含速度梯度致稳的线性增长率经验公式. 数值模拟和经验公式符合得很好. 模拟给出了清晰的流场密度等值线, 这说明 WENO 方法模拟超声速流体 KH 不稳定性具有较好的界面变形捕捉能力. 模拟结果表明速度梯度影响 KH 涡的演化, 在给定密度梯度的情况下速度梯度越大 KH 涡的横向尺度越小.

关键词: Kelvin-Helmholtz 不稳定性, 超声速流体, 速度梯度

PACC: 5235, 4720, 4735

1. 引言

当相互接触的两层流体存在速度间断时, 流体是 Kelvin-Helmholtz(KH)不稳定的^[1]. KH 不稳定性广泛存在于自然界中, 如乌云的剪切翻卷、海浪的形成和破碎、太阳风和地球磁圈相互作用^[2]、天体中的射流^[3,4]等. 在高速推进系统, 特别是未来空间技术中的超燃问题以及喷气噪声问题等研究领域, 超声速自由剪切现象一直受到高度关注.

不可压缩混合层对小扰动的失稳属于 KH 不稳定性. 不可压缩 KH 不稳定性的线性和弱非线性已有不少研究^[1,5-9], 流体界面上的一个小扰动会经线性和弱非线性的增长, 并由强非线性作用发展成为湍流混合. 对可压缩流体, 传统的 Mach 数已经不能够确切地描述可压缩性对混合层稳定性的影响, 需要引入另外的参数. Papamoschou 和 Roshko^[10]进行可压缩湍流混合的稳定性实验, 证明对流 Mach 数是确定可压缩性影响的合适参数, 其定义为

$$Ma_{c1} = \frac{U_1 - U_c}{a_1},$$

$$Ma_{c2} = \frac{U_c - U_2}{a_2},$$

其中 a_1 和 a_2 是混合层两边无穷远处的声速, U_1 和 U_2 是两流体的平均流速度, $U_c = \frac{a_1 U_1 + a_2 U_2}{a_1 + a_2}$ 代表大尺度结构的运动速度.

许多理论分析和实验表明, 随着对流 Mach 数的提高, 流体变得更稳定, 即压缩性起稳定作用^[11-13]. 另外, 混合层的其他流动参数(包括 Reynolds 数、速度比、密度比、温度比以及两股流的化学成分等)对混合层的许多特征都有影响^[14,15]. 实际的混合层中会存在密度、速度和温度梯度, 而关于它们对 KH 不稳定性影响的研究还比较少. 本文使用数值模拟方法研究超声速流体 KH 不稳定性中的速度梯度效应. 对无黏可压缩流体中的 KH 不稳定性, 使用五阶加权本质上无振荡(WENO)有限差分格式求解 Euler 方程, 发现速度梯度对 KH 不稳定性具有较强的抑制作用并影响其后期的非线性演化.

* 国家重点基础研究发展计划(批准号: 2007CB815100)、国家自然科学基金(批准号: 10775020, 10874242)和高等学校博士学科点专项科研基金(批准号: 20070290008)资助的课题.

† 通讯联系人. E-mail: ye_wenhua@iapcm.ac.cn

2. 数值模拟方法

本文模拟的物理系统如图 1 所示, 两流体 A 和 B 分布在 y 轴的左右两侧, 流场初始的速度和密度分布由双曲函数给定,

$$u(x) = \frac{v_A^{(0)} + v_B^{(0)}}{2} - \frac{v_A^{(0)} - v_B^{(0)}}{2} \tanh\left(\frac{x}{D_u}\right), \quad (1)$$

$$\rho(x) = \frac{\rho_A^{(0)} + \rho_B^{(0)}}{2} - \frac{\rho_A^{(0)} - \rho_B^{(0)}}{2} \tanh\left(\frac{x}{D_\rho}\right). \quad (2)$$

左侧流体 A 无穷远处密度和 y 方向的速度为分别 $\rho_A^{(0)}$ 和 $v_A^{(0)}$, 右侧流体 B 无穷远处密度和 y 方向的速度分别为 $\rho_B^{(0)}$ 和 $v_B^{(0)}$, 初始无扰动流场中两流体在 x 方向的速度分量为 $u_A^{(0)} = u_B^{(0)} = 0$. 初始时刻两种流体静压相等, 即 $p_A^{(0)} = p_B^{(0)} = p_0$.

