

# 周期孔洞区域中热力耦合问题的双尺度有限元计算<sup>\*</sup>

冯永平<sup>1)†</sup> 崔俊芝<sup>2)</sup> 邓明香<sup>1)</sup>

1) 广州大学数学与信息科学学院 广州 510006)

2) 中国科学院数学与系统科学研究院 北京 100190)

(2008 年 12 月 29 日收到 2009 年 3 月 20 日收到修改稿)

复合材料的研究中经常遇到具有周期孔洞结构的材料,由于区域的小周期性及剧烈振荡性,用传统的有限元计算方法来计算这些材料对应的问题时需要大量的计算机存储空间及计算时间.对这类材料的热力耦合问题给出了一种新型的高阶双尺度渐近解,得到了对应的均匀化常数、均匀化方程及对应的有限元算法.数值算例表明,周期单胞的局部结构对局部应力与应变有较大的影响.算法对数值模拟这类材料的力学行为是高效和可行的.

关键词:双尺度方法,热力耦合,周期孔洞区域,有限元方法

PACC: 8160H, 6140G

## 1. 引言

在新材料的制造与发展过程中,需要分析具有小周期结构复合材料(这些材料一般由细小结构并在小周期中剧烈变化的材料所组成)的等效物理行为.常用的方法有均匀化方法、体积平均方法等.数学中的均匀化方法<sup>[1-3]</sup>通常用来研究材料的均匀化行为,在复合材料等效物理行为的研究中较多用到均匀化方法中的能量方法<sup>[4,5]</sup>和多尺度方法<sup>[6-8]</sup>,而多尺度方法中的双尺度方法被广泛应用于分析复合材料的力学行为与相关属性<sup>[9-14]</sup>.由于热力耦合是实际应用中非常重要的物理属性,故吸引了许多学者的研究兴趣.文献[15,16]研究了类似橡胶固体材料的热力本构关系;文献[17]发展了热弹性材料的响应近似分析;文献[18]运用半逆方法研究了各向异性轴对称固体材料的延拓解;文献[19]将文献[18]中的方法应用于研究新型橡胶材料(Mooney-Rivlin 材料)的本构关系;文献[20]发展了一种技术,用于预测正交层状结构材料的热弹性应变行为;文献[21]运用平衡方程的积分方法得到关于平面非对称柱体热弹性问题的理论解.其他有关热力耦合的研究进展可见文献[22-24].周期孔洞区域由于区域的复杂性,运用传统有限元算法需要运行很长时间,因此具有小周期孔洞区域中的热力耦合行为在

理论和数值计算两方面均较难解决,且目前所使用的方法均具有一定局限性.本文试图建立一种新的数值方法,该方法可以在得到少量小尺度解的前提下,运用大尺度的解去捕捉小尺度下解的相关信息,从而对具有小周期孔洞区域的热力耦合行为给出较好的近似计算方法.

## 2. 热力耦合问题解的双尺度形式渐近展开

设  $\omega$  是  $\mathbb{R}^n$  ( $n = 2, 3$ ) 中具有周期结构的无界区域,  $\omega$  在  $Z = (z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{Z}^n$  平移变换下保持不变,且  $\omega$  满足下列条件:周期单胞  $Q \cap \omega$  具有 Lipschitz 边界,  $Q \setminus \omega$  与  $\partial Q$  的  $\delta$  邻域的交集至多包

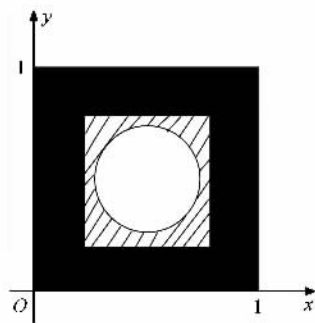


图 1 二维空间的周期单胞

<sup>\*</sup> 国家自然科学基金(批准号:10801042, 10771041)和广州市教育局科技计划(批准号:62035)资助的课题.

<sup>†</sup> E-mail: ffypp000@yahoo.com

含有限个 Lipschitz 边界的孔洞区域, 其中  $Q = \{x \mid 0 < x_j < 1, j = 1, \dots, n\}$ , 区域  $\Omega^\varepsilon = \Omega \cap \varepsilon\omega$ , 其中  $\varepsilon$  是刻画材料单胞尺寸的小参数,  $\Omega$  为有界光滑区域,

$$\partial\Omega^\varepsilon = \Gamma_\varepsilon \cup S_\varepsilon,$$

$$\Gamma_\varepsilon = \partial\Omega \cap \varepsilon\omega,$$

$$S_\varepsilon = (\partial\Omega^\varepsilon) \cap \Omega,$$

$$S_\varepsilon^0 = (S_\varepsilon) \cap (\omega \cap Q).$$

二维平面中的周期单胞  $\omega \cap Q$ , 区域  $\Omega$  和孔洞区域  $\Omega^\varepsilon$  分别如图 1 和图 2 所示. 本文使用 Einstein 求和形式, 即重复下标表示求和.

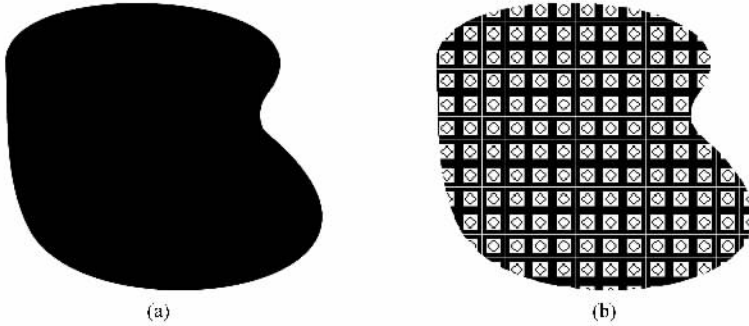


图 2 二维区域  $\Omega$  和孔洞区域  $\Omega^\varepsilon$  (a) 区域  $\Omega$  (b) 孔洞区域  $\Omega^\varepsilon$

周期孔洞结构复合材料热力耦合问题可表述为如下微分方程组<sup>[25-27]</sup>:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( k_{ij}^\varepsilon(x) \frac{\partial \theta^\varepsilon(x)}{\partial x_j} \right) + h(x) &= 0 & (x \in \Omega^\varepsilon); \\ \frac{\partial}{\partial x_j} (a_{ijk}^\varepsilon(x) \varepsilon_{hk}(u^\varepsilon(x))) - \frac{\partial}{\partial x_j} (a_{ijk}^\varepsilon(x) b_{hk}^\varepsilon(x) \theta^\varepsilon(x)) + f_i(x) &= 0 & (i = 1, 2, \dots, n; x \in \Omega^\varepsilon); \\ \theta^\varepsilon &= T^0(x), \\ u^\varepsilon &= u_0(x) & (x \in \Gamma_\varepsilon); \\ \sigma_\varepsilon(\theta^\varepsilon) &\equiv \nu_i k_{ij}^\varepsilon \frac{\partial \theta^\varepsilon}{\partial x_j} = 0, \\ \sigma_\varepsilon(u^\varepsilon, \theta^\varepsilon(x)) &\equiv \nu_j (a_{ijk}^\varepsilon(x) \varepsilon_{hk}(u^\varepsilon(x)) - a_{ijk}^\varepsilon(x) b_{hk}^\varepsilon(x) \theta^\varepsilon(x)) = 0 & (x \in S_\varepsilon). \end{aligned} \quad (1)$$

这里  $u^\varepsilon(x)$  和  $\theta^\varepsilon(x)$  分别为位移向量和温度增量 (相对于参考温度);  $\{a_{ijk}^\varepsilon\}$ ,  $\{b_{ij}^\varepsilon\}$  和  $\{k_{ij}^\varepsilon\}$  分别为复合材料的刚度系数、热膨胀系数和热导率;  $h(x)$  为热源密度, 即单位质量所产生的热量;  $T^0(x)$  为参考温度;  $f(x)$  为内力;  $\varepsilon_{hk}(u^\varepsilon)$  为位移向量对应的应变,  $\varepsilon_{hk}(u^\varepsilon) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_h^\varepsilon}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k^\varepsilon}{\partial x_h} \right)$ ;  $f(x)$ ,  $T^0(x)$ ,  $h(x)$  和  $u^\varepsilon(x)$  为足够光滑的标量函数或向量函数.

