第 58 卷 第 2 期 2009 年 2 月
1000-3290/2009/58(02)/0699-04

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.58,No.2,February,2009

广义 Birkhoff 系统的时间积分定理*

葛伟宽[1)†] 梅凤翔[2)]

1)(湖州师范学院物理系,湖州 313000)

2)(北京理工大学力学系,北京 100081)

(2008 年 7 月 6 日收到;2008 年 8 月 13 日收到修改稿)

研究了广义 Birkhoff 系统的时间积分定理.给出系统的时间积分等式,并由此等式导出类能量方程、类维里定理、一个积分变分原理和一个微分变分原理.

关键词:广义 Birkhoff 系统,时间积分定理,类能量方程,变分原理

PACC:0320

1. 引 言

时间积分定理是分析力学中的重要定理.这些定理不仅是理论工具,而且用于构造近似解析解时显得十分方便[1].专著[2]用较大篇幅论述了完整和非完整系统的时间积分定理及其应用.文献[3]研究了变质量非完整系统的时间积分定理.文献[4]研究了 Birkhoff 系统的时间积分定理.对 Birkhoff 系统的研究已取得重要进展[5—22].文献[23]给出了广义 Birkhoff 方程.由广义 Birkhoff 方程描述的系统称为广义 Birkhoff 系统.本文研究广义 Birkhoff 系统的时间积分定理,给出广义 Birkhoff 系统的时间积分等式,并由此导出一些方程、定理和原理.

2. 广义 Birkhoff 系统的时间积分等式

广义 Birkhoff 方程有如下形式[23]:

$$\left(\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu}-\frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu}\right)\dot a^\nu-\frac{\partial B}{\partial a^\mu}-\frac{\partial R_\mu}{\partial t}+\Lambda_\mu=0$$
$$(\mu,\nu=1,2,\cdots,2n),\tag{1}$$

其中 $B=B(t,\boldsymbol{a})$ 为 Birkhoff 函数,$R_\mu=R_\mu(t,\boldsymbol{a})$ 为 Birkhoff 函数组.$\Lambda_\mu=\Lambda_\mu(t,\boldsymbol{a})$ 为附加项.当 $\Lambda_\mu=0$ $(\mu=1,2,\cdots,2n)$ 时,方程(1)成为 Birkhoff 方程

$$\left(\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu}-\frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu}\right)\dot a^\nu-\frac{\partial B}{\partial a^\mu}-\frac{\partial R_\mu}{\partial t}=0$$
$$(\mu,\nu=1,2,\cdots,2n).\tag{2}$$

将方程(1)两端乘以任意函数 Z_μ 并对 μ 求和,得

$$\left\{\left(\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu}-\frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu}\right)\dot a^\nu-\frac{\partial B}{\partial a^\mu}-\frac{\partial R_\mu}{\partial t}+\Lambda_\mu\right\}Z_\mu=0.\tag{3}$$

将其在任意两个瞬时 t_0 和 t_1 之间积分,得

$$\int_{t_0}^{t_1}\left\{\left(\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu}-\frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu}\right)\dot a^\nu-\frac{\partial B}{\partial a^\mu}-\frac{\partial R_\mu}{\partial t}+\Lambda_\mu\right\}Z_\mu\mathrm{d}t=0.\tag{4}$$

(4)式被称为广义 Birkhoff 系统的时间积分等式.

适当选取任意函数 Z_μ,可得到广义 Birkhoff 系统动力学的一些有用结果.

3. 类功率方程

取

$$Z_\mu=\dot a^\mu(\mu=1,2,\cdots,2n),\tag{5}$$

(4)式给出

$$\int_{t_0}^{t_1}\left\{\left(\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu}-\frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu}\right)\dot a^\nu\dot a^\mu-\frac{\partial B}{\partial a^\mu}\dot a^\mu-\frac{\partial R_\mu}{\partial t}\dot a^\mu+\Lambda_\mu\dot a^\mu\right\}\mathrm{d}t=0.\tag{6}$$

---

* 国家自然科学基金(批准号:10572021)资助的课题.

† E-mail:gwk@hutc.zj.cn

由于

$$\left(\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu}-\frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu}\right)\dot{a}^\nu\dot{a}^\mu=0,\tag{7}$$

以及积分区间 $[t_0,t_1]$ 的任意性,由(6)式得到

$$-\frac{\partial B}{\partial a^\mu}\dot{a}^\mu-\frac{\partial R_\mu}{\partial t}\dot{a}^\mu+\Lambda_\mu\dot{a}^\mu=0.\tag{8}$$

(8)式可改写为

$$\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial B}{\partial t}-\frac{\partial R_\mu}{\partial t}\dot{a}^\mu+\Lambda_\mu\dot{a}^\mu.\tag{9}$$

因为 Birkhoff 函数通常代表能量,故称(9)式为类功率方程.由(9)式可得到如下命题和推论.

命题 1 如果动力学函数 B,R_μ 和 Λ_μ 满足条件

$$\frac{\partial B}{\partial t}-\frac{\partial R_\mu}{\partial t}\dot{a}^\mu+\Lambda_\mu\dot{a}^\mu=0,\tag{10}$$

则 Birkhoff 函数 B 为系统的积分.