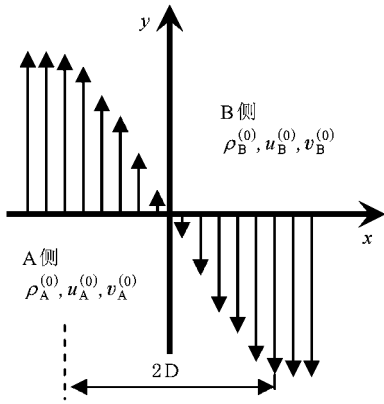


图 1 无扰动流场分布 $2D$ 为过渡区域的宽度

这里考虑无黏可压缩流体中的 KH 不稳定性. 无黏流体 KH 不稳定性的控制方程是 Euler 方程, 二维 Euler 方程的守恒形式为

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} = 0. \quad (3)$$

守恒量 U 和通量 E, F 分别表示为

$$U = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho e \end{pmatrix},$$

$$E = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ (\rho e + p)u \end{pmatrix},$$

$$F = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ (\rho e + p)v \end{pmatrix},$$

其中 ρ 为流体的密度, u 为流体沿 x 方向的速度, v 为流体沿 y 方向的速度, p 为流体的压力, $e = c_v T + 1/2(u^2 + v^2)$ 表示单位质量的能量, 其中 T 为流体的温度. 状态方程采用理想气体状态方程 $p = \Gamma \rho T$, $c_v = \Gamma(\gamma_h - 1)$ 表示比定容热容, γ_h 表示气体绝热指数.

流体方程 (3) 采用 WENO 有限差分格式进行求解^[16,17]. WENO 格式是对本质上无振荡(ENO)格式的改进, 它将 ENO 格式中用逻辑判断选择光滑模板的方法改进为所有模板的加权平均, 从而提高了计算格式对流场的适应性. ENO 是 Harten 等^[18]于 1987 年提出的求解双曲守恒率组的一种本质上无振荡的广义 Godunov 格式. 基于所有模板的凸组合而构造的加权本质上无振荡格式称为 WENO 格式. WENO 格式是 1994 年由 Liu 等^[19]在 ENO 格式构造思想基础上提出的. ENO 格式具有在间断区分辨率高, 在光滑区计算精度高等优点, 但也存在着一些不足之处. WENO 格式通过引入变化的加权因子, 使格式在光滑区的截断误差阶数又有了进一步的提高, 而在间断附近仍然保持了 ENO 格式良好的分辨能力, 并且格式的稳定性又有了进一步的增强.

初始时刻在两流体界面附近引入如下形式的速度扰动:

$$u = u_0 \cos(ky) \exp(-k|x|). \quad (4)$$

这里 k 是扰动波数, u 是 x 方向扰动速度, u_0 是 x 方向初始扰动速度幅度. 恰当的边界条件是保证计算可靠的必要条件. 不稳定波在 y 方向上具有周期性, 可采用周期边界条件. 在 x 方向上边界条件要复杂一些, 因为 KH 不稳定性主要发生在界面密度梯度大的地方, 而在离界面较远的位置扰动可以忽略. 本文采用嵌边出流边界条件^[20].

为了提高精度, 本文的计算中在 x 和 y 方向上都采用均匀网格. x 方向网格宽度为 $0.05 \mu\text{m}$, 分布 3600 个网格, y 方向在一个不稳定波长内分布 64 个网格. 加密网格计算后结果不变, 表明网格已经足够.

3. 模拟结果及讨论

流场的初始密度和速度分布由双曲函数给定, 这里分别称 D_u 和 D_ρ 为速度梯度标长和密度梯度标长. 本文主要研究速度梯度 D_u 对 KH 不稳定的线性增长率和非线性演化的影响, 也就是在固定密度梯

度的情况下,研究速度梯度对 KH 不稳定的线性增长率以及非线性演化的影响.

