

# 等离子体中热阴极鞘层的结构\*

王道泳 马锦秀† 李毅人 张文贵

(中国科学技术大学近代物理系,中国科学院基础等离子体物理重点实验室和磁约束等离子体理论中心,合肥 230026)

(2009 年 1 月 19 日收到,2009 年 2 月 23 日收到修改稿)

结合热阴极电子发射理论和等离子体鞘层流体方程研究了热阴极附近存在虚阴极结构时的等离子体鞘层问题,采用 Sagdeev 势的方法讨论了鞘层解和广义 Bohm 判据.结果表明,不同于普通的 Bohm 鞘,由于热阴极附近存在大量发射电子,影响整个等离子体鞘层结构,使得进入鞘层的离子临界 Mach 数不是独立的常数,而是与鞘层电位降等参数有关的物理量.临界 Mach 数随着鞘层电位降(从鞘边缘到虚阴极)先增大后降低,并且随着热阴极温度的升高单调增大.此外,在平板模型下有相当可观的残余热发射电子越过虚阴极鞘层进入等离子体.

关键词:鞘层,热阴极发射,Bohm 判据

PACC:5240K,5290,5225

## 1. 引言

鞘层问题是等离子体物理中的一个重要的研究方向,近几十年来围绕它的理论和实验工作一直被广泛地展开.对于没有热电子发射的一般定态鞘层,Langmuir<sup>[1]</sup>早在 1929 年就作了基本阐述,其后 Bohm<sup>[2]</sup>给出了较为合适的理论模型,经由 Harrison 和 Thompson, Riemann 以及 Franklin 等多位学者逐步完善形成了目前的理论<sup>[3-7]</sup>,并同时扩展到有磁场和有尘埃颗粒存在时的鞘层结构模型<sup>[8-14]</sup>.近年来,有关鞘层结构的实验诊断工作也相继被开展<sup>[15-18]</sup>,目前对此类鞘层的研究已相当细致和深入.然而对于存在热电子发射时,发射电子与等离子体共同作用形成的鞘层结构,至今尚无完善的理论模型.

真空中的热阴极发射问题最早由 Richardson<sup>[19]</sup>研究,并给出了阴极电流的 Richardson 公式.后来 Langmuir, Dushman 等<sup>[20-24]</sup>更细致地完善了热阴极发射问题,并研究了空间电荷效应以及发射电子初速度对电势分布的影响.研究表明,在阴阳两极电压不是很高情况下,由于热阴极发射的电子不能被阳极及时有效地收集走,电子会在阴极附近堆积,形成所谓的虚阴极结构,即电位低于实际阴极电位的区域,以排斥初速度小的电子.真空中热发射时只存在发

射电子,当给定热阴极温度和两极电压时,虚阴极鞘层与电极间距有关,对此已有详细研究<sup>[24,25]</sup>.

热电子发射常常应用于等离子体环境中,如热阴极放电、发射探针诊断空间电位等等.另外,如果等离子体中壁存在强的二次电子发射,其情况亦类似于热阴极发射.热阴极附近的虚阴极鞘与等离子体中的鞘有机地结合在一起,形成紧靠热阴极的负电荷区(热发射电子密度高于离子密度)和靠近中心等离子的正电荷区,因此这是一个局域的电双层结构(普通 Bohm 鞘是正离子鞘).该类鞘层的属性是同时由热发射电子、等离子体电子和离子三种成分的行为以及边界条件共同决定的.近年来,随着热阴极放电及发射探针的普遍使用,使得研究存在热电子发射时的鞘层结构变得十分重要.然而由于热发射电子分布的复杂性,这类鞘层结构问题至今没有完整的模型.国内外对存在虚阴极情况下等离子体鞘层结构的研究工作也非常少.文献中只有 Kemp 和 Sellen<sup>[26]</sup>研究过等离子体中虚阴极鞘层结构,为了解释发射探针的伏安特性,他们曾经探讨过发射探针附近的鞘层问题,但是模型较为粗糙,把离子密度当作常数,并忽略发射电子在鞘-预鞘边界对准中性条件的影响.显然这不能准确反映等离子体热发射鞘层的结构,因此有必要给出一个合理的鞘层模型.

\* 国家自然科学基金(批准号:10875121, A0831062),中国科学院知识创新工程(批准号:KJ951-A1-101-1)和国家重点基础研究计划(批准号:2008CB717800)资助的课题.