假设  $\{a_{ijk}^\varepsilon\}$ ,  $\{b_{ij}^\varepsilon\}$  和  $\{k_{ij}^\varepsilon\}$  在  $\omega$  上分片光滑, 令  $\xi = x/\varepsilon$ , 则  $\{a_{ijk}^\varepsilon\}$ ,  $\{b_{ij}^\varepsilon\}$  和  $\{k_{ij}^\varepsilon\}$  可以变换为  $\{a_{ijk}(\xi)\}$ ,  $\{b_{ij}(\xi)\}$  和  $\{k_{ij}(\xi)\}$ , 它们均为  $\xi = x/\varepsilon$  的周期函数. 在物理学中,  $\{a_{ijk}(\xi)\}$  一般满足椭圆正则条件  $E(k_1, k_2)$ ,  $\{b_{ij}^\varepsilon\}$  和  $\{k_{ij}^\varepsilon\}$  满足正定条件  $P(\lambda_1, \lambda_2)$ .  $\{a_{ijk}(\xi)\}$  是与  $\varepsilon$  无关的有界可测函数, 且满足下列关系:

$$a_{ijk}^\varepsilon = a_{jkh}^\varepsilon = a_{hjk}^\varepsilon,$$

$k_1 \eta_{ih} \eta_{ih} \leq a_{ijk}^\varepsilon \eta_{ij} \eta_{hk} \leq k_2 \eta_{ih} \eta_{ih}$  ( $x \in \Omega$ ), 式中  $\{\eta_{ih}\}$  为任意的实对称矩阵,  $k_1$  和  $k_2$  是与  $\varepsilon$  无关的正数.  $\{k_{ij}(\xi)\}$  为有界可测函数, 满足

$$k_{ij}^\varepsilon = k_{ji}^\varepsilon,$$

$$\lambda_1 \eta_i \eta_i \leq k_{ij}^\varepsilon \eta_i \eta_j \leq \lambda_2 \eta_i \eta_i \quad (x \in \Omega),$$

式中  $\{\eta_i\}$  为任意的实向量,  $\lambda_1$  和  $\lambda_2$  是与  $\varepsilon$  无关的正常数.

**定理 1** 方程组 (1) 有如下形式的双尺度渐近展开式:

$$\theta^\varepsilon(x) = \theta^0(x) + \sum_{l=1}^2 \varepsilon^l \sum_{\alpha=l} H_\alpha(\xi) D_\alpha^l \theta^0(x) + o(\varepsilon^2), \quad (2)$$

$$u^\varepsilon(x) = u^0(x) + \sum_{l=0}^1 \varepsilon^{l+1} \sum_{\alpha=l} M_\alpha(\xi) D_\alpha^l \theta^0(x)$$

式中

$$+ \sum_{l=1}^2 \varepsilon^l \sum_{\alpha=l} N_{\alpha}(\xi) D_{\alpha}^l \mathbf{u}^0(x) + \alpha(\varepsilon^2), \quad (3)$$

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n),$$

$$\alpha = |\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n|$$

$$(\alpha_j = 0, 1, \dots, l; j = 1, 2, \dots, n).$$

(2)(3) 式中所有的标量函数  $H_{\alpha}(\xi)$  向量函数  $\mathbf{M}_{\alpha}(\xi)$  矩阵函数  $N_{\alpha}(\xi)$  均为  $\mathbb{R}^n$  上关于  $\xi$  的周期函数, 这些函数仅与  $\xi = x/\varepsilon$  有关, 并定义在单胞  $\omega \cap Q$  上. 当  $\alpha = 1$  和  $\alpha_i = 1$  将  $H_{\alpha}(\xi)$ ,  $\mathbf{M}_{\alpha}(\xi)$  和  $N_{\alpha}(\xi)$  简记为  $H_i(\xi)$ ,  $\mathbf{M}_i(\xi)$  和  $N_i(\xi)$ . 这些局部单胞函数为下列微分方程组的解:

$$\frac{\partial}{\partial \xi_i} \left( k_{ij}(\xi) \frac{\partial H_{\alpha_1}(\xi)}{\partial \xi_j} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi_i} (k_{i\alpha_1}(\xi)) = 0 \quad (\xi \in \omega \cap Q),$$

$$\mathcal{A}(H_{\alpha_1}(\xi)) \equiv \nu_i k_{ij}(\xi) \frac{\partial H_{\alpha_1}(\xi)}{\partial \xi_j} = -\nu_i k_{i\alpha_1}(\xi) \quad (\xi \in S_{\varepsilon}^0), \quad (4)$$

$$\int_{\omega \cap Q} H_{\alpha_1}(\xi) d\xi = 0;$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi_j} (a_{ijhk}(\xi) \varepsilon_{hk}(\mathbf{M}_0(\xi))) + \frac{\partial}{\partial \xi_j} (a_{ijhk} b_{hk}) = 0 \quad (\xi \in \omega \cap Q),$$

$$\mathcal{A}(\mathbf{M}_0(\xi)) \equiv \nu_i a_{ijhk}(\xi) \varepsilon_{hk}(\mathbf{M}_0(\xi)) = -\nu_i a_{ijhk} b_{hk} \quad (\xi \in S_{\varepsilon}^0), \quad (5)$$

$$\int_{\omega \cap Q} \mathbf{M}_0(\xi) d\xi = 0;$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi_j} (a_{ijhk}(\xi) \varepsilon_{hk}(N_{\alpha_1 m}(\xi))) + \frac{\partial}{\partial \xi_j} (a_{ij\alpha_1 m}) = 0 \quad (\xi \in \omega \cap Q),$$

$$\mathcal{A}(N_{\alpha_1 m}(\xi)) \equiv \nu_i a_{ijhk}(\xi) \varepsilon_{hk}(N_{\alpha_1 m}(\xi)) = -\nu_i a_{ij\alpha_1 m} \quad (\xi \in S_{\varepsilon}^0), \quad (6)$$

$$\int_{\omega \cap Q} N_{\alpha_1 m}(\xi) d\xi = 0.$$

当  $\alpha = 2$  和  $\alpha_i = \alpha_j = 1$  将  $H_{\alpha}(\xi)$ ,  $\mathbf{M}_{\alpha}(\xi)$  和  $N_{\alpha}(\xi)$  简记为  $H_{ij}(\xi)$ ,  $\mathbf{M}_i(\xi)$  和  $N_{ij}(\xi)$ .  $H_{ij}(\xi)$ ,  $\mathbf{M}_i(\xi)$  和  $N_{ij}(\xi)$  是下列微分方程组的解:

$$\frac{\partial}{\partial \xi_i} \left( k_{ij}(\xi) \frac{\partial H_{\alpha_1 \alpha_2}(\xi)}{\partial \xi_j} \right) = -\frac{\partial}{\partial \xi_i} (k_{i\alpha_1}(\xi) H_{\alpha_2}(\xi)) + \hat{k}_{\alpha_1 \alpha_2} - k_{\alpha_2 j} \frac{\partial H_{\alpha_1}(\xi)}{\partial \xi_j} - k_{\alpha_1 \alpha_2} \quad (\xi \in \omega \cap Q),$$

$$\mathcal{A}(H_{\alpha_1 \alpha_2}(\xi)) \equiv \nu_i k_{ij}(\xi) \frac{\partial H_{\alpha_1 \alpha_2}(\xi)}{\partial \xi_j} = -\nu_i k_{i\alpha_1} H_{\alpha_2}(\xi) \quad (\xi \in S_{\varepsilon}^0), \quad (7)$$

$$\int_{\omega \cap Q} H_{\alpha_1 \alpha_2}(\xi) d\xi = 0;$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi_j} (a_{ijhk}(\xi) \varepsilon_{hk}(\mathbf{M}_{\alpha_1}))$$

$$= a_{i\alpha_1 hk} b_{hk} + \frac{\partial}{\partial \xi_j} (a_{ijhk} b_{hk} H_{\alpha_1}) - \frac{\partial}{\partial \xi_j} (a_{ij\alpha_1 k} M_{0k}) - a_{i\alpha_1 hk}(\xi) \varepsilon_{hk}(\mathbf{M}_0(\xi)) + \hat{b}_{i\alpha_1} \quad (\xi \in \omega \cap Q),$$

$$\mathcal{A}(\mathbf{M}_{\alpha_1}(\xi)) \equiv \nu_i a_{ijhk}(\xi) \varepsilon_{hk}(\mathbf{M}_{\alpha_1}(\xi)) = \nu_j a_{ijhk} b_{hk} H_{\alpha_1} - \nu_j a_{ij\alpha_1 k} M_{0k} \quad (\xi \in S_{\varepsilon}^0), \quad (8)$$

$$\int_{\omega \cap Q} \mathbf{M}_{\alpha_1}(\xi) d\xi = 0;$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi_j} (a_{ijhk}(\xi) \varepsilon_{hk}(N_{\alpha_1 \alpha_2 m}))$$

$$= -a_{i\alpha_2 \alpha_1 m} - \frac{\partial}{\partial \xi_j} (a_{ij\alpha_1 m} N_{\alpha_2 hm}) - a_{i\alpha_2 hk} \varepsilon_{hk}(N_{\alpha_1 m}) + \hat{a}_{i\alpha_2 \alpha_1 m} \quad (\xi \in \omega \cap Q),$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(N_{a_1 a_2 m}) &\equiv \nu_i a_{ijk} \varepsilon_{hk} (N_{a_1 a_2 m}) = -\nu_i a_{ijk_1 m} N_{a_2 h m} \quad (\xi \in S_\varepsilon^0), \\ \int_{\omega \cap Q} N_{a_1 a_2 m} d\xi &= 0. \end{aligned}$$