模拟条件如下: $p_0 = 1.0 \times 10^{13}$ Pa, $\rho_A^{(0)} = 4.25$ g/cm³, $v_A^{(0)} = 10$ cm/ μ s, $\rho_B^{(0)} = 0.5$ g/cm³, $v_B^{(0)} = -10$ cm/ μ s, 扰动波长 $\lambda = 40$ μ m, 气体绝热指数 $\gamma_h = 5/3$. 则流体 A 和 B 两侧的对流 Mach 数分别为 $Ma_{c1} = 2.378$, $Ma_{c2} = 0.816$. 本文以下的模拟中这些参数将保持不变,仅改变密度和速度梯度标长.

3.1. 线性增长率

表 1 和表 2 分别给出密度标长 D_ρ 为 10 和 20 μ m 时,不同速度梯度下 KH 不稳定性的线性增长率.

$\gamma_{KH,c} = k |u_A^{(0)} - u_B^{(0)}| \sqrt{\rho_A^{(0)} \rho_B^{(0)}} (\rho_A^{(0)} + \rho_B^{(0)})$ 是无黏不可压缩流体中经典 KH 不稳定性的线性增长率^[11],其中 $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ 是扰动波数.

$$\gamma = \gamma_c \alpha (1 + kD_u)$$

是考虑速度梯度效应后给出的 KH 不稳定性线性增长率的经验公式.由于没有考虑密度梯度和流体可压缩性的影响,这里 α 是可变的参数,代表密度梯度和流体可压缩性以及其它因素对增长率的影响. γ_{cal} 是数值模拟给出线性增长率.

表 1 $D_\rho = 10$ μ m, $\alpha = 2$ 时不同速度梯度下 KH 不稳定性的线性增长率

| D_u / μ m | kD_u | $\frac{\alpha}{1 + kD_u}$ | γ / ns ⁻¹ | γ_{cal} / ns ⁻¹ | $\frac{\gamma_{cal}}{\gamma_c}$ | $\left \frac{\gamma_{cal} - \gamma}{\gamma_{cal}} \right $ |
|-----------------|--------|---------------------------|-----------------------------|-----------------------------------|---------------------------------|---|
| 20 | 3.142 | 0.483 | 4.66 | 4.45 | 0.462 | 0.047 |
| 30 | 4.712 | 0.350 | 3.37 | 3.42 | 0.355 | 0.015 |
| 40 | 6.283 | 0.275 | 2.65 | 2.80 | 0.290 | 0.053 |
| 50 | 7.854 | 0.226 | 2.18 | 2.30 | 0.228 | 0.052 |
| 60 | 9.425 | 0.192 | 1.85 | 1.93 | 0.200 | 0.041 |

表 2 $D_\rho = 20$ μ m, $\alpha = 1.5$ 时不同速度梯度下 KH 不稳定性的线性增长率

| D_u / μ m | kD_u | $\frac{\alpha}{1 + kD_u}$ | γ / ns ⁻¹ | γ_{cal} / ns ⁻¹ | $\frac{\gamma_{cal}}{\gamma_c}$ | $\left \frac{\gamma_{cal} - \gamma}{\gamma_{cal}} \right $ |
|-----------------|--------|---------------------------|-----------------------------|-----------------------------------|---------------------------------|---|
| 10 | 1.571 | 0.583 | 5.62 | 5.45 | 0.565 | 0.031 |
| 20 | 3.142 | 0.362 | 3.49 | 3.40 | 0.353 | 0.026 |
| 30 | 4.712 | 0.263 | 2.53 | 2.40 | 0.249 | 0.054 |
| 40 | 6.283 | 0.206 | 1.98 | 1.92 | 0.199 | 0.031 |
| 50 | 7.854 | 0.169 | 1.63 | 1.57 | 0.163 | 0.038 |
| 60 | 9.425 | 0.144 | 1.39 | 1.32 | 0.137 | 0.053 |

从表 1 和表 2 可以看出,超声速流体中 KH 不稳定性的线性增长率明显低于不可压缩的情况.在密度梯度标长相等的条件下,速度梯度标长越大(梯度越小),KH 不稳定性的线性增长率越小,即速度过渡区越宽,KH 不稳定性的线性增长率越小.这说明速度梯度具有致稳的作用.密度梯度标长 $D_\rho = 10$ μ m 时,经验公式 $\gamma = \gamma_c \alpha (1 + kD_u)$ 中的可变参数 $\alpha = 1.5$,经验公式和数值模拟的相对偏离在 5.3% 以内.密度梯度标长 $D_\rho = 20$ μ m 时,经验公式 $\gamma = \gamma_c \alpha (1 + kD_u)$ 中的可变参数 $\alpha = 2.0$,经验公式和数值模拟的相对偏离在 5.4% 以内.总体上,不同密度和速度梯度情况下,经验公式和数值模拟是符合的.