推论 1 对自治广义 Birkhoff 系统,如果附加项 Λ_μ 满足条件

$$\Lambda_\mu\dot{a}^\mu=0,\tag{11}$$

则 Birkhoff 函数 $B=B(\boldsymbol{a})$ 是系统的积分.

推论 2 对 Birkhoff 系统,如果函数 B,R_μ 满足条件

$$\frac{\partial B}{\partial t}-\frac{\partial R_\mu}{\partial t}\dot{a}^\mu=0,\tag{12}$$

则 Birkhoff 函数 B 是 Birkhoff 系统的积分.

推论 2 已由文献[4]给出.

例 1 二阶广义 Birkhoff 系统为

$$\begin{aligned}R_1&=\frac{1}{2}ta^2,\\R_2&=-\frac{1}{2}ta^1,\\B&=\frac{1}{2}(a^1)^2+\frac{1}{2}(a^2)^2,\\\Lambda_1&=\frac{1}{2}a^2,\\\Lambda_2&=-\frac{1}{2}a^1.\end{aligned}\tag{13}$$

此系统满足(10)式,由命题 1 知,有积分

$$\frac{1}{2}(a^1)^2+\frac{1}{2}(a^2)^2=\mathrm{const}.\tag{14}$$

4. 类维里定理

取

$$Z_\mu=a^\mu,\tag{15}$$

则时间积分等式(4)给出

$$\int_{t_0}^{t_1}\left\{\left(\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu}-\frac{\partial R_\mu}{\partial a_\nu}\right)\dot{a}^\nu a^\mu-\frac{\partial B}{\partial a^\mu}a^\mu-\frac{\partial R_\mu}{\partial t}a^\mu+\Lambda_\mu a^\mu\right\}\mathrm{d}t=0.\tag{16}$$

称(16)式为类维里(Virial)定理.

例 2 Van der Pol 方程为

$$\ddot{q}+\varepsilon(1-q^2)\dot{q}+q=0.\tag{17}$$

利用类维里定理(16),可求得振子(17)的渐近振幅.令

$$a^1=q,a^2=\dot{q},$$

则方程(17)可表为

$$\dot{a}^1=a^2,\dot{a}^2=-a^1-\varepsilon\left[1-(a^1)^2\right]a^2.$$

化为广义 Birkhoff 系统,有

$$\begin{aligned}&R_1=a^2,R_2=0,\\&B=\frac{1}{2}(a^1)^2+\frac{1}{2}(a^2)^2,\\&\Lambda_1=-\varepsilon[1-(a^1)^2]a^2,\Lambda_2=0.\end{aligned}\tag{18}$$

当 $\varepsilon=0$ 时,方程(17)的解是频率 $\omega=1$,振幅和相位依赖于初值的谐和解.因此,对 $\varepsilon\neq0$,可试渐近谐和解有形式

$$a^1=C\sin\chi,a^2=C\omega\cos\chi,\chi=\omega t,\tag{19}$$

其中振幅 C 和频率 ω 待定.类维里定理(16)给出

$$\int_0^{2\pi/\omega}\{-\dot{a}^2-a^1-\varepsilon[1-(a^1)^2]a^2\}a^1\mathrm{d}t+\int_0^{2\pi/\omega}(\dot{a}^1-a^2)a^2\mathrm{d}t=0,\tag{20}$$

这里对时间积分取 $t_0=0$,$t_1=\frac{2\pi}{\omega}$.将(19)式代入(20)式,注意到

$$\dot{a}^1=a^2,$$

$$\int_0^{2\pi/\omega}\dot{a}^2a^1\mathrm{d}t=-C^2\omega^2\int_0^{2\pi/\omega}\sin^2\omega t\mathrm{d}t=-C^2\omega^2\frac{\pi}{\omega},$$

$$\int_0^{2\pi/\omega}(a^1)^2\mathrm{d}t=C^2\frac{\pi}{\omega},$$

$$\int_0^{2\pi/\omega}a^1a^2\mathrm{d}t=0,$$

$$\int_0^{2\pi/\omega}a^2(a^1)^3\mathrm{d}t=0,$$

则有 $C^2(\omega^2-1)\frac{\pi}{\omega}=0$,

由此得 $\omega=1$. (21)

5. 积分变分原理和微分变分原理

取

$$Z_\mu = \delta a^\mu, \tag{22}$$

此时(4)式给出

$$\int_{t_0}^{t_1}\left\{\left(\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu}-\frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu}\right)\dot{a}^\nu-\frac{\partial B}{\partial a^\mu}-\frac{\partial R_\mu}{\partial t}+\Lambda_\mu\right\}\delta a^\mu \mathrm{d}t = 0. \tag{23}$$

注意到

$$\mathrm{d}\delta a^\mu = \delta \mathrm{d} a^\mu, \quad \delta a^\mu\big|_{t=t_0} = \delta a^\mu\big|_{t=t_1} = 0. \tag{24}$$

则(23)式可表示为

$$\int_{t_0}^{t_1}\{\delta(R_\nu \dot{a}^\nu - B) + \delta' W\}\mathrm{d}t = 0, \tag{25}$$

其中　$\delta' W = \Lambda_\mu \delta a^\mu$. (26)

称(25)式为广义 Pfaff-Birkhoff 原理[24]. 于是有

命题 2　由广义 Birkhoff 系统的时间积分等式(4)可导出广义 Pfaff-Birkhoff 原理.