(9)

(2)(3) 式中的  $\theta^0(x)$  和  $u^0(x)$  为下列均匀化微分方程组的解:

$$\hat{k}_{a_1 a_2} \frac{\partial^2 \theta^0(x)}{\partial x_{a_1} \partial x_{a_2}} = -h(x) \quad (x \in \Omega), \quad (10)$$

$$\theta^0(x) = T^0(x) \quad (x \in \partial\Omega);$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (\hat{a}_{ijk} \varepsilon_{hk} (u^0(x))) + \hat{b}_{ij} \frac{\partial \theta^0(x)}{\partial x_j} = -f_i \quad (i = 1, 2, \dots, n; x \in \Omega), \quad (11)$$

$$u^0(x) = u_0(x) \quad (x \in \partial\Omega).$$

$\theta^0(x)$  和  $u^0(x)$  又称为方程组(1)的均匀化解.

方程组(10)(11)中的均匀化常数  $\{\hat{k}_{ij}\}$ ,  $\{\hat{b}_{ij}\}$  和  $\{\hat{a}_{ijk}\}$  可由下列公式计算得到:

$$\hat{k}_{ij} = |Q \cap \omega|^{-1} \int_{Q \cap \omega} \left( k_{ij}(\xi) + k_{jm}(\xi) \frac{\partial H(\xi)}{\partial \xi_m} \right) d\xi, \quad (12)$$

$$\hat{a}_{ijk} = |Q \cap \omega|^{-1} \int_{Q \cap \omega} (a_{ijk}(\xi) + a_{ijlm}(\xi) \varepsilon_{lm} (N_{hk})) d\xi, \quad (13)$$

$$\hat{b}_{ij} = |Q \cap \omega|^{-1} \int_{Q \cap \omega} (-a_{ijk} b_{hk} + a_{ijlm}(\xi) \varepsilon_{lm} (M_0)) d\xi. \quad (14)$$

对定理 1 作以下四点注释.

注 1 将(2)(3)式代入方程组(1), 鉴于  $\varepsilon$  的任意性, 比较两边  $\varepsilon$  的同次幂系数及边界条件可以得到确定单胞函数的方程组(4)–(9).

注 2 (12)–(14)式中的  $\{\hat{k}_{ij}\}$  和  $\{\hat{b}_{ij}\}$  满足正定条件  $P(\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2)$  和  $\hat{a}_{ijk}$  满足椭圆正则条件  $E(\tilde{k}_1, \tilde{k}_2)$ .

注 3 方程组(1)(4)–(11)的存在唯一性可利用所对应方程组系数满足的正则性条件证明.

注 4 (2)(3)式中

$$D_a^l \theta^0(x) = \frac{\partial^l \theta^0(x)}{\partial x_1^{a_1} \partial x_2^{a_2} \dots \partial x_n^{a_n}},$$

$$D_a^l u^0(x) = \frac{\partial^l u^0(x)}{\partial x_1^{a_1} \partial x_2^{a_2} \dots \partial x_n^{a_n}}.$$

(4)–(9)式中的标量函数  $M_{ak}$  表示向量  $M_a$  的第  $k$  个分量, 标量函数  $N_{akh}$  表示矩阵  $N_a$  的第  $k$  行  $h$  列元素, 向量函数  $N_{am}$  表示矩阵  $N_a$  的第  $m$  列向量.

### 3. 双尺度近似解及双尺度有限元算法

#### 3.1. 双尺度有限元近似解

在实际计算中(2)(3)式中一般不考虑后面的无穷小量, 因而有以下的近似公式<sup>[28]</sup>:

$$\begin{aligned} \theta^\varepsilon(x) &\approx \theta_\varepsilon^L(x) \\ &= \theta^0(x) + \sum_{l=1}^L \varepsilon^l \sum_{a=l} H_a(\xi) D_a^l \theta^0(x) \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} u^\varepsilon(x) &\approx u_\varepsilon^L(x) \\ &= u^0(x) + \sum_{l=0}^{L-1} \varepsilon^{l+1} \sum_{a=l} M_a(\xi) D_a^l \theta^0(x) \\ &\quad + \sum_{l=1}^L \varepsilon^l \sum_{a=l} N_a(\xi) D_a^l u^0(x). \end{aligned} \quad (16)$$

称  $(u_\varepsilon^{(1)}, \theta_\varepsilon^{(1)})$  为  $(u^\varepsilon, \theta^\varepsilon)$  的一阶双尺度解,  $(u_\varepsilon^{(2)}, \theta_\varepsilon^{(2)})$  为  $(u^\varepsilon, \theta^\varepsilon)$  的二阶双尺度解. 当  $L=1$  时, 有以下的渐近误差估计.

定理 2 设  $\theta^\varepsilon(x), u^\varepsilon(x)$  是方程组(1)的弱解, 若  $T^0(x) \in H^3(\Omega), h(x) \in H^1(\Omega), u_0 \in H^3(\Omega), f \in H^1(\Omega)$  则存在与  $\varepsilon$  无关的正常数  $C_1, C_2$ , 使得下列不等式成立:

$$\begin{aligned} \|\theta^\varepsilon(x) - \theta_\varepsilon^{(1)}(x)\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)} &\leq C_1 \varepsilon^{1/2} (\|T^0(x)\|_{H^{5/2}(\partial\Omega)} \\ &\quad + \|h(x)\|_{H^1(\Omega)}), \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \|u^\varepsilon(x) - u_\varepsilon^{(1)}(x)\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)} &\leq C_2 \varepsilon^{1/2} (\|u_0(x)\|_{H^{5/2}(\partial\Omega)} \\ &\quad + \|f(x)\|_{H^1(\Omega)} \\ &\quad + \|T^0(x)\|_{H^{5/2}(\partial\Omega)} \\ &\quad + \|h(x)\|_{H^1(\Omega)}). \end{aligned} \quad (18)$$

定理 2 的证明参见附录.

下面讨论方程组(1)的双尺度有限元算法.

3.1.1.  $N_{\alpha_1 m}(\xi), M_0(\xi), H_{\alpha_1}(\xi), \{\hat{a}_{ijk}\}, \{\hat{b}_{ij}\}$  和  $\{\hat{k}_{ij}\}$  的有限元计算  
运用变分原理,  $N_{\alpha_1 m}(\xi), M_0(\xi), H_{\alpha_1}(\xi)$  的有

限元解  $N_{\alpha_1 m}^h(\xi), M_0^h(\xi), H_{\alpha_1}^h(\xi)$  可通过求解单胞  $Q \cap \omega$  上方程组(4)–(6)对应的下列有限元方程得到:

$$\int_{Q \cap \omega} \frac{\partial v}{\partial \xi_i} k_{ij} \frac{\partial H_{\alpha_1}^h}{\partial \xi_j} d\xi = - \int_{Q \cap \omega} \frac{\partial v}{\partial \xi_i} k_{i\alpha_1} d\xi \quad (\forall v \in S^h(Q \cap \omega)), \quad (19)$$

$$\int_{Q \cap \omega} \varepsilon_{ij}(\mathbf{v}) a_{ijk} \varepsilon_{lk}(M_0^h) d\xi = - \int_{Q \cap \omega} \varepsilon_{ij}(\mathbf{v}) a_{ijk} b_{lk} d\xi \quad (\forall \mathbf{v} \in S^h(Q \cap \omega)), \quad (20)$$

$$\int_{Q \cap \omega} \varepsilon_{ij}(\mathbf{v}) a_{ijk} \varepsilon_{lk}(N_{\alpha_1 m}^h) d\xi = - \int_{Q \cap \omega} \varepsilon_{ij}(\mathbf{v}) a_{ijk} d\xi \quad (\forall \mathbf{v} \in S^h(Q \cap \omega)). \quad (21)$$

这里,  $S^h(Q \cap \omega)$  是周期单胞  $Q \cap \omega$  的有限元空间,  $h$  是周期单胞剖分的网格尺寸.

