第 58 卷 第 12 期 2009 年 12 月
1000-3290/2009/58(12)/8591-05

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.58, No.12, December, 2009

超导隧道结中的电流相位关系*

吴义华 王振彦 沈 瑞†

(南京大学物理系,固体微结构物理国家重点实验室,南京 210093)

(2009 年 3 月 24 日收到;2009 年 4 月 30 日收到修改稿)

计算了等自旋配对超导隧道结中的直流 Josephson 电流.结果表明,当两侧超导体中配对势的轨道对称性分别属于磁点群 D_4 的 A 不可约表示和 ^2E 不可约表示的情况下,电流相位关系是 $I \propto \sin 4\varphi$.

关键词:超导隧道结, Josephson 电流

PACC:7450

1. 引 言

1962 年,Josephson 预言在两块被薄绝缘层分隔开的超导体间存在着因两侧超导体的宏观相位不同而产生的超电流,这就是所谓的 Josephson 效应[1].直流 Josephson 效应和交流 Josephson 效应分别于 1963 年和 1965 年在实验上被首次观测到[2—4].此后,Josephson 效应在传感器、电路设计和制作量子比特等方面得到了广泛应用[5—7].在直流 Josephson 效应中的一个重要特征就是所谓的电流相位关系

$$I = I_c \sin\varphi, \tag{1}$$

其中 I_c 是临界电流,φ 是两侧超导体的宏观相位差.深入研究表明,电流相位关系有多种可能,并不一定都是如(1)式的以 2π 为周期的标准正弦关系.例如,在超导/铁磁绝缘层/超导隧道结中可以形成 Josephson 电流翻转的 π 结[8—10],在 s 波/$d_{x^2-y^2}$ 波超导隧道结中可以得到以 π 为周期的 $\sin 2\varphi$ 电流相位关系[11,12].对 Josephson 结中电流相位关系的研究是一个得到持续关注的有趣问题[13].

近年来,对铁磁超导共存态的研究有了很多进展.不仅在大块体材料(如 UGe_2[14], URhGe[15] 和 $ZrZn_2$[16])中发现了铁磁超导共存态,而且在铁磁超导异质结中也发现了因为邻近效应而产生的铁磁超导共存现象[8,10,17—20].在传统超导体中的 Cooper 对是由一个自旋向上的电子和一个自旋向下的电子形成的自旋单态配对.这种配对方式与要求自旋同向排列的铁磁性是有冲突的.因此,在目前文献中有很多讨论认为铁磁超导体是自旋三重态配对的超导体[21—24].例如,$ZrZn_2$ 就被认为是等自旋配对的 p 波超导体[25—27].自旋三重态超导体的配对势一定是各向异性的.对超导隧道结的隧道谱和 Josephson 效应的研究能为确定超导序参量的轨道对称性提供有用的信息.自旋单态 s 波配对,相反自旋三重态配对和等自旋三重态配对超导结的隧道谱有明显差异[28].具有 p_x 轨道对称性的自旋三重态超导 Josephson 结满足以 π 为周期的 $\sin 2\varphi$ 电流相位关系[29].关于等自旋三重态配对超导隧道结的隧道谱和 Josephson 效应也有一些研究工作[30—33],但是对于两侧超导体序参量具有不同轨道对称性的等自旋配对 Josephson 结的研究还比较少.

本文研究等自旋配对 p 波超导隧道结的直流 Josephson 效应.首先利用 Bogoliubov-de Gennes 方程[34—36]求出电子的 Andreev 反射系数,然后根据 Furusaki-Tsukada 型公式[37—39]求出 Josephson 电流.我们考虑两侧超导体的序参量有不同的轨道对称性.计算结果表明,当两个序参量的轨道对称性分别属于磁点群 D_4 的 A 不可约表示和 ^2E 不可约表示的情况下,Josephson 电流满足以 $\pi/2$ 为周期的 $\sin 4\varphi$ 电流相位关系.