† 通讯联系人. E-mail: jxma@ustc.edu.cn

本文结合热阴极电子发射理论和等离子体鞘层模型细致地研究了存在热电子发射情况下的一维等离子体鞘层, 将 Bohm 鞘和虚阴极结构联系在一起, 利用 Sagdeev 势的方法分析并定量地给出了鞘层的具体结构特征, 重点讨论了热发射鞘层 Bohm 判据随发射强度以及等离子体参数的变化关系。

## 2. 理论模型

考虑一维坐标空间下等离子体中热阴极电子发射鞘层模型, 并考虑低气压放电情况下的无碰撞鞘层。热阴极不断向等离子体发射热电子, 鞘层中有发射电子、等离子体电子、等离子体离子三种成分。在热阴极表面附近, 只要发射电流不是非常弱, 热发射电子密度通常远高于等离子体密度, 阴极表面的电子由于不能迅速扩散消失, 就会积累而形成虚阴极<sup>[20-24]</sup>。

取热阴极表面为  $x = 0$  的位置, 并令其电势为零, 假设鞘层内虚阴极位于  $x = x_m$  处, 且电位为最低  $U_m$ , 中心等离子体位于  $x > x_m$  的一边。我们将整个鞘层划分成两个区域(如图 1 所示): 其一是从  $x = 0$  到  $x = x_m$ , 该区域发射电子起主导作用, 电势从 0 降到  $U_m$ 。其二是从  $x = x_m$  到  $x = x_s$ , 这里  $x_s$  为鞘和预鞘边界的位置, 这个区域从虚阴极过渡到等离子体鞘的边缘, 发射电子的作用逐渐减弱, 电势从  $U_m$  升到  $U_s$ 。  $x > x_s$  的区域是准中性的预鞘区。在  $x = x_m$  的两侧, 空间电荷密度具有不同的分布规律, 以下分别叙述之。

子对这一区域总的电荷密度的贡献。

假定热阴极的温度为  $T_w$  (取能量作单位), 由金属的热发射理论可知<sup>[24-27]</sup>, 逸出金属表面(即  $x = 0$  位置)沿  $x$  方向速度在  $v_0 - v_0 + dv_0$  之间的这一群热发射电子形成的粒子通量流为

$$d\Gamma = \Gamma_0 \frac{m_e}{T_w} \exp\left(-\frac{m_e v_0^2}{2T_w}\right) v_0 dv_0. \quad (1)$$

从而这一群热发射电子在表面处形成的电流密度为

$$d\mathcal{I}(v_0) = -e\Gamma_0 \frac{m_e}{T_w} \exp\left(-\frac{m_e v_0^2}{2T_w}\right) v_0 dv_0. \quad (2)$$

这里  $\Gamma_0 = j_0/e$  为该温度下发射到金属外表面的饱和通量流, 其中  $j_0$  为所对应的饱和发射电流密度;  $e$  和  $m_e$  为电子电荷和质量。如图 1 所示, 发射电子在向右侧运动的过程中要克服势垒  $-eU(x)$ , 在某一点  $x$  处, 不是所有的初始电子都能到达, 速度较小的电子在到达该点前被反射。对于无碰撞的情况, 电子满足能量守恒  $m_e v_0^2/2 = -eU(x) + m_e v^2/2$ , 则两点间速度微分的关系为  $v_0 dv_0 = v dv$ 。又由于电流守恒,  $d\mathcal{I}(v_0) = d\mathcal{I}(v)$ 。因此初速度为  $v_0 - v_0 + dv_0$  的这一群电子到达空间  $x$  点速度变为  $v - v + dv$ , 从而所形成电流密度可表示为

$$d\mathcal{I}(v) = -e\Gamma_0 \frac{m_e}{T_w} \exp\left(-\frac{m_e v_0^2}{2T_w}\right) v dv.$$

由于电荷密度与电流密度关系为

$$d\rho(x) = -d\mathcal{I}(v)/v,$$

则这群电子在  $x$  处形成的电荷密度为

$$d\rho(x) = -e\Gamma_0 \frac{m_e}{T_w} \exp\left(-\frac{m_e v_0^2}{2T_w}\right) dv. \quad (3)$$

对该处电子所有速度积分, 得到所有由阴极表面运动到  $x$  处的电子电荷密度为

$$\begin{aligned} \rho_1(x) &= \int d\rho \\ &= -e \int_0^\infty \Gamma_0 \frac{m_e}{T_w} \exp\left(-\frac{m_e v^2 - 2eU(x)}{2T_w}\right) dv. \end{aligned} \quad (4)$$

除了阴极表面运动到  $x$  点的电子外, 还有从  $x$  点到  $x_m$  点之间被势场反射回来而到达  $x$  点的电子。这群电子的初始动能  $m_e v_0^2/2$  在  $-eU(x)$  与  $-eU_m$  之间, 它们无法越过势垒而被反射回来, 返回到  $x$  点时速度在  $0 - v_m$  之间, 其中  $v_m = \{2e[U(x) - U_m]/m_e\}^{1/2}$ , 这部分电子会再次在  $x$  处形成空间电荷密度。与上述讨论一样, 由于能量守恒和电流守恒, 反射的热电子所贡献的电荷密度为

$$\rho_2(x) = -e \int_0^{v_m} \Gamma_0 \frac{m_e}{T_w} \exp\left(-\frac{m_e v_0^2}{2T_w}\right) dv. \quad (5)$$