3.1.2.  $N_{\alpha_1 \alpha_2 m}(\xi), M_{\alpha_1}(\xi)$  和  $H_{\alpha_1 \alpha_2}(\xi)$  的有限元计算  
求解单胞  $Q \cap \omega$  上方程组(7)–(9)对应的有限元方程, 可得  $N_{\alpha_1 \alpha_2 m}, M_{\alpha_1}$  和  $H_{\alpha_1 \alpha_2}$  对应的有限元解  $N_{\alpha_1 \alpha_2 m}^h(\xi), M_{\alpha_1}^h(\xi)$  和  $H_{\alpha_1 \alpha_2}^h(\xi)$ .

3.1.3. 均匀化解  $\theta^0(x)$  和  $\mathbf{u}^0(x)$  的有限元计算

均匀化解的有限元解可通过解系数为均匀化有限元参数的有限元方程得到. 首先能找到一个向量函数  $\bar{\mathbf{u}}(x) \in H^2(\Omega)$  和标量函数  $\bar{\theta}(x) \in H^2(\Omega)$ , 使得  $\bar{\mathbf{u}}(x) - \mathbf{u}_0(x) \in H_0^1(\Omega), \bar{\theta}(x) - T^0(x) \in H_0^1(\Omega)$ , 并且

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \varepsilon_{ij}(\mathbf{v}) \hat{a}_{ijk}^h \varepsilon_{lk}(\mathbf{u}^{(0, h_0)}(x) - \bar{\mathbf{u}}(x)) dx \\ &= \int_{\Omega} f_i(x) v_i(x) dx - \int_{\Omega} \varepsilon_{ij}(\mathbf{v}) \hat{a}_{ijk}^h \varepsilon_{lk}(\bar{\mathbf{u}}(x)) dx - \int_{\Omega} \varepsilon_{il}(\mathbf{v}) \hat{b}_{il}^h \theta^{(0, h_0)} dx \quad (\forall \mathbf{v} \in S^{h_0}(\Omega)), \end{aligned} \quad (22)$$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial x_i} \hat{k}_{ij} \frac{\partial (\theta^{(0, h_0)}(x) - \bar{\theta}(x))}{\partial x_j} dx = \int_{\Omega} h v dx - \int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial x_i} \hat{k}_{ij} \frac{\partial \bar{\theta}(x)}{\partial x_j} dx \quad (\forall v \in S^{h_0}(\Omega)) \quad (23)$$

成立. 这里  $S^{h_0}(\Omega)$  是区域  $\Omega$  中网格剖分尺寸为  $h_0$  的有限元空间.

3.1.4.  $L$  阶双尺度解  $(\mathbf{u}_{\varepsilon}^{(L)}(x), \theta_{\varepsilon}^{(L)}(x))$  的有限元计算

按照  $\theta_{\varepsilon}^{(L)}(x), \mathbf{u}_{\varepsilon}^{(L)}(x)$  的定义,  $\Omega^{\varepsilon}$  中任意点  $x$  的有限元解  $\theta_{\varepsilon}^{(L, h, h_0)}(x), \mathbf{u}_{\varepsilon}^{(L, h, h_0)}(x)$  可用下列公式计算:

$$\begin{aligned} \theta_{\varepsilon}^{(L, h, h_0)}(x) &= \theta^{(0, h_0)}(x) + \sum_{l=1}^L \varepsilon^l \sum_{\alpha=l}^L H_{\alpha}^h(\xi) \\ &\quad \times \frac{\partial^l \theta^{(0, h_0)}(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}, \end{aligned} \quad (24)$$

$$\mathbf{u}_{\varepsilon}^{(L, h, h_0)}(x) = \mathbf{u}_i^{(0, h_0)}(x) + \sum_{l=0}^{L-1} \varepsilon^{l+1} \sum_{\alpha=l}^L M_{\alpha}^h(\xi)$$

$$\begin{aligned} & \times \frac{\partial^l \theta^{(0, h_0)}(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \\ &+ \sum_{l=1}^L \varepsilon^l \sum_{\alpha=l}^L N_{\alpha im}^h(\xi) \\ &\quad \times \frac{\partial^l \mathbf{u}_m^{(0, h_0)}(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}. \end{aligned} \quad (25)$$

## 3.2. 双尺度有限元算法

下面给出双尺度有限元算法实现的步骤.

步骤 I 确定复合材料基本单胞的材料参数、局部界面和局部构成.

步骤 II 在周期单胞  $Q \cap \omega$  上用(19)–(21)式计算刻画局部周期单胞的有限元解  $N_{\alpha_1 m}^h(\xi)$ ,

$M_0^h(\xi)$ 和 $H_{\alpha_1}^h(\xi)$ 进而计算复合材料的有限元均匀化参数.

步骤Ⅲ 利用步骤Ⅱ中同样的网格在周期单胞 $Q\cap\omega$ 上计算刻画局部周期单胞的高阶有限元解 $N_{\alpha_1\alpha_2m}^h(\xi)$ , $M_{\alpha_1}^h(\xi)$ 和 $H_{\alpha_1\alpha_2}^h(\xi)$ .

步骤Ⅳ 在区域 $\Omega$ 中利用(22)(23)式计算均匀化有限元解 $\boldsymbol{u}^{(0,h_0)}$ , $\theta^{(0,h_0)}$ .

步骤Ⅴ 计算有限元解 $\boldsymbol{u}^{(0,h_0)}$ 和 $\theta^{(0,h_0)}$ 的偏导数 $\frac{\partial^l\theta^{(0,h_0)}(x)}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\dots\partial x_n^{\alpha_n}}$ 和 $\frac{\partial^l\boldsymbol{u}^{(0,h_0)}(x)}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\dots\partial x_n^{\alpha_n}}$ .

步骤Ⅵ 用(24)(25)式在 $\Omega^\varepsilon$ 中计算高阶双尺度位移、温度增量的有限元解.

步骤Ⅶ 计算区域 $\Omega^\varepsilon$ 中任意点 $x$ 处高阶双尺度应变、应力.

## 4. 数值算例

### 4.1. 双尺度算法与传统有限元算法的比较

为了验证上述算法的有效性与可行性,下面先比较运用传统有限元方法与双尺度方法计算热力耦合问题的近似效果.考虑如下的二维热力耦合方程组:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( a_{ijk} \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \varepsilon_{ik}(\boldsymbol{u}^\varepsilon) \right) &= -100000 - \frac{\partial}{\partial x_j} (a_{ijk}(x/\varepsilon) \\ &\times b_{ik}(x/\varepsilon) \theta^\varepsilon(x)) \quad (i=1,2; x \in \Omega^\varepsilon), \\ u_i^\varepsilon(x) &= u_{0i}(x) = 1/300x_i^2 \quad (i=1,2; x \in \partial\Omega^\varepsilon); \end{aligned} \tag{26}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( k_{ij} \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \frac{\partial \theta^\varepsilon(x)}{\partial x_j} \right) &= 1000 \quad (x \in \Omega^\varepsilon), \\ \theta^\varepsilon(x) &= T^0(x) = 100 + x_i - x_i^2 \quad (x \in \partial\Omega^\varepsilon). \end{aligned} \tag{27}$$

(26)(27)式中的区域 $\Omega^\varepsilon$ 和周期单胞 $Q\cap\omega$ 分别如图3、图4所示.取 $\varepsilon=1/10$ ,即表示横向、纵向各由10个单胞周期分布形成区域 $\Omega^\varepsilon$ .