2. 模 型

我们考虑一个铁磁超导体/绝缘层/铁磁超导体

* 国家自然科学基金(批准号:10504011)和国家重点基础研究发展计划(批准号:2006CB921803,2009CB929504)资助的课题.

† 通讯联系人.E-mail:shen@nju.edu.cn

隧道结,其中两侧超导体的磁化方向平行排列.假定超导层和绝缘层的平面是 x-y 平面,电流沿 z 方向.绝缘层被认为是一个处于 $z=0$,强度为 V_0 的 δ 势垒

$$V = V_0\delta(z). \tag{2}$$

仅考虑超导体为等自旋 p 波配对的情况,即只有两个自旋向上的电子形成 Cooper 对,而两个自旋向下的电子或者一个自旋向上的电子和一个自旋向下的电子之间都不能形成配对.这样,Josephson 电流只能存在于自旋向上的电流通道中.等自旋 p 波配对势是各向异性的,我们假定左侧的对势 Δ_L 和右侧的对势 Δ_R 在倒空间中取如下形式:

$$\begin{aligned}\Delta_L &= \Delta_A\\ &= \mathrm{i}\Delta_0\cos\frac{k_z a}{2}\left(\sin\frac{k_y a}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{k_x a}{2}\right),\end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned}\Delta_R &= \Delta_{^2E}\\ &= \mathrm{i}\Delta_0\sin\frac{k_z a}{2}\left(\cos\frac{k_y a}{2}+\cos\frac{k_x a}{2}\right),\end{aligned} \tag{4}$$

其中 Δ_0 是对势的强度,a 是晶格常数,$k_{x,y,z}$ 是波矢,下标 A 和 ^2E 表示对势 Δ_A 和 $\Delta_{^2E}$ 的轨道对称性分别属于磁点群 $\boldsymbol{D}_4$ 的 A 不可约表示和 ^2E 不可约表示.(3),(4)式中的两个对势是铁磁超导体 $ZrZn_2$ 中对势的两种可能选择[25,26].

在自旋向上的通道中,准粒子的波函数 $\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}$ 满足二分量的 Bogoliubov-de Gennes 方程[30,34]

$$\begin{pmatrix}H_0-h_0 & \Delta\\ \Delta^* & -H_0+h_0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}=E\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}, \tag{5}$$

其中 E 是准粒子能量,对势 Δ 在左右两侧分别取 Δ_L 和 Δ_R,h_0 是铁磁超导体中的交换能.由于现在是两个同自旋的电子配对,(5)式中的交换能可以通过重新定义 Fermi 能而消去.单粒子哈密顿量 H_0 写作

$$H_0 = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2+V(z)-E_F, \tag{6}$$

其中 m 是电子的有效质量,E_F 是 Fermi 能.考虑电子型准粒子从左边入射的情况,Bogoliubov-de Gennes 方程的解为

$$\begin{aligned}\psi_L =& \begin{pmatrix}u_L\\ v_L e^{-\mathrm{i}\gamma^+}e^{-\mathrm{i}\varphi_L}\end{pmatrix}e^{\mathrm{i}k_z z}+a\begin{pmatrix}v_L\\ u_L e^{-\mathrm{i}\gamma^+}e^{-\mathrm{i}\varphi_L}\end{pmatrix}e^{\mathrm{i}k_z z}\\ &+b\begin{pmatrix}u_L\\ v_L e^{-\mathrm{i}\gamma^-}e^{-\mathrm{i}\varphi_L}\end{pmatrix}e^{-\mathrm{i}k_z z},\end{aligned} \tag{7}$$

$$\psi_R = c\begin{pmatrix}u_R\\ v_R e^{-\mathrm{i}\beta^+}e^{-\mathrm{i}\varphi_R}\end{pmatrix}e^{\mathrm{i}k_z z}+d\begin{pmatrix}v_R\\ u_R e^{-\mathrm{i}\beta^-}e^{-\mathrm{i}\varphi_R}\end{pmatrix}e^{-\mathrm{i}k_z z}. \tag{8}$$