表 1 和 2 中可变参数 α 分别为 2 和 1.5,表明流体的可压缩性或密度梯度对不稳定增长具有致稳作用,抑或两者都具有致稳作用.在可压缩剪切层和混合层中流体的可压缩性对不稳定增长具有致稳作用,已经得到实验和理论分析的证实^[11-13].关于密度梯度是否具有致稳作用需要进一步的研究.

3.2. 不稳定界面

通过以上分析可以知道,速度梯度对 KH 不稳定性具有致稳作用,速度梯度还可能影响 KH 不稳定性的后期非线性演化.下面研究速度梯度对 KH 不稳定性非线性演化的影响.

图 2 给出密度和速度梯度标长为 $D_\rho = 10$ μ m, $D_u = 10$ μ m 情况下, $t = 1.4, 1.6, 1.8, 2.0$ ns 时刻的不稳定界面.图 3 给出密度和速度梯度标长为 $D_\rho = 10$ μ m, $D_u = 20$ μ m 情况下, $t = 1.8, 2.0, 2.2, 2.4$ ns 时刻的不稳定界面.图 4 给出密度和速度梯度标长为 $D_\rho = 10$ μ m, $D_u = 30$ μ m 情况下, $t = 2.2, 2.4, 2.6, 2.8$ ns 时刻的不稳定界面.由图 2—图 4 可以看出,模拟给出了清晰的密度等值线.这说明用 WENO 方法模拟超声速流体 KH 不稳定性具有较好的界面变形捕捉能力.比较图 2—图 4 还可以发现, KH 涡的横向尺度(x 方向)和流向(y 方向)尺度相当.

由于采用双曲函数对流体界面进行了光滑处理,因此在我们的模拟中已经没有严格意义上界面的概念.这里我们通过追踪密度等值线为 2.5 g/cm³ 的变形情况来研究界面的变形规律.为研究方便,定义 2.5 g/cm³ 等值线上的点距离 $x = 0$ 直线的最大水平距离为穿透深度.图 2 中,1.8 ns 时刻扰动在重流