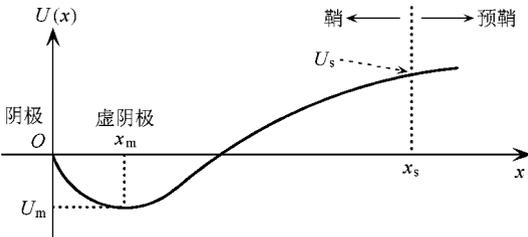


图 1 热阴极附近虚阴极鞘结构示意图

### 2.1. 阴极与虚阴极之间区域的电荷密度分布

该区是热发射电子聚集的区域, 通常在有较明显发射电流的情况下, 该区域发射电子的密度远高于等离子体密度, 而且等离子体离子和电子密度经过鞘层的衰减后可以忽略, 因此只需考虑热发射电

因此在  $x$  点总的发射电子电荷密度为

$$\rho(x) = \rho_1(x) + \rho_2(x) \\ = -e \int_{-v_m}^{\infty} \Gamma_0 \frac{m_e}{T_w} \exp\left(-\frac{m_e v^2 - 2eU}{2T_w}\right) dv. \quad (6)$$

对(6)式积分即可得到阴极与虚阴极之间的区域总电荷密度分布为

$$\rho(x) = -\frac{j_0}{v_x} \exp\left(\frac{eU}{T_w}\right) \left[1 + \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{m_e v_m^2}{2T_w}}\right)\right], \quad (7)$$

其中  $\bar{v}_x = \left(\frac{2T_w}{\pi m_e}\right)^{1/2}$  是热发射电子在  $x$  方向的平均

速率,  $\operatorname{erf}(y) = 2\pi^{-1/2} \int_0^y e^{-t^2} dt$  是误差函数.

2.2. 虚阴极与鞘-预鞘边界之间的区域内电荷密度分布

在该区域内发射电子越过虚阴极势垒, 向等离子体(阳极)加速. 由于发射电子在该区域是加速的, 不存在反射, 因此越过虚阴极的所有发射电子均能到达该区域的  $x$  点. 在  $x$  点发射电子的最小速度为  $v_m$ , 即在虚阴极  $x_m$  处速度为零的发射电子加速到  $x$  点所获得的速度. 与以上讨论一样, 由于电流守恒和能量守恒, 在  $x$  点速度在  $v - v + dv$  之间的电子形成的电荷密度  $d\rho(x) = -e\Gamma_0(m_e/T_w) \exp(-m_e v_0^2/2T_w) dv$ , 同样对其积分求得该处所有发射电子形成的电荷密度. 不同的是积分下限从  $v_m$  开始, 因为该处最小速度为  $v_m$ , 即  $x$  点发射电子的电荷密度

$$\rho_{em}(x) = \int_{v_m}^{\infty} d\rho,$$

积分后得

$$\rho_{em}(x) = -\frac{j_0}{v_x} \exp\left(\frac{eU}{T_w}\right) \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{m_e v_m^2}{2T_w}}\right). \quad (8)$$

这就是该区域  $x$  点处发射电子所贡献的电荷密度, 其中  $\operatorname{erfc}(y) = 1 - \operatorname{erf}(y)$  是误差余函数. 在这一区域除了发射电子外, 还存在等离子体电子和离子. 假定在鞘和预鞘的边界  $x_s$  处电子和离子的数密度分别为  $n_{es}$  和  $n_{is}$ . 考虑电子密度在该区域满足 Boltzmann 分布,

$$n_e = n_{es} \exp\left(\frac{e(U - U_s)}{T_e}\right). \quad (9)$$

离子与普通 Bohm 鞘一样满足连续性方程和能量守恒方程,

$$n_i v_i = n_{is} v_{is}, \quad (10)$$

$$\frac{1}{2} m_i v_i^2 + eU = \frac{1}{2} m_i v_{is}^2 + eU_s, \quad (11)$$

其中  $m_i$  是离子质量,  $v_{is}$  是进入鞘-预鞘边界的离子速度. 由(10)(11)式可得离子密度分布为

$$n_i = n_{is} \left[1 - \frac{2e(U - U_s)}{m_i v_{is}^2}\right]^{-1/2}. \quad (12)$$

该区域总的电荷密度为

$$\rho = \rho_{em} + e(n_i - n_e). \quad (13)$$

2.3. 鞘层方程和边界条件

虚阴极两侧的鞘层均满足 Poisson 方程,

$$\frac{d^2 U(x)}{dx^2} = -\rho(x)/\epsilon_0, \quad (14)$$

其中  $\epsilon_0$  是真空介电常数, 两侧的电荷密度分别由(7)和(13)式给出. 下面给出边界条件.

1) 在虚阴极点电场  $E$  为零, 即

$$x = x_m, \\ U = U_m, \\ E_m = -dU/dx = 0. \quad (15)$$

2) 在等离子体一侧的鞘-预鞘界面上电场为零并满足准中性条件, 即

$$x = x_s, \\ U = U_s, \\ E_s = -dU/dx = 0, \quad (16)$$

$$n_{is} - n_{es} - n_{ems} = 0, \quad (17)$$

其中  $n_{ems} = -\rho_{em}(x_s)/e$  是发射电子到达鞘-预鞘边界的密度, 亦即越过虚阴极到达等离子体的残余发射电子.