左侧的波函数 ψ_L 包含三项,第一项是入射的电子型准粒子,振幅是 1;第二项是 Andreev 反射的空穴型准粒子[35],振幅是 a;第三项是正常反射的电子型准粒子,振幅是 b.右侧的波函数 ψ_R 包含两项,第一项是透射的电子型准粒子,振幅是 c;第二项是透射的空穴型准粒子,振幅是 d.因为对势,交换能和准粒子能量都远小于 Fermi 能,所以在(7)和(8)式中,电子型准粒子和空穴型准粒子具有相同的波矢 $k_z=\sqrt{k_F^2-(k_x^2+k_y^2)}$,其中 k_F 是 Fermi 波矢.左右两侧超导体中的 Bogoliubov 振幅为

$$u_{L,R} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1+\frac{\sqrt{E^2-|\Delta_{L,R}|^2}}{E}\right)^{1/2}, \tag{9}$$

$$v_{L,R} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1-\frac{\sqrt{E^2-|\Delta_{L,R}|^2}}{E}\right)^{1/2}. \tag{10}$$

在超导体中运动的电子型准粒子和空穴型准粒子具有不同的波矢,而(3)和(4)式中的对势又是各向异性的,因此两类准粒子感受到不同的对势,这表现在(7)和(8)式中引入了内相位因子 $\gamma^{\pm}$ 和 $\beta^{\pm}$[38].具体地,内相位因子定义为

$$\begin{aligned}e^{\mathrm{i}\gamma^{\pm}} &= \frac{\Delta_L(\pm k_z)}{|\Delta_L(\pm k_z)|},\\ e^{\mathrm{i}\beta^{\pm}} &= \frac{\Delta_R(\pm k_z)}{|\Delta_R(\pm k_z)|}.\end{aligned} \tag{11}$$

在(7)和(8)式中出现的相位因子 φ_L 和 φ_R 分别是左右两侧超导体的宏观相位.

左右两侧超导体中的波函数必须满足 $z=0$ 处的边界条件

$$\begin{aligned}&\psi_L|_{z=0} = \psi_R|_{z=0},\\ &\left.\frac{\partial\psi_R}{\partial z}\right|_{z=0}-\left.\frac{\partial\psi_L}{\partial z}\right|_{z=0} = 2Zk_F\psi_L|_{z=0},\end{aligned} \tag{12}$$

其中 $Z=mV_0/(\hbar^2k_F)$ 是无量纲的 δ 势垒强度.把(7)和(8)式代入边界条件(12)式中就可以求出 Andreev 反射系数 $a(E)$[36].根据 Andreev 反射系数 $a(E)$ 就可以利用 Furusaki-Tsukada 型公式求出直流 Josephson 电流[37—39]

$$I = \frac{e}{\hbar}\sum_{k_x,k_y}\sum_{\omega_n}\frac{k_B T|\Delta_L|}{\Omega_{nL}}[a(\mathrm{i}\omega_n)-\tilde{a}(\mathrm{i}\omega_n)], \tag{13}$$

其中 $\Omega_{nL}=\mathrm{sgn}(\omega_n)\sqrt{\omega_n^2+|\Delta_L|^2}$,$\omega_n=(2n+1)\times$