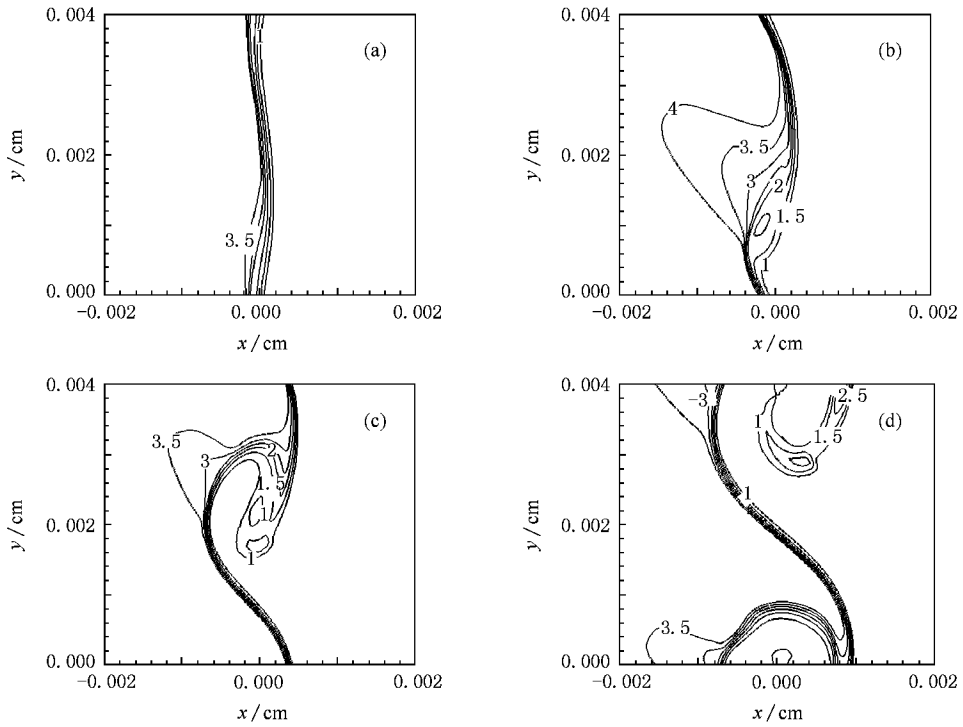


图 2 $D_\rho = 10 \mu\text{m}$, $D_u = 10 \mu\text{m}$ 情况下不稳定界面的密度等值线 (a) $t = 1.4 \text{ ns}$, (b) $t = 1.6 \text{ ns}$, (c) $t = 1.8 \text{ ns}$, (d) $t = 2.0 \text{ ns}$

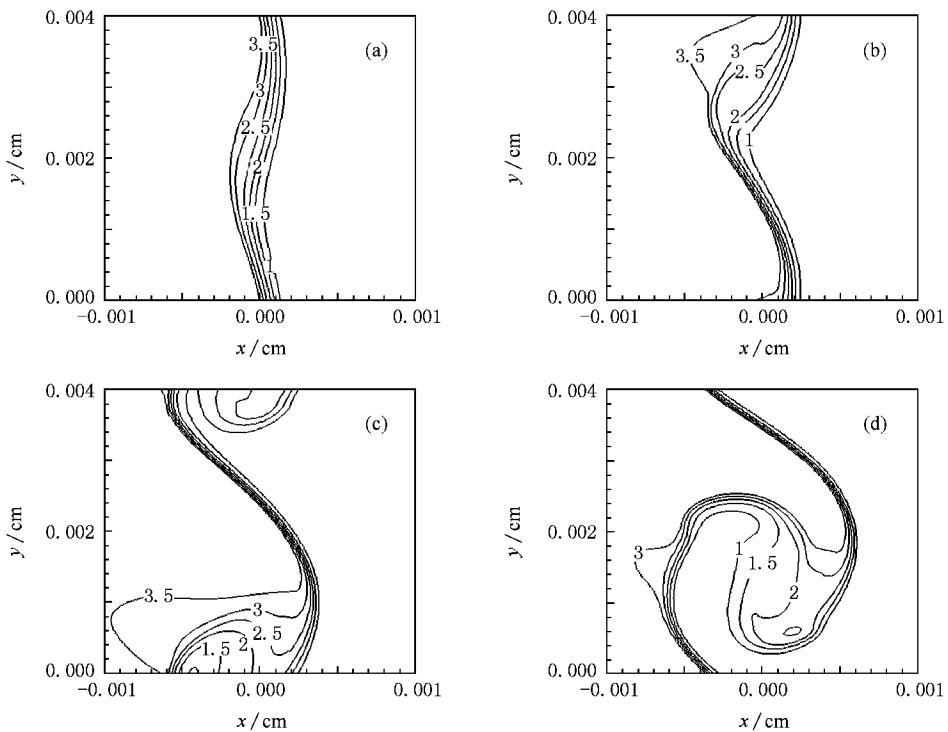


图 3 $D_\rho = 10 \mu\text{m}$, $D_u = 20 \mu\text{m}$ 情况下不稳定界面的密度等值线 (a) $t = 1.8 \text{ ns}$, (b) $t = 2.0 \text{ ns}$, (c) $t = 2.2 \text{ ns}$, (d) $t = 2.4 \text{ ns}$

体和轻流体中穿透深度分别为 $d_H = 6.99 \mu\text{m}$ 和 $d_L = 4.39 \mu\text{m}$, 则 $d_L/d_H = 0.63$; 2.0 ns 时刻 $d_H = 8.36$

μm 和 $d_L = 9.24 \mu\text{m}$, $d_L/d_H = 1.10$. 图 3 中 2.2 ns 时刻扰动在重流体和轻流体中穿透深度分别为 $d_H = 5.74 \mu\text{m}$ 和 $d_L = 3.29 \mu\text{m}$, $d_L/d_H = 0.57$; 2.4 ns 时刻 $d_H = 6.39 \mu\text{m}$ 和 $d_L = 5.59 \mu\text{m}$, $d_L/d_H = 0.87$.