图4的周期单胞中,影阴部分表示材料Ⅰ,黑色部分表示材料Ⅱ,其余部分为孔洞区域.材料Ⅰ、材料Ⅱ的Lame常数分别为

$$\begin{aligned} D_{\text{I}} &= \begin{pmatrix} 27857.142 & 5571.428 & 0 \\ 5571.428 & 27857.142 & 0 \\ 0 & 0 & 11142.857 \end{pmatrix}, \\ D_{\text{II}} &= \begin{pmatrix} 315000 & 157500 & 0 \\ 157500 & 315000 & 0 \\ 0 & 0 & 78750 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

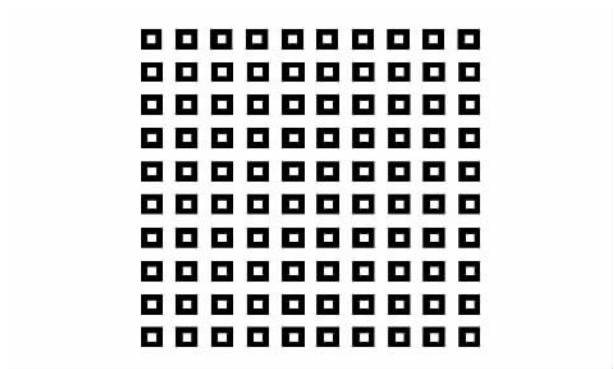


图3 区域 $\Omega^\varepsilon$

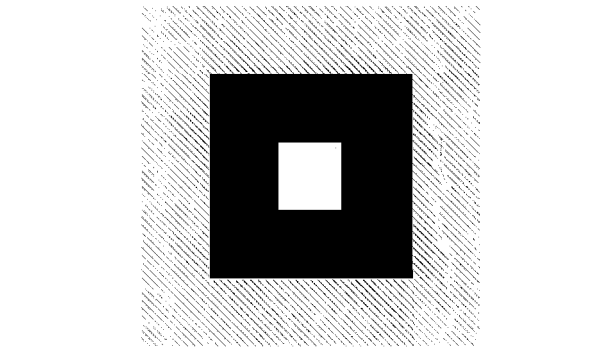


图4 孔洞周期单胞 $Q\cap\omega$

计算所得的均匀化Lame常数为

$$\hat{D} = \begin{pmatrix} 155314.796 & 63294.936 & 0 \\ 63294.936 & 179198.092 & 0 \\ 0 & 0 & 45763.580 \end{pmatrix}.$$

材料Ⅰ、材料Ⅱ的热导率 $K_{\text{I}}$ , $K_{\text{II}}$ 和由(12)式计算的均匀化热导率 $\hat{K}$ 分别为

$$\begin{aligned} K_{\text{I}} &= \begin{pmatrix} 2.24 & 0 \\ 0 & 2.24 \end{pmatrix}, \\ K_{\text{II}} &= \begin{pmatrix} 39.66 & 0 \\ 0 & 39.66 \end{pmatrix}, \\ \hat{K} &= \begin{pmatrix} 21.9168 & 0.01404 \\ 0.01404 & 25.9168 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

材料Ⅰ、材料Ⅱ的热模 $B_{\text{I}}$ , $B_{\text{II}}$ 和由(14)式计算的均匀化热模 $\hat{B}$ 分别为

$$\begin{aligned} B_{\text{I}} &= \begin{pmatrix} 1.6714 & 0 \\ 0 & 1.6714 \end{pmatrix}, \\ B_{\text{II}} &= \begin{pmatrix} 57.700 & 0 \\ 0 & 57.700 \end{pmatrix}, \\ \hat{B} &= \begin{pmatrix} -25.584 & 0 \\ 0 & -29.068 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

两种不同计算方法的相关参数比较如表1所列.由表1可知,计算方程组(26)(27)的数值解

表 1 传统有限元方法与双尺度有限元方法计算元素、节点、存储量和运行时间的比较

	传统有限元方法	双尺度有限元方法
有限元剖分单元	80000	5000 + 5000
有限元剖分节点	40401	2601 + 2601
存储量/bit	$1.2 \times 10^{14}$	$2 \times 10^{11} + 2 \times 10^{11}$
运行时间/s	2700	13 + 15

注：双尺度有限元方法的数据中，加号前面的数据为计算单胞方程的数据，加号后面的数据为计算均匀化方程的数据。

时，双尺度方法的运算量、运行时间均比传统有限元方法的对应量少得多。为了验证算法的可行性，图 5—图 8 分别示出了细网格解  $u_\epsilon^{h_1}$ （传统有限元方法计算）、均匀化解  $u^{(0,h_0)}$ 、一阶双尺度解  $u_\epsilon^{(1,h,h_0)}$  及细网格解  $u_\epsilon^{h_1}$  与一阶双尺度解  $u_\epsilon^{(1,h,h_0)}$  绝对误差  $|u_\epsilon^{(1,h,h_0)} - u_\epsilon^{h_1}|$  的第一分量。

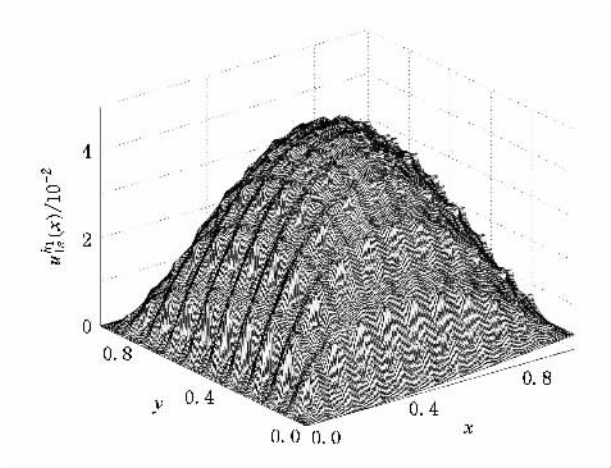


图 5 细网格解  $u_\epsilon^{h_1}(x)$  的第一分量  $u_{1\epsilon}^{h_1}(x)$

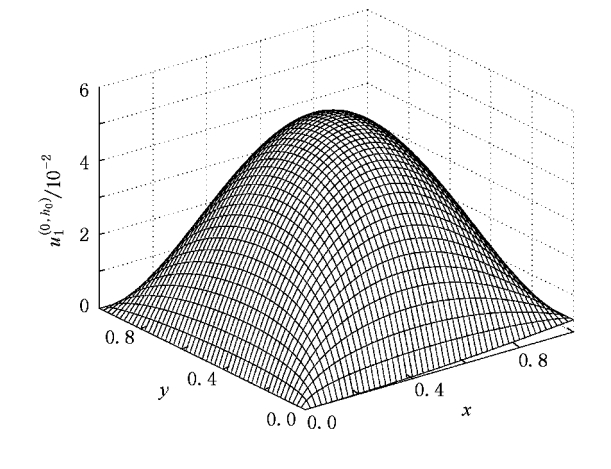


图 6 均匀化解  $u^{(0,h_0)}$  的第一分量  $u_1^{(0,h_0)}$

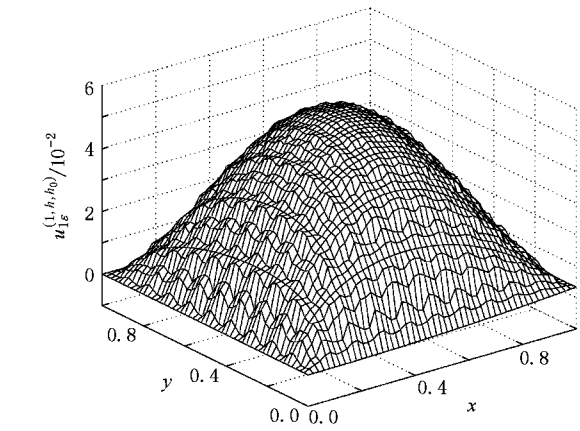


图 7 一阶双尺度解  $u_\epsilon^{(1,h,h_0)}$  的第一分量  $u_{1\epsilon}^{(1,h,h_0)}$

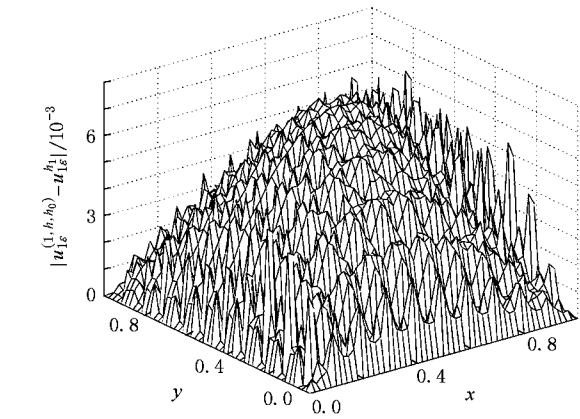


图 8  $|u_\epsilon^{(1,h,h_0)} - u_\epsilon^{h_1}|$  的第一分量  $|u_{1\epsilon}^{(1,h,h_0)} - u_{1\epsilon}^{h_1}|$

4.2. 均匀化方法与双尺度方法计算应变的比较

均匀化方法<sup>[1-3]</sup>和能量方法<sup>[4,5]</sup>都是用均匀化解代替原问题的解，没有考虑更高阶的渐近展式，特别是在计算局部应力、应变中更应该运用高阶的展式。与均匀化方法相比，本文得到的应力、应变公式在计算中只是增加了单胞函数的导数计算，但增加的二阶项能更好地对均匀化解的有关信息进行补充。由均匀化方法可知，方程组 (1) 中位移对应的应变张量按下式计算：

$$\epsilon_{hk}(\boldsymbol{u}^\epsilon) \approx \epsilon_{hk}(\boldsymbol{u}^0) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_k^0}{\partial x_h} + \frac{\partial u_h^0}{\partial x_k} \right). \quad (28)$$

