第 58 卷 第 2 期 2009 年 2 月
1000-3290/2009/58(02)/0695-04

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.58,No.2,February,2009

一类广义 Canard 系统的近似解析解*

莫嘉琪[1)2)†]

1)(安徽师范大学数学系,芜湖 241000)

2)(上海高校计算科学 E-研究院上海交通大学研究所,上海 200240)

(2008 年 7 月 28 日收到;2008 年 8 月 14 日收到修改稿)

利用变分迭代理论研究了一类广义 Canard 系统. 首先引入一组泛函,然后构造了原方程解的迭代关系式,最后得到了问题鸭解的近似解析式.

关键词:鸭解,解析解,变分迭代

PACC:0230

1. 引 言

非线性问题鸭解(Canard)理论被广泛应用于物理学、力学、生物和其他自然科学的许多研究领域,特别是当前在国际学术界备受关注. 例如近十几年来在电路、生化等方面已有很多研究成果被报道[1—10]. 非线性理论的各种定量和定性方法也大量涌现. 作者和其他一些学者利用微分不等式、同伦映射迭代、不动点原理等方法也已研究了一系列非线性问题[11—24]. 本文是利用变分迭代法研究了一类广义 Canard 扰动方程. 本方法的优点在于思路简明、计算简单,得到的近似解具有较高的精度. 并且它还有一个突出的优点,就是这样求得的解保留了相应的解析特性. 本方法还可适用于其他非线性问题,具有较广泛的研究前景.

近来对典型的 Canard 方程已有研究[8—10],但它代表的是各类相应自然现象的高度精简和浓缩. 因此从进一步深入研究来看,此方程已经不能满足当前科学发展的需要. 故有必要研究更能代表真实自然现象的广义 Canard 扰动方程. 本文工作就是在这样的研究背景下提出来的.

现讨论如下一类广义 Canard 系统:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}i} - a_1 y = f(x, y), \tag{1}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}i} + a_2 x = g(x, y), \tag{2}$$

其中 x, y 为状态变量,$a_i\ (i=1,2)$ 为正参数,非线性扰动项 f, g 为光滑的函数. 系统(1),(2)属于二阶自治 Lienard 系统. 我们将用广义变分迭代方法[25]来得到系统(1),(2)的近似解析解.

因为 Canard 系统(1),(2)是自治系统,所以系统(1),(2)可以改写为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{(-a_2 x + g(x, y))}{(a_1 y + f(x, y))}. \tag{3}$$

方程(3)的解曲线就是广义 Canard 系统(1),(2)在相平面的轨线. 其中闭轨就是系统的周期解,构成 Canard 解(鸭解).

2. 广义变分迭代

下面我们将用广义变分迭代方法来求得非线性系统(1),(2)的渐近解.

首先引入如下一组泛函 $F_i[x, y]\ (i=1,2)$:

$$F_1[x, y] = x - \int_0^t \lambda_1(\tau)\Big[\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - a_1\bar{y} - f(\bar{x}, \bar{y})\Big]\mathrm{d}\tau, \tag{4}$$

$$F_2[x, y] = y - \int_0^t \lambda_2(\tau)\Big[\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + a_2\bar{x} - g(\bar{x}, \bar{y})\Big]\mathrm{d}\tau, \tag{5}$$

其中 $\bar{x}, \bar{y}$ 分别为 x, y 的限制变量[25],$\lambda_i\ (i=1,2)$ 为

* 国家自然科学基金(批准号:40676016)、国家重点基础研究发展计划(批准号:2003CB415101-03,2004CB418304)、中国科学院知识创新工程方向性项目(批准号:KZCX3-SW-221)和上海市教育委员会 E-研究院建设计划项目(批准号:E03004)资助的课题.

† E-mail:mojiaqi@mail.ahnu.edu.cn

对应的 Lagrange 乘子.

泛函(4),(5)式的变分 $\delta F_i(i=1,2)$ 为

$$\delta F_1=\delta x-\lambda_1|_{\tau=x}\delta x+\int_0^t\Big[\frac{\mathrm{d}\lambda_1}{\mathrm{d}\tau}\Big]\delta x\mathrm{d}\tau,$$

$$\delta F_2=\delta y-\lambda_2|_{\tau=x}\delta y+\int_0^t\Big[\frac{\mathrm{d}\lambda_2}{\mathrm{d}\tau}\Big]\delta y\mathrm{d}\tau.$$

取 $\delta F_i=0(i=1,2,)$,可得

$$\frac{\mathrm{d}\lambda_i}{\mathrm{d}\tau}=0,\lambda_i|_{\tau=x}=1(i=1,2).$$

于是 $\lambda_1(\tau)=\lambda_2(\tau)=1$.因此由(4)式,我们构造如下广义变分迭代:

$$x_{n+1}=x_n-\int_0^t\Big[\frac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}t}-a_1y_n-f(x_n,y_n)\Big]\mathrm{d}\tau,\tag{6}$$

$$y_{n+1}=y_n-\int_0^t\Big[\frac{\mathrm{d}y_n}{\mathrm{d}t}+a_2x_n-g(x_n,y_n)\Big]\mathrm{d}\tau.\tag{7}$$