3) 在热阴极表面电位为零, 即

$$x = 0, \\ U = 0.$$

3. 鞘层方程的解和广义 Bohm 判据

为了方程简洁和数值计算的方便, 我们引入如下无量纲物理量并将参考电位移到虚阴极处:

$$\chi = \frac{e(U - U_m)}{T_e}, \\ \xi = \frac{x}{\lambda_{De}}, \\ M = \frac{v_{is}}{c_s}, \quad (18)$$

其中  $\lambda_{De} = \left(\frac{\epsilon_0 T_e}{e^2 n_{es}}\right)^{1/2}$  是电子 Debye 长度,  $c_s = (T_e/m_i)^{1/2}$  是离子声速. 这样虚阴极左侧的 Poisson

方程可以写成

$$\frac{d^2\chi}{d\xi^2} = A \exp(B\chi) [1 + \operatorname{erf}(\sqrt{B\chi})], \quad (19)$$

其中  $B = T_e/T_w$  是等离子体电子和热发射电子温度之比, 而系数

$$A = \frac{\Gamma_0 \exp(eU_m/T_w)}{v_x n_{es}} = \frac{n_{em}(x_m)}{n_{es}} \quad (20)$$

代表虚阴极处发射电子密度与鞘-预鞘边界处等离子体电子密度之比, 其中  $\Gamma_0/v_x$  代表阴极表面热发射电子的密度. 对于给定的金属材料 and 阴极温度,  $\Gamma_0$  是确定的, 但虚阴极电位  $U_m$  和系数  $A$  是由鞘层性质决定的, 具体大小将在下面讨论.

在虚阴极的右侧, Poisson 方程可写成

$$\frac{d^2\chi}{d\xi^2} = A \exp(B\chi) \operatorname{erfc}(\sqrt{B\chi}) + \exp(\chi - \chi_s) - f \left[ 1 - \frac{\chi - \chi_s}{M^2} \right]^{-\frac{1}{2}}, \quad (21)$$

其中  $f = n_{is}/n_{es}$  是鞘-预鞘边界处等离子体电子与离子密度之比,  $\chi_s = e(U_s - U_m)/T_e$  是鞘-预鞘边界相对于虚阴极的无量纲电位差.

方程 (19) 和 (21) 可以积分一次表示成广义的能量守恒方程

$$\frac{1}{2} \left( d\chi/d\xi \right)^2 + V_{L,R}(\chi) = 0, \quad (22)$$

其中  $V_{L,R}(\chi)$  为 Sagdeev 势, 下表 L, R 代表虚阴极的左侧和右侧.

$$V_L = -\frac{A}{B} \left[ \exp(B\chi) (1 + \operatorname{erf}(\sqrt{B\chi})) - 2\sqrt{\frac{B\chi}{\pi}} - 1 \right], \quad (23)$$

$$V_R = -\frac{A}{B} \left[ \exp(B\chi) \operatorname{erfc}(\sqrt{B\chi}) + 2\sqrt{\frac{B\chi}{\pi}} - \exp(\chi - \chi_s) - fM^2 \left[ 1 - \frac{\chi - \chi_s}{M^2} \right]^{\frac{1}{2}} \right] + C, \quad (24)$$

其中  $C$  是积分常数,

$$C = \frac{A}{B} + \exp(-\chi_s) + fM^2 \left( 1 + \frac{2\chi_s}{M^2} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (25)$$

在得到 (23)–(25) 式时我们利用了虚阴极处的边界条件  $\chi = 0, d\chi/d\xi = 0$ .

### 3.1. 广义 Bohm 判据

从方程 (22) 可知, 鞘层的解可以类比于一个经

典粒子在保守势场中的运动, 解的性质完全取决于 Sagdeev 势的形式. 对于虚阴极右侧的鞘层结构, 我们可以利用边界条件讨论如图 1 所示的鞘层存在解的条件.

在鞘-预鞘界面, 必须满足准中性条件  $\chi = \chi_s$ ,  $d^2\chi/d\xi^2 = 0$ , 则由 (21) 式可得

$$f = 1 + A \exp(B\chi_s) \operatorname{erfc}(\sqrt{B\chi_s}). \quad (26)$$

另外, 由于在鞘-预鞘边界处电场很小, 通常在求解鞘内电位分布时可以忽略, 即  $(dV_R/d\chi)_{\chi_s} = 0$ , 则由方程 (22) 可知  $V_R(\chi_s) = 0$ , 因此将 (24) 和 (25) 式代入得

$$1 - \exp(-\chi_s) + fM^2 \left[ 1 - \left( 1 + \frac{2\chi_s}{M^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right] = \frac{A}{B} \left[ 1 - \exp(B\chi_s) \operatorname{erfc}(\sqrt{B\chi_s}) - 2 \left( \frac{B\chi_s}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \right]. \quad (27)$$