用二阶双尺度方法计算方程组 (1) 中位移对应的应变张量可表示为

$$\epsilon_{hk}(\boldsymbol{u}^\epsilon(x)) \approx \epsilon_{hk}(\boldsymbol{u}_\epsilon^{(2)}(x))$$

$$\begin{aligned} &= \epsilon_{hk}(\boldsymbol{u}^0(x)) + \sum_{l=1}^2 \epsilon^{l-1} \sum_{a=l} \epsilon_{hk}(N_{am}(\xi)) \frac{\partial^l u_m^0(x)}{\partial x_1^{a_1} \partial x_2^{a_2}} + \sum_{l=0}^1 \epsilon^l \sum_{a=l} \epsilon_{hk}(M_a(\xi)) \frac{\partial^l \theta^0(x)}{\partial x_1^{a_1} \partial x_2^{a_2}} \\ &+ \sum_{l=1}^2 \epsilon^l \sum_{a=l} \frac{1}{2} \left[ N_{ahm} \frac{\partial^{l+1} u_m^0(x)}{\partial x_1^{a_1} \partial x_2^{a_2} \partial x_k} + N_{ahm} \frac{\partial^{l+1} u_m^0(x)}{\partial x_1^{a_1} \partial x_2^{a_2} \partial x_h} \right] \\ &+ \sum_{l=0}^1 \epsilon^{l+1} \sum_{a=l} \frac{1}{2} \left[ M_{ah} \frac{\partial^{l+1} \theta^0(x)}{\partial x_1^{a_1} \partial x_2^{a_2} \partial x_k} + M_{ah} \frac{\partial^{l+1} \theta^0(x)}{\partial x_1^{a_1} \partial x_2^{a_2} \partial x_h} \right]. \end{aligned} \tag{29}$$

为便于直观地比较二阶双尺度方法相对于均匀化方法在计算应变时的有效性,图 9—图 12 中分别示出了用均匀化方法和二阶双尺度方法近似计算的应变  $\epsilon_{11}(\boldsymbol{u}^{(0,h_0)})$  和  $\epsilon_{11}(\boldsymbol{u}_\epsilon^{(2,h,h_0)})$  以及这两种方法与传统有限元方法计算的应变  $\epsilon_{11}(\boldsymbol{u}^\epsilon)$  所对应的绝对误差.

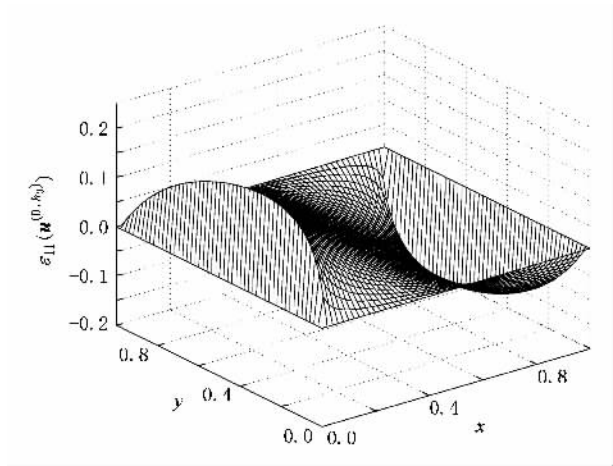


图 9 均匀化近似应变  $\epsilon_{11}(\boldsymbol{u}^{(0,h_0)})$

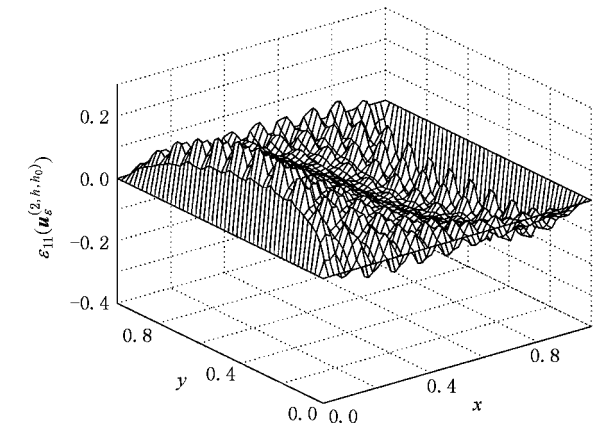


图 10 二阶双尺度近似应变  $\epsilon_{11}(\boldsymbol{u}_\epsilon^{(2,h,h_0)})$

从图 5—图 12 及表 1 可以看出 (1) 一阶双尺度有限元解  $\boldsymbol{u}_\epsilon^{(1,h,h_0)}$ ,  $\theta_\epsilon^{(1,h,h_0)}$  是对位移  $\boldsymbol{u}^\epsilon(x)$  与温度增量  $\theta^\epsilon(x)$  的很好近似. (2) 与均匀化方法相比,二阶

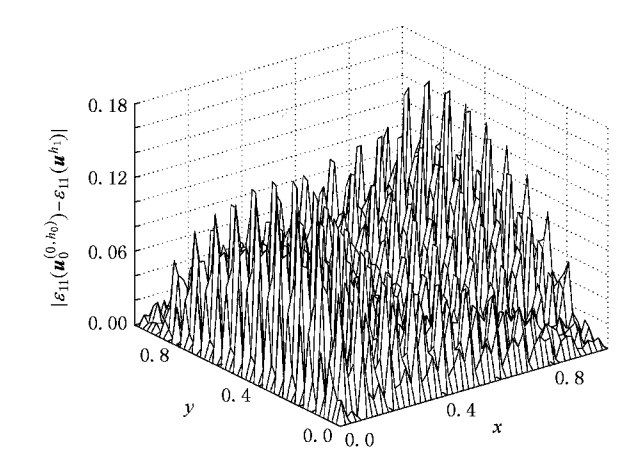


图 11 误差  $|\epsilon_{11}(\boldsymbol{u}_0^{(0,h_0)}) - \epsilon_{11}(\boldsymbol{u}^{h_1})|$

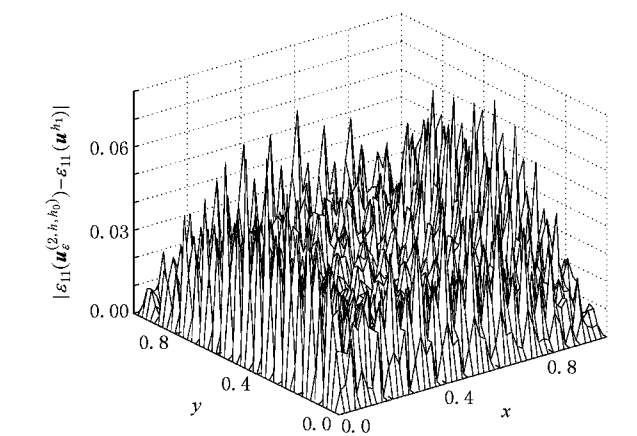


图 12 误差  $|\epsilon_{11}(\boldsymbol{u}_\epsilon^{(2,h,h_0)}) - \epsilon_{11}(\boldsymbol{u}^{h_1})|$

双尺度方法在增加很小运算量下即可得到对应变更佳的逼近.

5. 结 论

本文讨论了孔洞周期结构热力耦合方程组解 (剧烈振荡解) 的双尺度有限元计算方法. 形式展开式中的量分为以下两部分: 第一部分为整个区域中的均匀化解, 刻画了解的基本特性; 第二部分为一系列定义在单胞上的小周期解与均匀化解的耦合, 刻



画了材料的局部属性,其中包含了非常重要的耦合项  $M_a(\xi)$ ,这一项刻画了位移与温度增量的局部耦合关系.实际计算中,只要计算常系数的均匀化解与单胞上的小周期解就能够对振荡解给出较高精度的近似.

理论分析、数值计算均表明,双尺度有限元方法对处理具有小周期孔洞结构的热力耦合问题是高效和可行的.该方法有很强的移植性,为解决类似问题提供了一种高效可行的数值方法.

感谢科学与工程计算国家重点实验室对本文数值计算提供的帮助及审稿人提出宝贵的改进意见.