由迭代关系式(6),(7)可得到序列 $\{x_n(t)\}$,$\{y_n(t)\}$.只需要 f,g 在适当的假设条件(例如充分光滑和有界)下,可以证明级数 $\lim\limits_{n\to n}x_n$,$\lim\limits_{n\to n}y_n$ 一致收敛.设 $x(t)=\lim\limits_{n\to\infty}x_n(t)$,$y(t)=\lim\limits_{n\to\infty}y_n(t)$,再分别对(6),(7)式的两边取极限 $n\to\infty$,便可证明 $x=x(t)$,$y=y(t)$就是广义 Canard 系统(1),(2)的解.将 $x=x(t)$,$y=y(t)$消去自变量 t,得到的 $F(x,y)=0$ 便为非线性系统(1),(2)在相平面 o-xy 上的轨线.其中闭轨线就是原系统的鸭线.

3. 举 例

为了利用变分迭代关系式(6),(7)得到具体的 Canard 系统的近似解,不妨简单地设非线性扰动项 $f=0$,$g=-a\sin y$,其中 a 为正常数.这时 Canard 系统(1),(2)为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}i}-a_1y=0,\tag{8}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}i}+a_2x=-a\sin y.\tag{9}$$

首先取迭代关系式(6),(7)的初始迭代 $x_0(t)$,$y_0(t)$为满足如下线性系统的解:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}i}-a_1y_0=0,\tag{10}$$

$$\frac{\mathrm{d}y_0}{\mathrm{d}i}+a_2x_0=0.\tag{11}$$

由(10),(11)式得

$$x_0(t)=A\sin(\sqrt{a_1a_2}t+\phi),\tag{12}$$

$$y_0(t)=\sqrt{a_2/a_1}A\cos(\sqrt{a_1a_2}t+\phi),\tag{13}$$

其中 A,ϕ 为任意常数.

显然,由(12),(13)式得椭圆 $x_0^2+\frac{y_0^2}{a_2/a_1}==A^2$,它可视为 Canard 系统(8),(9)在相平面 o-xy 上系统相应闭轨线(鸭解)的零次近似.

由迭代式(6),(7),并考虑到 $f=0$,$g=-a\sin y$,可得

$$x_1=x_0,$$

$$y_1=y_0-a\int_0^t\sin y_0\mathrm{d}\tau.$$

再由(12),(13)式,有

$$x_1(t)=A\sin(\sqrt{a_1a_2}t+\phi),\tag{14}$$

$$y_1(t)=\sqrt{a_2/a_1}A\cos(\sqrt{a_1a_2}t+\phi)-a\int_0^t\sin[\sqrt{a_2/a_1}A\cos(\sqrt{a_1a_2}\tau+\phi)]\mathrm{d}\tau.\tag{15}$$

由(14),(15)式,视 t 为参变量,得到在相平面 o-xy 上的闭曲线,便为系统相应闭轨线(鸭解)的一次近似.

再由(6),(7)式得

$$x_2=x_1-\int_0^t\Big[\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}\tau}-a_1y_1\Big]\mathrm{d}\tau=x_0-a_1\int_0^t[y_0-y_1]\mathrm{d}\tau,$$

$$y_2=y_1-\int_0^t\Big[\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}\tau}+a_2x_1+a\sin y_1\Big]\mathrm{d}\tau.$$

即

$$x_2(t)=A\sin\sqrt{a_1a_2}t+\phi)-a\int_0^t\Big[\int_0^\tau[\sin[\sqrt{a_2/a_1}A\times\cos(\sqrt{a_1a_2}\tau_1+\phi)]\mathrm{d}\tau_1\Big]\mathrm{d}\tau,\tag{16}$$

$$\begin{aligned}y_2(t)=&\sqrt{a_2/a_1}A\cos(\sqrt{a_1a_2}t+\phi)\\&-a\int_0^t\sin[\sqrt{a_2/a_1}\cos(\sqrt{a_1a_2}\tau+\phi)]\mathrm{d}\tau\\&-\int_0^t[-a_2A\sin(\sqrt{a_1a_2}\tau+\phi)\\&+a_2A\sin(\sqrt{a_1a_2}\tau+\phi)\\&-a\int_0^\tau\sin[\sqrt{a_2/a_1}A\\&\times\cos(\sqrt{a_1a_2}\tau_1+\phi)]\mathrm{d}\tau_1]\mathrm{d}\tau.\end{aligned}\tag{17}$$

由(16)，(17)式，视 t 为参变量，得到在相平面 $o\text{-}xy$ 上的闭曲线,便为系统相应闭轨线(鸭解)的二次近似.