(27) 式表明系数  $A$  和  $\chi_s$  之间不是独立的, 给定一个  $\chi_s$  的值,  $A$  随之而定, 则从 (20) 式可以确定相应的虚阴极势阱深度  $U_m$ . 由于方程 (22) 第一项的值总是大于零, 因此要求  $V_R(\chi) \leq 0$ , 即 Sagdeev 势在  $\chi_s$  点是极大值, 这对应于物理上要求在靠近鞘-预鞘边界的鞘层区域内正电荷密度降低的速度比负电荷慢, 以保证在这个区域内是离子鞘, 亦即 Bohm 判据. 因此由  $(d^2V_R/d\chi^2)_{\chi_s} \leq 0$  可得广义 Bohm 判据, 即进入鞘-预鞘边界的离子 Mach 数不得小于临界 Mach 数  $M \geq M_c$ ,

$$M_c^2 = \frac{f}{1 + AB \left[ \exp(B\chi_s) \operatorname{erfc}(\sqrt{B\chi_s}) - (\pi B\chi_s)^{-\frac{1}{2}} \right]}. \quad (28)$$

对于给定的从鞘-预鞘边界到虚阴极的电位差  $\chi_s$ , 由 (26) (27) 和 (28) 三式联立可以确定临界 Mach 数  $M_c$  以及系数  $f$  和  $A$ .

图 2 显示了虚阴极右侧区域 Sagdeev 势  $V_R$  随鞘层电位  $\chi$  的变化关系曲线, 在给定等离子体参数下, 三条曲线分别对应小于临界 Mach 数、等于临界 Mach 数和大于临界 Mach 数的情形. 由图 2 中的曲线可定性知道, 从虚阴极开始到鞘层边缘, Sagdeev 势具有势阱结构, 在  $M \geq M_c$  情况下, 在鞘内电位从零逐渐增加到鞘边界的  $\chi_s$  的变化过程中, 对应的 Sagdeev 势先从零逐渐降低到最小值后又增加, 直至  $\chi = \chi_s$  时又为零. 在这个过程中, 电场 (电位的一阶微分) 先从零开始逐渐增大, 到了势阱的底部电场最

大 随后电场慢慢降低,到了鞘-预鞘边界的位置又降到零,这说明鞘内电位分布在上升过程中存在一个拐点.在  $M < M_c$  的情况下,  $V_R$  的极大值大于零,因此从虚阴极开始沿  $V_R$  曲线不能到达极值点,这将出现振荡解,不符合实际情况.

## 4. 计算结果与讨论

### 4.1. 鞘层内电位分布

对方程(22)积分可得虚阴极两侧鞘层电位分布,图4即为数值计算的结果.数值计算是从虚阴极处开始的,分别向左计算得出虚阴极-阴极区域鞘层结构,向右计算得出虚阴极-鞘边界区域的鞘层结构.具体的计算方法如下:给定具体的等离子体参数,文中取  $T_e = 2 \text{ eV}$ ,  $T_w = 0.2 \text{ eV}$ ,  $n_{es} = 2.5 \times 10^8 \text{ cm}^{-3}$ .并取热阴极材料为金属 W,则饱和热发射电流密度为  $j_0 \approx 0.618 \text{ A/cm}^2$ [27].先给定一个虚阴极-鞘边界的无量纲电位差  $\chi_s$ ,利用边界条件和广义 Bohm 判据(26)–(28)式定出系数  $A$  并进而定出虚阴极深度  $\chi_m$ ,然后利用虚阴极处的边界条件分别向两边对方程(22)作数值积分,从而获得虚阴极两侧的鞘层电位分布.作图时又以壁作为参考点画出整个鞘层的结构图.图4中给出的是不同的  $\chi_s$  对应鞘层电势分布曲线,阴极在  $x = 0$  的位置.由图可见,三个给定的电位差  $\chi_s$  所对应的虚阴极深度和位置分别为  $\chi_s = 3, U_m = -0.38T_e/e, x_m = 0.34\lambda_{De}$ ;  $\chi_s = 5, U_m = -0.35T_e/e, x_m = 0.30\lambda_{De}$ ;  $\chi_s = 9, U_m = -0.33T_e/e, x_m = 0.28\lambda_{De}$ .由数据发现,随着电位  $\chi_s$  的增加,虚阴极的大小和距离都在减小,并且虚阴极深度都不深,但却对鞘层结构有很大影响.这是因为发射电子的温度(等于壁的温度)远小于等离子体电子温度,但本文的电位是用电子温度归一化的,因此较浅的虚阴极就能够挡掉大部分的发射电子.从电位分布还可以看出,在靠近阴极的一边,  $d^2U/dx^2 > 0$ ,对应的电荷密度为负值,说明是电子