## 附录 定理 2 的证明

首先定义算子

$$\mathbb{L}_{1\epsilon}(\theta^\epsilon(x)) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( k_{ij}^\epsilon \frac{\partial \theta^\epsilon(x)}{\partial x_j} \right),$$

$$\mathbb{L}_{2\epsilon}(\mathbf{u}) = \frac{\partial}{\partial x_j} (a_{ijk}^\epsilon \epsilon_{hk}(\mathbf{u})).$$

将算子  $\mathbb{L}_{1\epsilon}$  作用于函数  $\theta^\epsilon(x) - \theta_\epsilon^{(1)}(x)$ ,由(4)和(7)式可得

$$\begin{aligned} \mathbb{L}_{1\epsilon}(\theta^\epsilon(x) - \theta_\epsilon^{(1)}(x)) &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left( k_{ij}^\epsilon \frac{\partial \theta^\epsilon(x)}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial}{\partial x_i} \left( k_{ij}^\epsilon \frac{\partial \theta_\epsilon^{(1)}(x)}{\partial x_j} \right) \\ &= \epsilon \mathbb{F}_0 + \epsilon \frac{\partial}{\partial x_i} \mathbb{F}_i. \end{aligned} \quad (\text{A1})$$

式中

$$\begin{aligned} \mathbb{F}_0 &= - \sum_{a=3} \left[ k_{a_2 a_3}(\xi) H_{a_1}(\xi) + k_{a_3 i}(\xi) \frac{\partial H_{a_2 a_1}(\xi)}{\partial \xi_j} \right] \frac{\partial^3 \theta^\epsilon(x)}{\partial x_{a_1} \partial x_{a_2} \partial x_{a_3}}, \\ \mathbb{F}_i &= \sum_{a=2} \left[ k_{il}(\xi) \frac{\partial H_{a_2 a_1}(\xi)}{\partial \xi_l} \frac{\partial^2 \theta^0(x)}{\partial x_{a_1} \partial x_{a_2}} \right]. \end{aligned} \quad (\text{A2})$$

由周期单胞函数  $H_{a_1}(\xi), H_{a_1 a_2}(\xi)$  在内部孔洞区域边界上的定义,  $\theta^\epsilon(x) - \theta_\epsilon^{(1)}(x)$  在区域内部的孔洞边界  $S_\epsilon$  上满足

$$\begin{aligned} \sigma_\epsilon(\theta^\epsilon(x) - \theta_\epsilon^{(1)}(x)) &= \epsilon \nu_i k_{ij} \frac{\partial H_{a_1 a_2}}{\partial \xi_j} \frac{\partial^2 \theta^0(x)}{\partial x_{a_1} \partial x_{a_2}} \\ &= \epsilon \nu_i \mathbb{F}_i. \end{aligned} \quad (\text{A3})$$

在整个区域的外边界  $\Gamma_\epsilon$  上,  $\theta^\epsilon(x) - \theta_\epsilon^{(1)}(x)$  满足

$$\begin{aligned} \theta^\epsilon(x) - \theta_\epsilon^{(1)}(x) &= -\epsilon H_{a_1}(\xi) \frac{\partial \theta^0(x)}{\partial x_{a_1}} \\ &= \psi_\epsilon(x). \end{aligned} \quad (\text{A4})$$

下面证明

$$\|\psi_\epsilon(x)\|_{H^{1/2}(\Gamma_\epsilon)} \leq c \epsilon^{1/2} \|\theta^0(x)\|_{H^2(\Omega)} \quad (\text{A5})$$

成立. (A5) 式中  $c$  是与  $\epsilon$  无关的正数. 为证明不等式 (A5) 成立, 只要找到一个标量函数  $\phi_\epsilon(x) \in H^1(\Omega^\epsilon)$  满足  $\phi_\epsilon(x) +$

$$\epsilon H_{a_1} \frac{\partial \theta^0}{\partial x_{a_1}} \in H^1(\Omega^\epsilon \setminus \Gamma_\epsilon) \text{ 及}$$

$$\|\phi_\epsilon(x)\|_{H^{1/2}(\Gamma_\epsilon)} \leq c \epsilon^{1/2} \|\theta^0(x)\|_{H^2(\Omega)} \quad (\text{A6})$$

即可. 假设标量函数  $\varphi_\epsilon \in C^\infty(\Omega)$  且

$$\begin{aligned} \varphi_\epsilon(x) &= 1 & (\rho(x, \partial\Omega^\epsilon) \leq \epsilon), \\ \varphi_\epsilon(x) &= 0 & (\rho(x, \partial\Omega^\epsilon) \geq 2\epsilon), \\ \varphi_\epsilon(x) &= 1, \quad |\nabla \varphi_\epsilon| < c_2 \epsilon^{-1} & (\epsilon < \rho(x, \partial\Omega^\epsilon) < 2\epsilon), \end{aligned} \quad (\text{A7})$$

则令

$$\phi_\epsilon(x) = -\epsilon \varphi_\epsilon(x) H_{a_1}(\xi) \frac{\partial \theta^0(x)}{\partial x_{a_1}},$$

$$K_\epsilon = \{x \mid \rho(x, \partial\Omega^\epsilon) \leq 2\epsilon\} \cap \Omega^\epsilon.$$

容易验证

$$\phi_\epsilon(x) \in H^1(\Omega^\epsilon),$$

即

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_\epsilon}{\partial x_j} &= -\epsilon H_{a_1} \frac{\partial \varphi_\epsilon}{\partial x_j} \frac{\partial \theta^0}{\partial x_{a_1}} - \epsilon \varphi_\epsilon \frac{\partial H_{a_1}}{\partial \xi_j} \frac{\partial \theta^0}{\partial x_{a_1}} \\ &\quad - \epsilon H_{a_1} \varphi_\epsilon \frac{\partial^2 \theta^0}{\partial x_{a_1} \partial x_j}. \end{aligned}$$

由函数  $\varphi_\epsilon$  的性质及单胞函数  $H_{a_1}(\xi), \frac{\partial H_{a_1}(\xi)}{\partial \xi_j}$  的有界性, 可得下列不等式:

$$\|\phi_\epsilon\|_{H^1(\Omega^\epsilon)} \leq c_3 (\|\theta^0\|_{H^1(K_\epsilon)} + \epsilon \|\theta^0\|_{H^2(K_\epsilon)}). \quad (\text{A8})$$

由文献 [2] 的引理 1.5, 有

$$\|\theta^0\|_{H^1(K_\epsilon)} \leq c_4 \epsilon^{1/2} \|\theta^0\|_{H^2(\Omega^\epsilon)}, \quad (\text{A9})$$

式中  $c_4$  是与  $\epsilon$  无关的正常数. 由 (A6) (A8) (A9) 式可证明 (A5) 式的成立.

综上所述可知, 函数  $\theta^\epsilon(x) - \theta_\epsilon^{(1)}(x)$  是方程组

$$\begin{aligned} \mathbb{L}_{1\epsilon}(\theta^\epsilon(x) - \theta_\epsilon^{(1)}(x)) &= \epsilon \mathbb{F}_0 + \epsilon \frac{\partial \mathbb{F}_i}{\partial x_i} \quad (x \in \Omega^\epsilon), \\ \theta^\epsilon(x) - \theta_\epsilon^{(1)}(x) &= \psi_\epsilon(x) \quad (x \in \Gamma_\epsilon), \\ \sigma_\epsilon(\theta^\epsilon(x) - \theta_\epsilon^{(1)}(x)) &= \epsilon \nu_i \mathbb{F}_i \quad (x \in S_\epsilon) \end{aligned} \quad (\text{A10})$$

的唯一弱解. 易证 (A10) 式中的函数  $\mathbb{F}_k$  满足如下不等式:

$$\sum \|\mathbb{F}_k\|_{L^2(\Omega^\epsilon)} \leq c_5 \|\theta^0\|_{H^2(\Omega)}. \quad (\text{A11})$$

由方程组 (A10) 及方程组 (10) 的正则性定理可知, 不等式 (17) 成立.

将算子  $\mathbb{L}_{2\epsilon}$  作用于向量函数  $\mathbf{u}^\epsilon(x) - \mathbf{u}_\epsilon^{(1)}(x)$ , 类似地可得下式:

$$\begin{aligned} \mathbb{L}_{2\epsilon}(\mathbf{u}^\epsilon(x) - \mathbf{u}_\epsilon^{(1)}(x)) &= \frac{\partial}{\partial x_j} (a_{ijk}^\epsilon \epsilon_{hk}(\mathbf{u}^\epsilon(x))) \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial x_j} (a_{ijk}^\epsilon \epsilon_{hk}(\mathbf{u}_\epsilon^{(1)}(x))) \\ &= \epsilon \mathbb{G}_{0i} + \epsilon \frac{\partial}{\partial x_j} \mathbb{G}_{ij}. \end{aligned}$$