用同样的方法,能得到 Canard 系统(6)，(7)对应的闭轨线(鸭线)的更高次近似解析表示式.

4. 近似解的精度比较

为比较用上述广义变分迭代法求得的近似解的精度，我们来考虑系统(8)，(9)是微扰的情形. 设系统(8)，(9)中的常数 $a=\varepsilon$ 为正的小参数：$0<\varepsilon\ll 1$. 此时由一次迭代近似解(14)，(15)式分别为

$$x_1(t)=A\sin\sqrt{a_1a_2}\,t+\phi), \tag{18}$$

$$y_1(t)=\sqrt{a_2/a_1}A\cos(\sqrt{a_1a_2}\,t+\phi)-\varepsilon\int_0^t\sin[\sqrt{a_2/a_1}A\cos(\sqrt{a_1a_2}\,\tau+\phi)]\mathrm{d}\tau. \tag{19}$$

另一方面，因这时问题为微扰的情形，我们能用微扰理论来求出问题的渐近解. 对应于系统(8)，(9)，这时有

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}i}-a_1y=0,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}i}+a_2x=-\varepsilon\sin y, \tag{20}$$

设

$$x_{\mathrm{per}}=\bar{x}_0+\varepsilon\bar{x}_1+\varepsilon^2\bar{x}_2+\cdots\quad(0<\varepsilon\ll 1), \tag{21}$$

$$y_{\mathrm{per}}=\bar{y}_0+\varepsilon\bar{y}_1+\varepsilon^2\bar{y}_2+\cdots\quad(0<\varepsilon\ll 1). \tag{22}$$

将(21)，(22)式代入(20)式，按 ε 的幂展开非线性项，合并 ε 的同次幂项，并使方程两端 ε 的同次幂项的系数相等. 可依次得到

$$\frac{\mathrm{d}\bar{x}_0}{\mathrm{d}i}-a_1\bar{y}_0=0,\frac{\mathrm{d}\bar{y}_0}{\mathrm{d}i}+a_2\bar{x}_0=0, \tag{23}$$

$$\frac{\mathrm{d}\bar{x}_1}{\mathrm{d}i}-a_1\bar{y}_1=0,\frac{\mathrm{d}\bar{y}_1}{\mathrm{d}i}+a_2\bar{x}_1+\sin\bar{y}_0=0. \tag{24}$$

由系统(23)可得到$(\bar{x}_0,\bar{y}_0)$

$$\bar{x}_0(t)=A\sin(\sqrt{a_1a_2}\,t+\phi), \tag{25}$$

$$\bar{y}_0(t)=\sqrt{a_2/a_1}A\cos(\sqrt{a_1a_2}\,t+\phi), \tag{26}$$

其中 A,ϕ 为任意常数. 由系统(24)可得到零初始条件的解$(\bar{x}_1,\bar{y}_1)$

$$\bar{x}_1(t)=0, \tag{27}$$

$$\bar{y}_1(t)=-\int_0^t\sin[\sqrt{a_2/a_1}A\cos(\sqrt{a_1a_2}\,\tau+\phi)]\mathrm{d}\tau. \tag{28}$$

将上述的结果(25)—(28)式代入(21)，(22)式，便得到 Canard 微扰系统的摄动解$(x_{\mathrm{per}},y_{\mathrm{per}})$的一阶渐近展开式

$$x_{\mathrm{per}}(t)=A\sin\sqrt{a_1a_2}(t+\phi)+O(\varepsilon^2)\quad(0<\varepsilon\ll 1), \tag{29}$$

$$y_{\mathrm{per}}(t)=\sqrt{a_2/a_1}A\cos(\sqrt{a_1a_2}\,t+\phi)-\varepsilon\int_0^t\sin[\sqrt{a_2/a_1}A\cos(\sqrt{a_1a_2}\,\tau+\phi)]\mathrm{d}\tau+O(\varepsilon^2)\ (0<\varepsilon\ll 1). \tag{30}$$

比较两种方法计算出的近似解(18)与(29)式和(19)与(30)式，它们对应的主要部分完全相同. 因此，从这个侧面来说，由广义变分迭代法计算出来的近似解具有良好的近似度.

5. 结　　论

用广义变分迭代方法得到的解的收敛快慢，不仅取决于构造相应的泛函,另外关键还取决于初始近似的选取. 本文初始近似 $x_0(t)$，$y_0(t)$的选取是采用线性系统(10),(11)的解(12)，(13)式. 它保证了原扰动 Canard 系统较快地求得在要求的精度范围内近似的鸭解.