$\pi k_B T$ 是温度 T 时的松原频率.(13)式中的 Andreev 反射系数 $a(\mathrm{i}\omega_n)$是指左侧一个入射的电子型准粒子反射为一个空穴型准粒子的反射系数,它可以通过解析延拓 $E\to \mathrm{i}\omega_n$ 从 $a(E)$得到;而 Andreev 反射系数 $\tilde{a}(\mathrm{i}\omega_n)$是指左侧一个入射的空穴型准粒子反射为一个电子型准粒子的反射系数,它可以仿照 $a(\mathrm{i}\omega_n)$求出.注意到 $\Delta_{\mathrm{L}}=\Delta_A$ 和 $\Delta_{\mathrm{R}}=\Delta_{^2E}$,最终可以得到直流 Josephson 电流的表达式

$$I=\frac{ek_{\mathrm{B}}T}{\hbar}\sum_{k_x,k_y}\sum_{\omega_n}\frac{\mathrm{Re}(\xi \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi})\mathrm{Im}(\xi \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi})\,|\Delta_A|^2\,|\Delta_{^2E}|^2}{\omega_n^2[\Omega_{^2E}+(1+2Z^2/\cos^2\theta)\Omega_A]^2+|\Delta_A|^2\,|\Delta_{^2E}|^2[\mathrm{Im}(\xi \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi})]^2},\tag{14}$$

其中 θ 是入射角,$\varphi=\varphi_{\mathrm{L}}-\varphi_{\mathrm{R}}$ 是两侧超导体的宏观相位差,$\Omega_{A,^2E}=\mathrm{sgn}(\omega_n)\sqrt{\omega_n^2+|\Delta_{A,^2E}|^2}$,而复参量 $\xi=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\gamma^+-\beta^+)}$是一个由内相位决定的因子.

3. 数值结果与讨论

我们利用(14)式计算了温度 $T=0.01T_{\mathrm{c}}$ 时的直流 Josephson 电流,其中 T_{c} 是超导体的临界温度. Josephson 电流 I 随宏观相位差 φ 的变化曲线显示在图 1 中.我们利用超导结处于正常态时的电阻 R_{N}[11] 和对势的强度 Δ_0 重新规格化了电流,因而图 1 中的电流是无量纲的.图 1 中的实线是势垒强度 $Z=1$ 时的情况,而点线是势垒强度 $Z=5$ 时的情况.

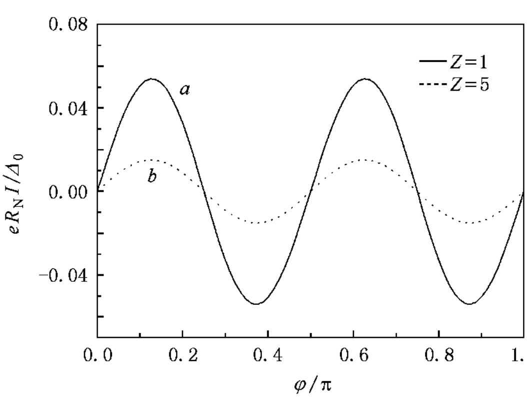

图 1　Josephson 电流 I 随宏观相位差 φ 的变化曲线

从图 1 可以发现,Josephson 电流随势垒的增强而明显减弱.电流相位关系仍然表现为正弦函数的形式,在宏观相位差 $\varphi=0$ 时,电流也为零.但图 1 中 Josephson 电流的振荡周期既不是 s 波 Josephson 结中的 2π[37],也不是 s 波/$\mathrm{d}_{x^2-y^2}$ 波超导隧道结[11] 或 p_x 波超导隧道结[29] 中的 π,而是 $\pi/2$,表明电流相位关系是 $I\propto\sin4\varphi$.这可以通过考察两侧超导体对势的对称性得到解释.对势 Δ_A 和 $\Delta_{^2E}$ 的轨道对称性分别属于磁点群 $\boldsymbol{D}_4$ 的 A 不可约表示和 ^2E 不可约表示,因此在 k_x-k_y 平面作 $\pi/2$ 旋转操作时($k_x\to -k_y$,$k_y\to k_x$),分别满足变换关系 $\Delta_A\to -\mathrm{i}\Delta_A$ 和 $\Delta_{^2E}\to\Delta_{^2E}$.因而由内相位决定的复参量 ξ 满足变换关系 $\xi\to \mathrm{i}\xi$.(14)式可以展开为幂级数[11]

$$I=\frac{ek_{\mathrm{B}}T}{\hbar}\sum_{k_x,k_y}\sum_{\omega_n}\mathrm{Im}(\xi \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi})\sum_{m=0}^{\infty}q^{m+1}[\mathrm{Re}(\xi \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi})]^{2m+1},\tag{15}$$