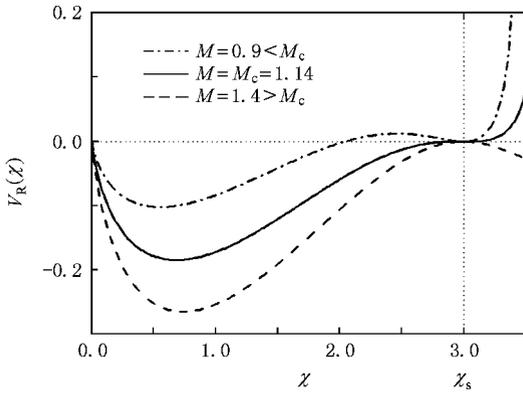


图2 虚阴极右侧区域的 Sagdeev 势曲线  $\chi_s = 3, B = 10$

### 3.2. 虚阴极左侧的 Sagdeev 势

在上述边界条件确定了系数  $A$  的情况下,由方程(22)和(23)可以确定从阴极到虚阴极区域的鞘层结构.从(23)式可知,这个区域的 Sagdeev 势随  $\chi$  的增大始终是单调降低的,即  $dV_L/d\chi < 0$  和  $V_L < 0$ ,因此无论 Mach 数多大总是有解的.图3显示该区域 Sagdeev 势随  $\chi$  的变化关系曲线.对比图2和图3可知  $V_L$  的变化很快,说明该区域的电场很强.通常阴极与虚阴极之间的电位差都较小,但都足以排斥热发射电子(因为  $T_w$  较小),因此该区域的尺度范围较之虚阴极与鞘边界区域要小很多.

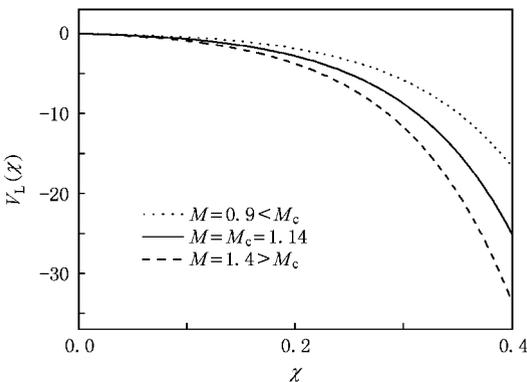


图3 虚阴极左侧区域的 Sagdeev 势曲线  $\chi_s = 3, B = 10$

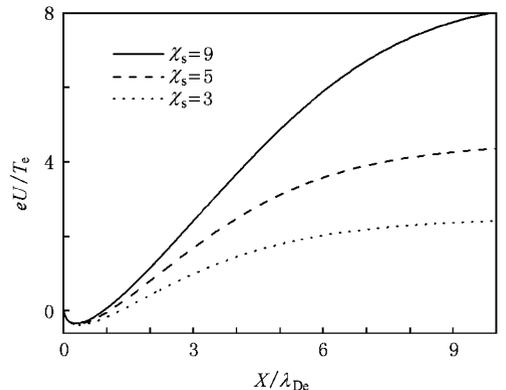


图4 鞘层内电位随位置的变化关系  $T_e/T_w = 10$

鞘,但在靠近等离子体的一边,  $d^2 U/dx^2 < 0$ , 对应的电荷密度为正值,说明是离子鞘.因此整个鞘层具有电双层的结构,即从虚阴极附近的电子鞘过渡到等离子体的离子鞘.远离虚阴极的区域,发射电子密度迅速衰减,等离子体成分起主导作用,从而鞘层接近一般的 Bohm 鞘.

#### 4.2. 临界 Mach 数随等离子体参数的变化

由方程(28)可知,临界 Mach 数是鞘-预鞘边缘到虚阴极电位降  $\chi_s$  的函数.图 5 为  $M_c$  随  $\chi_s$  的变化曲线,可见随着  $\chi_s$  的增大,  $M_c$  先增大,到达一个极大值后又逐渐减小.热发射鞘层的 Bohm 判据与一般鞘层不同,普通鞘层  $M_c = 1$  且不依赖等离子体参数,但热发射鞘层存在发射电子,阴极附近的电子鞘与等离子体的离子鞘有机地联系在一起,因此鞘层边界 Mach 数不再是独立的参量,而是与等离子体参数相关联.鞘层电位降  $\chi_s$  通过影响进入鞘层内发射电子的数量而影响着整个鞘层的特征.

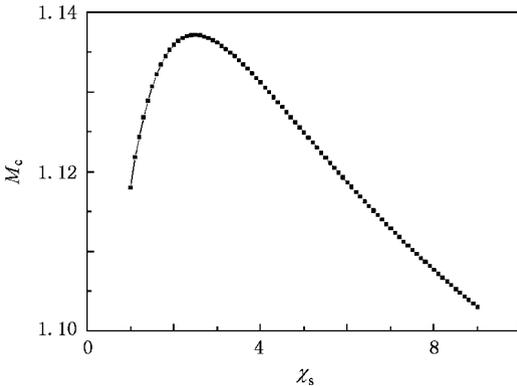


图 5 离子临界 Mach 数  $M_c$  随  $\chi_s$  的变化 取参数  $T_e/T_w = 10$

图 6 显示了对于给定等离子体参数  $\chi_s = 3$ ,  $T_e = 2$  eV 时,离子临界 Mach 数随热阴极温度的变化.在给定的等离子体参数下,当热阴极温度发生变化时,必然使得其电子发射的强度发生改变,从而影响鞘层内热发射电子的数量,最终影响鞘层边界的 Bohm 判据.图 6 表明,在电子温度固定时,鞘边界离子临界 Mach 数随着热阴极温度的升高而单调增大.这一结果比较容易理解,因为从方程(12)可以看出,进入鞘层的离子速度越大,鞘内离子密度变小就越慢,这样就可以中和由于阴极温度升高引起的发射电子增加.