[1] Xu Y 1996 *Chin. Sci. Bull.* **41** 1478

[2] Morten B，Jeppe S 2001 *Phys. Rev.* E **64** 26209

[3] Francesco M，Gustau C，Pedro S，Salvador B，Oresle P 2004 *Phys. Rev. Lett.* **92** 7390

[4] Freddy D，Robert R 2001 *J. Diff. Eq.* **174** 1

[5] Makarov V A，Nekorkin V I，Uelarde M G 2001 *Phys. Rev. Lett.* **86** 3431

[6] Doedel E T，Freire F，Rodriciuez-Luis A T 2002 *J. Sound Vib.* **256** 755

[7] Yang X E，Gao H X，Li J S，Zheng J J，Yang Y Q 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 1346 (in Chinese)［杨新娥、高后秀、李京生、郑俊娟、杨渝钦 2001 物理学报 **50** 1346］

[8] Hou L J，Wang Y N 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 434 (in Chinese)［侯璐景、王友年 2003 物理学报 **52** 434］

[9] Xu Y，Zhang J X，Xu X，Zhou H 2007 *Chin. Phys.* **16** 2285

[10] Xu Y，Zhang J X，Xu X，Zhou H 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 4029

(in Chinese)[徐 云、张建峡、徐 霞、周 红 2008 物理学报 **57** 4029]

[11] Mo J Q 1989 *Sci*. *China Ser*. A **32** 1306

[12] Mo J Q, Lin W T 2006 *J*. *Sys*. *Sci*. *& Math*. *Sci*. **26** 737 (in Chinese)[莫嘉琪、林万涛 2006 系统科学与数学 **26** 737]

[13] Mo J Q, Wang H 2007 *Acta Ecologica Sin*. **27** 4366

[14] Mo J Q, Zhang W J, He M 2007 *Acta Phys*. *Sin*. **56** 1843 (in Chinese)[莫嘉琪、张伟江、何 铭 2007 物理学报 **56** 1843]

[15] Mo J Q, Zhang W J, Chen X F 2007 *Acta Phys*. *Sin*. **56** 6170 (in Chinese)[莫嘉琪、张伟江、陈贤峰 2007 物理学报 **56** 6170]

[16] Mo J Q, Zhang W J, He M 2006 *Acta Phys*. *Sin*. **55** 3233 (in Chinese)[莫嘉琪、张伟江、何 铭 2006 物理学报 **55** 3233]

[17] Mo J Q, Lin W T, Lin Y H 2007 *Acta Phys*. *Sin*. **56** 3127 (in Chinese)[莫嘉琪、林万涛、林一骅 2007 物理学报 **56** 3127]

[18] Mo J Q, Lin W T, Lin Y H 2008 *Acta Phys*. *Sin*. **57** 1297 (in Chinese)[莫嘉琪、林万涛、林一骅 2007 物理学报 **57** 1297]

[19] Mo J Q, Lin W T, Zhu J 2004 *Prog*. *Nat*. *Sci*. **14** 550

[20] Mo J Q, Lin W T, Wang H 2007 *Chin*. *Phys*. **16** 578

[21] Mo J Q, Lin W T, Wang H 2007 *Prog*. *Nat*. *Sci*. **17** 230

[22] Mo J Q, Lin W T, Wang H 2008 *Chin*. *Geographical Sci*. **18** 193

[23] Mo J Q, Lin W T 2008 *Chin*. *Phys*. **17** 370

[24] Mo J Q, Lin W T 2008 *Chin*. *Phys*. **17** 743

[25] He J H 2002 *Approximate Analytical Methods in Engineering and Sciences* (Zhengzhou: Henan Science and Technology Press) (in Chinese)[何吉欢 2002 工程和科学中的近似分析方法(郑州:河南科学技术出版社)]

Approximate analytic solution to a class of generalized Canard systems*

Mo Jia-Qi[1)2)†]

1)(*Department of Mathemtics*, *Anhui Normal University*, *Wuhu* 241000, *China*)

2)(*Division of Computational Science*, *E-Institutes of Shanghai Universities at Shanghai Jiaotong University*, *Shanghai* 200240, *China*)

(Received 28 July 2008; revised manuscript received 14 August 2008)

Abstract

Using the variational iteration theory, we obtain the approximations to the solution of the generalized Canard systems. Firstly, a set of functional is introduced. Then the iteration expressions of solving the original equation are constructed. Finally, the analytic expressions of the Canard solution are obtained.

Keywords: Canard solution, analytic solution, variational iteration

PACC: 0230

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 40676016), the State Key Development Program for Basic Research of China (Grant Nos. 2003CB415101-03 and 2004CB418304), the Chinese Academy of Sciences for Key Topics in Innovation Engineering (Grant No. KZCX3-SW-221) and in part by E-Institutes of Shanghai Municipal Education Commission, China (Grant No. E03004).

† E-mail: mojiaqi@mail.ahnu.edu.cn