

黏性水波振荡型行波解的存在性*

张 亮^{1)†} 张立凤¹⁾ 吴海燕³⁾ 王骥鹏⁴⁾

1) 解放军理工大学气象学院应用地球物理研究室, 南京 211101)

2) 96165 部队, 乐平 333300)

3) 94855 部队, 衢州 324001)

4) 总参气象水文局, 北京 100081)

(2008 年 5 月 23 日收到, 2008 年 7 月 12 日收到修改稿)

利用追赶法技巧, 研究了倾度为常数的宽矩形通道中黏性水波振荡型行波解的存在性, 证明了当黏性系数、摩擦系数、倾度和高度比满足一定关系时, 存在唯一的振荡型行波解. 由于解析求解的困难, 通过数值计算, 给出了部分结果, 最后进一步讨论了可能存在的振荡型行波解的结构.

关键词: 追赶法, 黏性水波, 振荡型行波解

PACC: 0340G, 0340K, 9210F

1. 引 言

研究偏微分方程的行波解是物理学、化学、气象学、生物学等领域中的一个重要研究课题. 最早的偏微分方程行波解的研究可追溯到 1906 年 Luther 的一个关于反应扩散方程的报告, Fisher 和 Kolmogorov 在 1937 年分别发表了描述一维空间中人口优势基因的时空分布文章. 自此以后, 很多专家和学者对反应扩散方程的行波解进行了更深入、细致的研究, 也发展了很多方法, 例如摄动方法^[1-10]、追赶法^[11-18]、上下解方法^[19]、Conley 指标法^[20-23]、拓扑法^[24]、Hopf 分支理论^[25]和中心流形定理^[26]等方法. 近年来, 人们又发现了求解偏微分方程孤立波的精确解方法^[27-36].

文献 [16] 应用追赶法技巧, 研究了倾度为常数的宽矩形通道中黏性水波单调行波解的存在性. 但直到现在为止, 还没有发现对其振荡型行波解研究的文章. 本文同样应用追赶法, 证明了当黏性系数、摩擦系数、倾度和高度比满足一定关系时, 宽矩形通道中的黏性水波存在唯一的振荡型行波解. 为了保持本文符号与文献 [16] 中的一致性, 我们仍采用文献 [16] 中的符号来描述黏性水波的运动方程.

2. 数学模型

在水力学理论中, 倾度 α 为常数的宽矩形通道中的水波满足如下运动方程^[16, 37]:

$$h_t + (hV)_x = 0, \quad (1)$$

其中, $V(t, x)$ 为水流在垂直于河床的 y 方向的平均速度, 其加速度忽略不计, $h(t, x)$ 为水流高度, $g^* = g \cos \alpha$, $s = \tan \alpha$ 是斜率, c_f 是底部摩擦系数, 假设 g^* , α 和 c_f 均为正常数.

为了寻找方程 (1) 的行波解, 可令

$$h = h(X), V = V(X), X = x - Ut, \quad (2)$$

其中 U 为常数, 若记 B 为积分常数, 则方程 (1) 可化为

$$(V - U) \frac{dV}{dX} + g^* \frac{dh}{dX} = g^* s - \frac{c_f}{h} V^2, \quad (3)$$

$$h(U - V) = B. \quad (4)$$

假设 $h_2 > h_1$, 且 (3) (4) 式在 $X = \pm \infty$ 处满足齐次边界条件

$$g^* s - \frac{c_f}{h_1} V_1^2 = g^* s - \frac{c_f}{h_2} V_2^2 = 0, \quad (5)$$

$$h_1(U - V_1) = h_2(U - V_2) = B, \quad (6)$$

则以下关系成立:

* 国家重点基础研究发展计划 (批准号: 2007CB411800, 2004CB418304) 资助的课题.

† E-mail: zl_0617@163.com

$$\begin{aligned}
 V_1 &= \sqrt{\frac{g^* s h_1}{c_f}}, \\
 V_2 &= \sqrt{\frac{g^* s h_2}{c_f}}, \\
 B &= \frac{V_2 - V_1}{h_2 - h_1} \cdot h_1 h_2 \\
 &= \sqrt{\frac{g^* s}{c_f}} \cdot \frac{h_1 h_2}{\sqrt{h_1} + \sqrt{h_2}}, \\
 U &= \frac{h_2 V_2 - h_1 V_1}{h_2 - h_1} \\
 &= \sqrt{\frac{g^* s}{c_f}} \cdot \frac{h_2^{3/2} - h_1^{3/2}}{h_2 - h_1}. \quad (7)
 \end{aligned}$$

由(3)(4)式中消去 V 可得

$$\frac{dh}{dX} = g^* s \frac{(h - h_1)(h - h_2)(h - H)}{g^* h^3 - B^2}, \quad (8)$$

其中 $H = \frac{h_1 h_2}{(\sqrt{h_1} + \sqrt{h_2})^2}$. 记 $\Delta(h) = g^* h^3 - B^2$, 若

$\Delta(h_1) \cdot \Delta(h_2) < 0$, 则(8)式的解将会出现不连续现象. 为了使(8)式的解连续, 文献[16]在方程(1)中引入了黏性项, 即

$$h_t + (hV)_x = 0,$$

$$V_t + VV_x + g^* h_x = g^* s - c_f V^2/h + \mu V_{xx}, \quad (9)$$

其中 μ 为黏性系数, 并假设它为正常数.