热发射电子大部分被虚阴极反射,但由于发射电子密度很高,仍有一定数量的高能热电子会越过虚阴

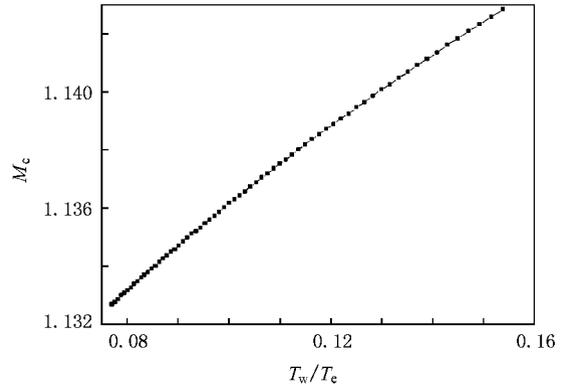


图 6 离子临界 Mach 数  $M_c$  与  $T_w/T_e$  的关系  $\chi_s = 3$ ,  $T_e = 2$  eV

极向等离子体运动,尽管在此过程中密度衰减很快,但等离子体中仍会有部分热发射电子残余.图 7 显示了发射电子在鞘-预鞘边界处的残余密度与电子密度之比  $f - 1 = (n_{is} - n_{es})/n_{es} = n_{ems}/n_{es}$  随  $\chi_s$  的变化.残余发射电子密度随  $\chi_s$  的增大先增大,到达最大值后又降低.由图 7 可知,等离子体中残余发射电子所占的份额大约在 20% 的数量级,是相当可观的.因此中心等离子体区的状态必然受残余发射电子的影响,这也是本文中等离子体区的准中性条件必须考虑热发射电子贡献的原因.这一点以前的文献中从未予以考虑<sup>[26]</sup>.残余热发射电子密度不小的原因主要是平板模型下发射电子密度随电位变化不是非常快,在其他几何位形下(如柱或球模型),几何发散效应能起很大作用,残余发射电子数就会变得很少,但这不在本文考虑的范围,将另文叙述.

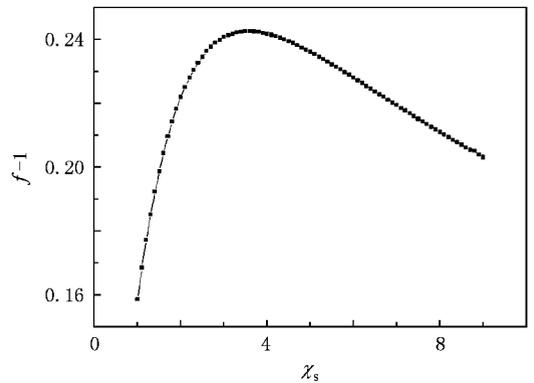


图 7 鞘-预鞘边界热发射电子与等离子体电子密度之比  $f - 1$  随  $\chi_s$  的变化  $T_e/T_w = 10$

## 5. 结 论

本文结合热阴极电子发射理论和无碰撞等离子

体鞘层理论,建立了存在虚阴极情况下二维平板鞘层理论模型,并利用 Sagdeev 势的方法研究了鞘层存在的条件,亦即鞘-预鞘边界的广义 Bohm 判据.研究表明,不同于普通的 Bohm 鞘,由于热发射电子的贡献,进入鞘层的离子临界 Mach 数不是独立的常数,而是与鞘层电位降等参数有关的物理量.临界 Mach 数随着鞘层电位降(从鞘边缘到虚阴极)的增大是先增大后降低的,并且随着热阴极的温度升高而单调

增大.此外,在鞘-预鞘边界处热发射电子具有一定的残余密度,约占等离子体电子密度的 20% 数量级,并且残余密度随鞘层电位降的增大是先升高后降低的.本文的结果在研究热阴极放电、等离子体壁二次电子发射鞘层以及发射探针诊断等离子体电位等方面具有一定的应用.

感谢中国科学技术大学物理系夏宇青在数值计算方面的协助.