这里

$$\begin{aligned} \mathbb{G}_{0i} &= \sum_{a=3} [a_{i a_3 h k} \epsilon_{h k} (N_{a_1 a_2 m}) + a_{i a_3 h a_2} N_{a_1 m h}] \frac{\partial^3 u_m^0}{\partial x_{a_1} \partial x_{a_2} \partial x_{a_3}} \\ &\quad + [a_{i a_2 h k} \epsilon_{h k} (M_{a_1}) - a_{i a_2 h k} b_{h k} H_{a_1} + a_{i a_2 h a_1} M_{0 h}] \frac{\partial^2 \theta^0}{\partial x_{a_1} \partial x_{a_2}}, \end{aligned} \quad (\text{A12})$$

$$\mathcal{G}_{ij} = \sum_{a=2} \varepsilon a_{ijk} \varepsilon_{lk} (N_{a_1 a_2 m}) \frac{\partial^2 u_m^0}{\partial x_{a_1} \partial x_{a_2}} + \varepsilon a_{ijk} \varepsilon_{lk} (M_{a_1}) \frac{\partial \theta^0}{\partial x_{a_1}} + a_{ijk} b_{hk} (\theta^\varepsilon - \theta_\varepsilon^{(1)}(x)). \tag{A13}$$

在边界  $S_\varepsilon$  上  $u^\varepsilon(x) - u_\varepsilon^{(1)}(x)$  满足

$$\sigma_{ie}(u^\varepsilon(x) - u_\varepsilon^{(1)}(x)) = \varepsilon \nu_j \mathcal{G}_{ij}.$$

在边界  $\Gamma_\varepsilon$  上  $u^\varepsilon(x) - u_\varepsilon^{(1)}(x)$  满足

$$u^\varepsilon(x) - u_\varepsilon^{(1)}(x) = -\varepsilon N_{a_1} \frac{\partial u^0}{\partial x_{a_1}} - \varepsilon M_0 \theta^0 = \varphi_\varepsilon(x).$$

类似于不等式 (A5) 和 (A11), 可证明如下不等式成立:

$$\begin{aligned} \|\varphi_\varepsilon\|_{H^{1/2}(\Gamma_\varepsilon)} &\leq c\varepsilon^{1/2} (\|u^0\|_{H^2(\Omega)} + \|\theta^0\|_{H^1(\Omega)}), \\ \sum_{i,j} \|\mathcal{G}_{ij}\|_{L^2(\Omega)} &\leq c\varepsilon (\|u^0\|_{H^2(\Omega)} + \|\theta^0\|_{H^2(\Omega)}). \end{aligned} \tag{A14}$$

综上所述可知, 向量函数  $u^\varepsilon(x) - u_\varepsilon^{(1)}(x)$  是如下微分方程组的唯一弱解:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{2\varepsilon}(u^\varepsilon(x) - u_\varepsilon^{(1)}(x)) &= \varepsilon \mathcal{G}_{0i} + \varepsilon \frac{\partial \mathcal{G}_{jk}}{\partial x_k} \quad (x \in \Omega^\varepsilon), \\ u^\varepsilon(x) - u_\varepsilon^{(1)}(x) &= \varphi_\varepsilon(x) \quad (x \in \Gamma_\varepsilon), \\ \sigma_{ie}(u^\varepsilon(x) - u_\varepsilon^{(1)}(x)) &= \varepsilon \nu_k \mathcal{G}_{ik} \quad (x \in S_\varepsilon). \end{aligned} \tag{A15}$$

由方程组 (11) (A15) 的正则性及不等式 (17) (A13), 不等式 (18) 得证. 定理 2 证毕.

[ 1 ] Bensoussan A ,Lions J L ,Papanicolou G 1978 *Asymptotic Analysis for Periodic Structures* ( Amsterdam : North-Holland ) p117

[ 2 ] Oleinik O A ,Shamaev A S ,Yosifian G A 1992 *Mathematical Problems in Elasticity and Homogenization* ( Amsterdam : North-Holland ) p30

[ 3 ] Jikov V V ,Kozlov S M ,Oleinik O A 1994 *Homogenization of Differential Operators and Integral Functional* ( Berlin : Springer-Verlag ) p50

[ 4 ] He W M ,Lin C S ,Cui J Z 2006 *Appl. Math. Comput.* **174** 199

[ 5 ] Tartar L 1976 *Proc. Japan-France Seminar* ( Tokyo : JSPS ) p468

[ 6 ] E W ,Engquist B 2003 *Commun. Math. Sci.* **1** 1062

[ 7 ] Hou T Y ,Wu X H 1997 *J. Comput. Phys.* **134** 169

[ 8 ] Cui J Z ,Yang H Y 1996 *Int. J. Comput. Math.* **14** 157

[ 9 ] Cui J Z ,Shin T M ,Wang Y L 1999 *Struct. Eng. Mech.* **7** 601

[ 10 ] Cao L Q ,Cui J Z 1999 *J. Appl. Math.* **22** 38 [ in Chinese ] 曹立群、崔俊芝 1999 应用数学学报 **22** 38 ]

[ 11 ] Cao L Q ,Cui J Z 1999 *J. Sys. Sci. Math. Sci.* **4** 490 [ in Chinese ] 曹立群、崔俊芝 1999 系统科学与数学 **4** 490 ]

[ 12 ] Cao L Q 2006 *Numer. Math.* **103** 11

[ 13 ] Yu X G ,Cui J Z 2007 *Compos. Sci. Technol.* **67** 471

[ 14 ] Guo L X ,Wang Y H ,Wu Z S 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 96 [ in Chinese ] 郭立新、王运华、吴振森 2005 物理学报 **54** 96 ]

[ 15 ] Treloar L R 1975 *The Physics of Rubber Elasticity* ( Oxford : Oxford University Press ) p167

[ 16 ] Chadwick P 1974 *Phil. Trans. R. Soc. Lond.* **276** 371

[ 17 ] Martin S E ,Carlson D E 1977 *J. Appl. Math. Phys.* **28** 311

[ 18 ] Rajagonal K R ,Wineman A S 1985 *Int. J. Eng. Sci.* **23** 217

[ 19 ] Chao R M ,Rajagonal K R ,Wineman A S 1987 *Arch. Mech.* **39** 551

[ 20 ] El-Hajjar R ,Haj-Ali R 2003 *Compos. Sci. Technol.* **63** 967

[ 21 ] Vihak V M 1996 *Z. Angew. Math. Mech.* **76** 35

[ 22 ] Yao X H ,Han Q 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 5056 [ in Chinese ] 姚小虎、韩 强 2008 物理学报 **57** 5056 ]

[ 23 ] Cai L C ,Chen Q F ,Guo Y ,Liu Z J ,Qi J H ,Yang X D 2007 *Chin. Phys.* **16** 499

[ 24 ] Meleshko V V 2003 *Appl. Mech. Rev.* **56** 33

[ 25 ] Mclellan A G 1980 *The Classical Thermodynamics of Deformable Materials* ( Cambridge : Cambridge University Press ) p145

[ 26 ] Nominski J L 1978 *Theory of Thermoelasticity with Applications* ( Alphen ann den Rijn : Sijthoff Noordhoof International Publishers ) p100

[ 27 ] Sneddon L N 1974 *The Linear Theory of Thermoelasticity* ( Wien ,New York : Springer-Verlag ) p189

[ 28 ] Feng Y P ,Cui J Z 2003 *Acta Mech. Sin.* **19** 585

# The two-scale finite element computation for thermoelastic problem in periodic perforated domain<sup>\*</sup>

Feng Yong-Ping<sup>1)†</sup> Cui Jun-Zhi<sup>2)</sup> Deng Ming-Xiang<sup>1)</sup>

<sup>1</sup> *College of Mathematics and Information Science ,Guangzhou University ,Guangzhou 510006 ,China )*

<sup>2</sup> *Academy of Mathematics and System Science ,Chinese Academy of Sciences ,Beijing 100190 ,China )*

( Received 29 December 2008 ; revised manuscript received 20 March 2009 )

## Abstract

The problems of composite structures containing small periodic perforated configurations are often encountered in the development of composite materials. These structures often consist of material with very fine micro-structures and vary sharply within a very small periodic domain. The traditional simulation of these structures involving multi-scale is very difficult because of the requirement for a tremendous amount of computer memory and CPU running time. The two-scale formal asymptotic expansions of the increment of temperature and the displacement for the structure with small periodic perforated configuration of composite material are given. The two-scale finite element algorithm is described , and simple numerical results are evaluated by two-scale finite element computational method. The numerical results show that the basic configuration and the increment of temperature strongly affect local strains and local stresses inside basic cell. A new effective numerical method is presented for thermoelastic problem in a periodic perforated domain.

**Keywords :** two-scale method , thermoelastic problem , periodic perforated domain , finite element method

**PACC :** 8160H , 6140G

<sup>\*</sup> Project supported by the National Natural Science Foundation of China( Grant Nos. 10801042 ,10771041 ) and the Science and Technology Program of the Education Bureau of Guangzhou , China( Grant No. 62035 ).

<sup>†</sup> E-mail : ffypp000@yahoo.com