其中

$$q=\frac{|\Delta_A|^2\,|\Delta_{^2E}|^2}{\omega_n^2[\Omega_{^2E}+(1+2Z^2/\cos^2\theta)\Omega_A]^2+|\Delta_A|^2\,|\Delta_{^2E}|^2}.\tag{16}$$

幂级数展开式中的第一项来自于 $m=0$ 的贡献,并且正比于 $\mathrm{Re}(\xi \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi})\mathrm{Im}(\xi \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi})$.在 k_x-k_y 平面的 $\pi/2$ 旋转操作下,该项是一个奇函数,因而在对 k_x 和 k_y 求和后只能得到零结果.对电流最大的贡献来自于幂级数展开式中 $m=1$ 的项,并可以写为

$$I=-\frac{ek_{\mathrm{B}}T}{\hbar}\sum_{k_x,k_y}\sum_{\omega_n}\frac{|\Delta_A|^4\,|\Delta_{^2E}|^4\mathrm{Re}(\xi^4)\sin4\varphi}{8(\omega_n^2[\Omega_{^2E}+(1+2Z^2/\cos^2\theta)\Omega_A]^2+|\Delta_A|^2\,|\Delta_{^2E}|^2)^2}.\tag{17}$$

从(17)式可以看出,电流相位关系是以 $\pi/2$ 为周期的 $\sin4\varphi$ 关系,这是由两侧超导体中对势的轨道对称性决定的.

4. 结　　论

本文利用 Furusaki-Tsukada 型公式计算了等自

旋配对 p 波超导隧道结的直流 Josephson 电流. 计算结果表明, Josephson 电流随势垒的增强而明显减弱. 当两侧超导体中序参量的轨道对称性分别属于磁点群 D_4 的 A 不可约表示和 ^2E 不可约表示的情况下, Josephson 电流满足以 $\pi/2$ 为周期的 $\sin 4\varphi$ 电流相位关系.