由(23)式中积分区间的任意性,可得到如下微分变分原理:

$$\left\{\left(\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu}-\frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu}\right)\dot{a}^\nu-\frac{\partial B}{\partial a^\mu}-\frac{\partial R_\mu}{\partial t}+\Lambda_\mu\right\}\delta a^\mu = 0. \tag{27}$$

称(27)式为广义 Pfaff-Birkhoff-d′Alembert 原理. 于是有

命题 3　由广义 Birkhoff 系统的时间积分等式(4)可导出广义 Pfaff-Birkhoff-d′Alembert 原理.

6. 结　论

由广义 Birkhoff 系统的时间积分等式(4)出发导出了系统的类功率方程(9),类维里定理(16),广义 Pfaff-Birkhoff 原理(25)以及广义 Pfaff-Birkhoff-d′Alembert 原理(27),使得广义 Birkhoff 系统动力学可以建立在它的时间积分等式上. 同时,时间积分等式也有许多应用,如例 2 指出的.

[1] Papastavridis J G 1987 *Int. J. Eng. Sci.* **25** 833

[2] Papastavridis J G 2002 *Analytical Mechanics* (New York: Oxford University Press)

[3] Mei F X 1989 *Proc. ICAM* 102

[4] Ge W K, Mei F X 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 2479 (in Chinese) [葛伟宽、梅凤翔 2007 物理学报 **56** 2479]

[5] Zhang H B 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 1837 (in Chinese) [张宏彬 2001 物理学报 **50** 1837]

[6] Zhang R C, Chen X W, Mei F X 2001 *Chin. Phys.* **10** 12

[7] Luo S K, Chen X W, Guo Y X 2002 *Chin. Phys.* **11** 429

[8] Zhang Y 2002 *Chin. Phys.* **11** 437

[9] Fu J L, Chen L Q, Xue Y 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 256 (in Chinese) [傅景礼、陈立群、薛　纭 2003 物理学报 **52** 256]

[10] Chen X W 2003 *Chin. Phys.* **12** 586

[11] Xu X J, Mei F X, Qin M C 2004 *Chin. Phys.* **13** 1999

[12] Gu S L, Zhang H B 2004 *Chin. Phys.* **13** 979

[13] Zhang Y, Fan C X, Ge W K 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 3644 (in Chinese) [张　毅、范存新、葛伟宽 2004 物理学报 **53** 3644]

[14] Xu Z X 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 4971 (in Chinese) [许志新 2005 物理学报 **54** 4971]

[15] Mei F X, Gang T Q, Xie J F 2006 *Chin. Phys.* **15** 1678

[16] Shang M, Guo Y X, Mei F X 2007 *Chin. Phys.* **16** 292

[17] Zhang H B, Chen L Q, Gu S L, Liu C Z 2007 *Chin. Phys.* **16** 582

[18] Zheng S W, Jia L Q 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 5590 (in Chinese) [郑世旺、贾利群 2006 物理学报 **55** 5590]

[19] Zhang P Y, Fang J H 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3813 (in Chinese) [张鹏云、方建会 2006 物理学报 **55** 3813]

[20] Mei F X, Wu H B, Shang M, Zhang Y F 2006 *Chin. Phys.* **15** 1932

[21] Qiao Y F, Zhao S H, Li R J 2006 *Chin. Phys.* **15** 2777

[22] Hu C L, Xie J F 2008 *Chin. Phys.* **17** 1153

[23] Mei F X 1993 *Sci. China* (*Ser.* A) **36** 1456

[24] Mei F X, Zhang Y F, He G, Gang T Q, Xie J F 2007 *Journal of Beijing Institute of Technology* **27** 1035 (in Chinese) [梅凤翔、张永发、何　光、　铁强、解加芳 2007 北京理工大学学报 **27** 1035]

Time-integral theorems for generalized Birkhoff system*

Ge Wei-Kuan[1)†] Mei Feng-Xiang[2)]
1)(Department of Physics, Huzhou Teachers College, Huzhou 313000, China)
2)(Department of Mechanics, Beijing Institutes of Technology, Beijing 100081, China)
(Received 6 July 2008; revised manuscript received 13 August 2008)

Abstract

The purpose of this paper is to study the time-integral theorems for a generalized Birkhoff system. A time-integral identity of the system is presented. A power-like equation, a Virial-like theorem, an integral variational principle and a differential variational principle for the system are deduced by using the time-integral identity.

Keywords: generalized Birkhoff system, time-integral theorem, power-like equation, variational principle
PACC: 0320

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10572021).
† E-mail: gwk@hutc.zj.cn