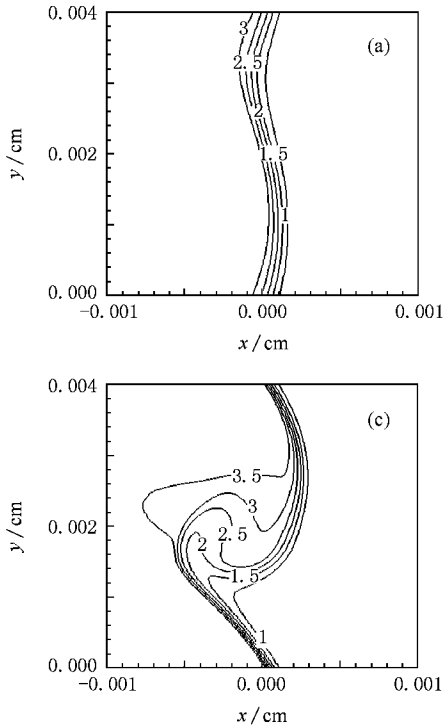


图 4 中 2.6 ns 时刻扰动在重流体和轻流体中穿透深度分别为 $d_H = 5.23 \mu\text{m}$ 和 $d_L = 2.30 \mu\text{m}$, $d_L/d_H = 0.44$; 2.8 ns 时刻 $d_H = 6.23 \mu\text{m}$ 和 $d_L = 3.35 \mu\text{m}$, $d_L/d_H = 0.54$.

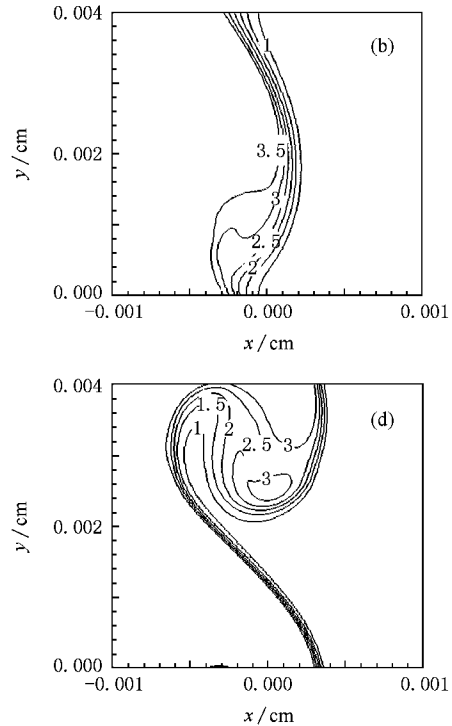


图 4 $D_\rho = 10 \mu\text{m}$, $D_u = 30 \mu\text{m}$ 情况下不稳定界面的密度等值线 (a) $t = 2.2 \text{ ns}$, (b) $t = 2.4 \text{ ns}$, (c) $t = 2.6 \text{ ns}$, (d) $t = 2.8 \text{ ns}$

通过以上分析可知,速度梯度影响 KH 涡的演化,在密度梯度标长不变的情况下,速度梯度标长越大 KH 涡的横向尺度越小.同时还发现, KH 涡在轻重流体中穿透深度不相等, KH 涡在轻流体中穿透深度的比值 d_L/d_H 随时间增加.

4. 结 论

本文利用 WENO 方法求解 Euler 方程来模拟超

音速流体中的 KH 不稳定性.研究了速度梯度对 KH 不稳定性的影响.研究表明超声速流体中的速度梯度对 KH 不稳定性的具有较强的致稳作用,给出了包含速度梯度致稳效应的线性增长率经验公式.经验公式和数值模拟很好符合.速度梯度影响 KH 涡的演化,在给定密度梯度情况下速度梯度标长越大 KH 涡的横向尺度越小.这些结论对理解超声速流体的非线性演化及混合过程变缓的机理会有帮助.