[1] Josephson B D 1962 *Phys. Lett.* **1** 251
[2] Anderson P W, Rowell J M 1963 *Phys. Rev. Lett.* **10** 230
[3] Rowell J M 1963 *Phys. Rev. Lett.* **11** 200
[4] Yanson I K, Svistunov V M, Dmitrenko I M 1965 *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **48** 976
[5] Likharev K K 1979 *Rev. Mod. Phys.* **51** 101
[6] Schmidt V V 1997 *The Physics of Superconductor* (Berlin: Springer)
[7] Makhlin Y, Schön G, Shnirman A 2001 *Rev. Mod. Phys.* **73** 357
[8] Ryazanov V V, Oboznov V A, Rusanov A Y, Veretennikov A V, Golubov A A, Aarts J 2001 *Phys. Rev. Lett.* **86** 2427
[9] Buzdin A I, Bulaevskii L N, Panyukov S V 1982 *Pis'ma Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **35** 147
[10] Buzdin A I 2005 *Rev. Mod. Phys.* **77** 935
[11] Tanaka Y 1994 *Phys. Rev. Lett.* **72** 3871
[12] Tanaka Y, Kashiwaya S 1997 *Phys. Rev.* B **56** 892
[13] Golubov A A, Kupriyanov M Y, Il'ichev E 2004 *Rev. Mod. Phys.* **76** 411
[14] Saxena S S, Agarwal P, Ahilan K, Grosche F M, Haselwimmer R K W, Steiner M J, Pugh E, Walker I R, Julian S R, Monthoux P, Lonzarich G G, Huxley A, Shelkin I, Braithwaite D, Flouquet J 2000 *Nature* **406** 587
[15] Aoki D, Huxley A, Ressouche E, Braithwaite D, Flouquet J, Brison J, Lhotel E, Paulsen C 2001 *Nature* **413** 613
[16] Pfleiderer C, Uhlarz M, Hayden S M, Vollmer R, Löhneysen H v, Bernhoeft N R, Lonzarich G G 2001 *Nature* **412** 58
[17] Sun G Y, Xing D Y, Dong J M, Liu M 2002 *Phys. Rev.* B **65** 174508
[18] Liu S, Shen R, Zheng Z M, Xing D Y 2006 *Physica* C **434** 167
[19] Li X W 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 2589 (in Chinese) [李晓薇 2006 物理学报 **52** 2589]
[20] Yu H L, Dong Z C 2007 *Chin. Phys.* **16** 3072
[21] Machida K, Ohmi T 2001 *Phys. Rev. Lett.* **86** 850
[22] Huxley A, Sheikin I, Ressouche E, Kernavanois N, Braithwaite D, Calemczuk R, Flouquet J 2001 *Phys. Rev.* B **63** 144519
[23] Santi G, Dugdale S B, Jarlborg T 2001 *Phys. Rev. Lett.* **87** 247004
[24] Shen R, Zheng Z M, Liu S, Xing D Y 2003 *Phys. Rev.* B **67** 024514
[25] Fay D, Appel J 1980 *Phys. Rev.* B **22** 3173
[26] Samokhin K V, Walker M B 2002 *Phys. Rev.* B **66** 024512
[27] Samokhin K V, Shirokoff D 2005 *Phys. Rev.* B **71** 104527
[28] Yokoyama T, Tanaka Y 2007 *Phys. Rev.* B **75** 132503
[29] Li X W 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 6637 (in Chinese) [李晓薇 2006 物理学报 **55** 6637]
[30] Zhao Y F, Shen R 2006 *Phys. Rev.* B **73** 214511
[31] Grønsleth M S, Linder J, Børven J M, Sudbø A 2006 *Phys. Rev. Lett.* **97** 147002
[32] Linder J, Grønsleth M S, Sudbø A 2007 *Phys. Rev.* B **75** 024508
[33] Li X W, Liu S J 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 834 (in Chinese) [李晓薇、刘淑静 2006 物理学报 **55** 834]
[34] de Gennes P G 1966 *Superconductivity of Metals and Alloys* (New York: Benjamin)
[35] Andreev A F 1964 *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **46** 1823
[36] Blonder G E, Tinkham M, Klapwijk T M 1982 *Phys. Rev.* B **25** 4515
[37] Furusaki A, Tsukada M 1991 *Solid State Commun.* **78** 299
[38] Kashiwaya S, Tanaka Y 2000 *Rep. Prog. Phys.* **63** 1641
[39] Asano Y 2001 *Phys. Rev.* B **64** 224515

Current phase relation in the superconducting tunnel junction*

Wu Yi-Hua Wang Zhen-Yan Shen Rui†

(*National Laboratory of Solid State Microstructures*, *Department of Physics*, *Nanjing University*, *Nanjing* 210093, *China*)

(Received 24 March 2009; revised manuscript received 30 April 2009)

Abstract

The dc Josephson current in the equal spin pairing superconducting tunnel junction is calculated in this paper. It is shown that the current phase relation is $I \propto \sin 4\varphi$ when the orbital pairing symmetries of the two superconductors fall into the irreducible representations A and ^2E of the magnetic point group $\boldsymbol{D}_4$, respectively.

Keywords: superconducting tunnel junction, Josephson current

PACC: 7450

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10504011) and the State Key Development Program for Basic Research of China (Grant Nos. 2006CB921803, 2009CB929504).

† Corresponding author. E-mail: shen@nju.edu.cn