- [ 1 ] Langmuir I 1929 *Phys. Rev.* **33** 954
- [ 2 ] Bohm D 1949 *The Characteristics of Electrical Discharges in Magnetic Fields* Guthrie A, Wakerling R K Ed ( New York : McGraw-Hill ) Chapter 3
- [ 3 ] Harrison E R , Thompson W B 1959 *Proc. Phys. Soc.* **74** 145
- [ 4 ] Riemann K U 1989 *Phys. Fluids* B **1** 961
- [ 5 ] Riemann K U 1991 *Phys. Fluids* B **3** 3331
- [ 6 ] Riemann K U 1997 *Phys. Plasma* . **4** 4158
- [ 7 ] Franklin R N 2003 *J. Phys. D* **36** R309
- [ 8 ] Dai Z L , Wang Y N , Ma T C 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 2398 ( in Chinese ) [ 戴忠玲、王友年、马腾才 2001 物理学报 **50** 2398 ]
- [ 9 ] Wang Z X , Liu J Y , Zou X , Liu Y , Wang X G 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 793 ( in Chinese ) [ 王正汹、刘金远、邹秀、刘悦、王晓钢 2004 物理学报 **53** 793 ]
- [ 10 ] Zou X , Liu J Y , Wang Z X , Gong Y , Liu Y , Wang X G 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 3409 ( in Chinese ) [ 邹秀、刘金远、王正汹、宫野、刘悦、王晓钢 2004 物理学报 **53** 3409 ]
- [ 11 ] Yu M Y , Saleem H , Luo H 1992 *Phys. Fluids* B **4** 3427
- [ 12 ] Ma J X , Yu M Y 1995 *Phys. Plasma* . **2** 1343
- [ 13 ] Ma J X , Liu J Y , Yu M Y 1997 *Phys. Rev.* E **55** 4627
- [ 14 ] Liu J Y , Ma J X 1997 *Phys. Plasma* . **4** 2798
- [ 15 ] Oksuz L , Hershkowitz N 2002 *Phys. Rev. Lett.* **89** 145001
- [ 16 ] Smith J R , Hershkowitz N , Coakley P 1979 *Rev. Sci. Instrum.* **50** 210
- [ 17 ] Wang X , Hershkowitz N 2006 *Rev. Sci. Instrum.* **77** 043507
- [ 18 ] Li Y R , Ma J X , Wang D Y , Zhang W G 2008 *J. Phys. D* **41** 225210
- [ 19 ] Richardson O W 1903 *Phil. Trans. A* **201** 516
- [ 20 ] Langmuir I 1913 *Phys. Rev.* **2** 450
- [ 21 ] Dushman S 1914 *Phys. Rev.* **4** 121
- [ 22 ] Langmuir I 1923 *Phys. Rev.* **21** 419
- [ 23 ] Langmuir I , Blodgett K B 1923 *Phys. Rev.* **22** 347
- [ 24 ] Langmuir I , Compton K T 1931 *Rev. Mod. Phys.* **3** 191
- [ 25 ] Chen F F 1965 *Plasma Diagnostics Techniques* Huddleston R H , Leonard S L Ed ( New York : Academic )
- [ 26 ] Kemp R F , Sellen J M Jr 1966 *Rev. Sci. Instrum.* **37** 455
- [ 27 ] Cheng H , Jiang J P 1986 *Cathode Electronics* ( Xi'an : Northwest Telecommunications Engineering College Press ) p34 [ 承欢、江剑平 1986 阴极电子学 ( 西安 : 西北电讯工程学院出版社 ) 第 34 页 ]

# Sheath structure of a hot-cathode in plasma<sup>\*</sup>

Wang Dao-Yong Ma Jin-Xiu<sup>†</sup> Li Yi-Ren Zhang Wen-Gui

( *Key Laboratory of Basic Plasma Physics and Center for Magnetic Confinement Plasma Theory of Chinese Academy of Sciences , Department of Modern Physics ,  
University of Science and Technology of China , Hefei 230026 , China* )

( Received 19 January 2009 ; revised manuscript received 23 February 2009 )

## Abstract

The plasma sheath in the presence of virtual-cathode structure near a hot cathode was studied by combining the theory of thermionic emission and plasma fluid equations. Using Sagdeev potential method, the sheath solution and generalized Bohm criterion were discussed. It is shown that, different from usual Bohm sheath, the critical ion Mach number at the sheath-presheath edge is not an independent constant but depends on sheath potential drop as well as other parameters, owing to the fact that there exists large quantity of thermionic electrons near the hot cathode which has a significant influence on the whole sheath structure. The critical Mach number first increases and then decreases with the potential drop ( from sheath-presheath edge to the virtual cathode ), and monotonically increases with the temperature of the hot cathode. In the plane geometry, there exists an appreciable quantity of residual thermionic electrons which traverse the virtual cathode and sheath and enter into bulk plasma.

**Keywords** : sheath, thermionic emission, Bohm criterion

**PACC** : 5240K, 5290, 5225

---

<sup>\*</sup> Project supported by the National Natural Science Foundation of China ( Grant Nos. 10875121, 40831062 ) and the Knowledge Innovation Program of Chinese Academy of Sciences ( Grant No. KJCX2-YW-N28 ) and the National Basic Research Program of China ( Grant No. 2008CB717800 ).

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail jxma@ustc.edu.cn