- [1] Chandrasekhar S 1961 *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability* (Oxford: Clarendon Press) p481
- [2] Hasegawa I, Fujimoto M, Phan T D, Reme H, Balogh A, Dunlop M W, Hashimoto C, TanDokoro R 2004 *Nature* **430** 755
- [3] Foster J M, Wilde B H, Rosen P A, Perry T S, Fell M, Edwards M J, Lasinski B F, Turner R E, Gitting M L 2002 *Phys. Plasma.* **9** 2251

- [4] Remington B A, Drake R P, Ryutov D D 2006 *Rev. Mod. Phys.* **78** 755
- [5] Walker J S 1993 *Phys. Fluids A* **5** 1466
- [6] Horton W, Perez J C, Carter T, Bengtson R 2005 *Phys. Plasma.* **12** 22303
- [7] Wang L F, Ye W H, Li Y J 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 3038 (in Chinese) [王立锋、叶文华、李英骏 2008 物理学报 **57** 3038]

- [8] Wang L F , Ye W H , Li Y J , Meng L M 2008 *Chin. Phys. B* **17** 3792
- [9] Wang L F , Ye W H , Fan Z F , Li Y J 2009 *Chin. Phys. Lett.* **26** 014701
- [10] Papamoschou D , Roshko A 1988 *J. Fluid Mech.* **197** 453
- [11] Lessen M , Fox J A , Zien H M 1966 *J. Fluid Mech.* **25** 737
- [12] Tam C K W , Morris P J 1980 *J. Fluid Mech.* **98** 439
- [13] Chen J H , Cantwell B J , Mansour N N 1990 *Phys. Fluids A* **2** 984
- [14] Monkewitz P A , Huerre P 1982 *Phys. Fluids* **25** 1137
- [15] Ragab S A , Wu J L 1989 *Phys. Fluids A* **1** 957
- [16] Fan Z F , Luo J S , Ye W H 2007 *Chin. Phys. Lett.* **24** 2308
- [17] Fan Z F , Luo J S 2008 *Chin. Phys. Lett.* **25** 624
- [18] Harten A , Engquist B , Osher S , Chakravarthy S 1987 *J. Comput. Phys.* **71** 231
- [19] Lin X D , Osher S , Chan T 1994 *J. Comput. Phys.* **115** 200
- [20] Su C H , Zhou H 2006 *Acta Aerodyn. Sin.* **24** 289 (in Chinese)
[苏彩虹、周 恒 2006 空气动力学学报 **24** 289]

Velocity gradient in Kelvin-Helmholtz instability for supersonic fluid^{*}

Wang Li-Feng^{1,3)} Teng Ai-Ping¹⁾ Ye Wen-Hua^{2,3)†} Fan Zheng-Feng³⁾
Tao Ye-Sheng¹⁾ Lin Chuan-Dong¹⁾ Li Ying-Jun¹⁾

¹ *School of Mechanics and Civil Engineering and School of Science ,China University of Mining and Technology , Beijing 100083 , China)*

² *Center for Applied Physics and Technology , Peking University , Beijing 100871 , China)*

³ *Institute of Applied Physics and Computational Mathematics , Beijing 100088 , China)*

(Received 26 November 2008 ; revised manuscript received 30 December 2008)

Abstract

Two-dimensional numerical calculations using weighted essentially non-oscillatory schemes (WENO) scheme were performed to study velocity gradient in the Kelvin-Helmholtz (KH) instability for supersonic fluid. It is found that the velocity gradient has a stabilization effect on the KH instability for supersonic fluid , and the linear growth rate empirical formula with velocity gradient stabilization effect is deduced. The empirical formula with velocity gradient stabilization effect agrees well with the simulation results. The sharp density contour is obtained , which indicates that the WENO finite difference scheme has good capturing ability in interface deformation. The evolution of KH vortex is influenced by the velocity gradient. When the density gradient is fixed , it is found that the larger the velocity gradient the smaller the transverse scale of the KH vortex.

Keywords : Kelvin-Helmholtz instability , supersonic fluid , velocity gradient

PACC : 5235 , 4720 , 4735

^{*} Project supported by the State Key Development Program for Basic Research of China (Grant No. 2007CB815100) , the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 10775020 , 10874242) and the Doctoral Program Foundation of Institution of Higher Education , China (Grant No. 20070290008) .

[†] Corresponding author. E-mail : ye_wenhua@iapcm.ac.cn