将方程组(2)代入方程组(9)并消去 h , 可得

$$\frac{d^2 V}{dX^2} - \frac{\alpha(V)}{\mu} \frac{dV}{dX} + \frac{F_0(V)}{\mu B} = 0, \quad (10)$$

其中 $\alpha(V) = (V - U) + g^* B(V - U)^2$, $F_0(V) = g^* sB - c_f V^2(U - V)$. (10)式可表示为如下一阶常微分方程组:

$$\frac{dV}{dX} = P, \quad \frac{dP}{dX} = \frac{1}{\mu} \alpha(V)P - \frac{1}{\mu B} F_0(V). \quad (11)$$

下面简单讨论函数 $\alpha(V)$ 和 $F_0(V)$ 的性质.

因为 $G'(V) = 1 - 2g^* B(V - U)^2 = 1 + 2g^* B(U - V)^2 > 1$, 所以 $\alpha(V)$ 是关于 V 的严格单调递增函数.

由于 $F_0(V) = g^* sB - \frac{c_f B}{h} V^2 = \frac{B}{h^3} (g^* s h^3 - c_f V^2 h^2) = \frac{g^* s B}{h^3} (h - h_1)(h - h_2)(h - H)$, 故当 $h = h_1$ 即 $V = V_1$ 时, 有 $F_0(V_1) = 0$, 同理有 $F_0(V_2) = 0$. 设 $V_3 = -V_0$ 为 $h = H$ 时对应的值, 则利用根与系数的关系, 可得 $V_1 + V_2 + V_3 = U$, 即 $V_0 = V_1 + V_2 - U$.

又因为 $V_0 = V_1 + V_2 - U = (V_1 + V_2) -$

$\frac{V_2 h_2 - V_1 h_1}{h_2 - h_1} = \sqrt{\frac{g^* s}{c_f}} \frac{\sqrt{h_1 h_2}}{\sqrt{h_2 - h_1}} > 0$, 故 $F_0(V)$ 可表

示为 $F_0(V) = c_f (V - V_1)(V - V_2)(V + V_0)$.

为了简化方程(11), 可令 $W = (V - V_1)/(V_2 - V_1)$, $Q = P/(V_2 - V_1)$, 则 $W \in [0, 1]$, 且 $W(-\infty) = 1$, $W(+\infty) = 0$.

若再记 $r = \frac{V_1 + V_0}{V_2 - V_1} > 0$, $D = \frac{g^* B}{(V_2 - V_1)^3}$, $c^* = \frac{U - V_1}{V_2 - V_1} > 1$, $m = \frac{V_2 - V_1}{\mu}$, $k = \frac{c_f}{B} (V_2 - V_1) > 0$,

$g(W) = (W - c^*) + \frac{D}{(W - c^*)^3}$, $f(W) = kW(W - 1)(W + r)$, 则方程(11)可转化为

$$\frac{dW}{dX} = Q, \quad (12)$$

$$\frac{dQ}{dX} = mg(W)Q - mf(W).$$

可知方程(12)有两个平衡点 $O(0, 0)$ 和 $Z(1, 0)$, 且(12)式的 Jacobi 矩阵可表示为

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ mg'(W)Q - mf'(W) & mg(W) \end{pmatrix}.$$

在 $O(0, 0)$ 点, 我们得到如下的切线性方程:

$$\frac{dW}{dX} = Q, \quad (13)$$

$$\frac{dQ}{dX} = mkrW + mg(0)Q,$$

其特征值为 $\lambda_1^{\pm} = \frac{1}{2} [mg(0) \pm \sqrt{m^2 g^2(0) + 4mkr}]$.

显然, 不论 $g(0) \geq 0$ 还是 $g(0) < 0$, $O(0, 0)$ 都是方程(13)的鞍点, 也是方程(12)的鞍点.

在 $Z(1, 0)$ 点的切线性方程为

$$\frac{dW}{dX} = Q,$$

$$\frac{dQ}{dX} = -mk(1 + r)(W - 1) + mg(1)Q, \quad (14)$$

其特征值为

$$\lambda_2^{\pm} = \frac{1}{2} [mg(1) \pm \sqrt{m^2 g^2(1) - 4mk(1 + r)}].$$

记 $m_0 = 4k(1 + r)g^2(1)$, 则 $Z(1, 0)$ 点的性质可分析如下:

1) 当 $g(1) > 0$, $m \geq m_0$ 时, $Z(1, 0)$ 是不稳定结点;

2) 当 $g(1) > 0$, $m < m_0$ 时, $Z(1, 0)$ 是不稳定焦点;

3) 当 $g(1) = 0$ 时, $Z(1, 0)$ 是方程(14)的中心,

但它不一定是方程 (12) 的中心^[38];

4) 当 $g(1) < 0, m \geq m_0$ 时, $Z(1, 0)$ 是稳定结点;

5) 当 $g(1) < 0, m < m_0$ 时, $Z(1, 0)$ 是稳定焦点.

显然对于最后两种情形的研究是没有意义的, 也就是说在我们的现实生活中, 若水只受重力作用, 则不会出现“水往高处流”的现象. 文献 [16] 讨论的是第一种情形, 即 $O(0, 0)$ 是鞍点, $Z(1, 0)$ 是不稳定结点的情况. 本文将要讨论的是第二种情形, 即 $O(0, 0)$ 是鞍点, $Z(1, 0)$ 是不稳定焦点的情况. 对于第三种情形的研究, 将是我们下一步的工作.

引入变量 $\tau = h_2/h_1 > 1, \lambda^2 = s/c_f, \eta = k/m$, 则有

$$c^* = \frac{U - V_1}{V_2 - V_1} = \frac{\tau}{\tau - 1},$$

$$D = \frac{g^* B}{(V_2 - V_1)^2} = \frac{\tau}{\lambda^2(\tau - 1)(\sqrt{\tau} - 1)^2},$$

$$r = \frac{V_1 + V_0}{V_2 - V_1} = \frac{2\sqrt{\tau} + 1}{\tau - 1},$$

$$g(0) = -c^* + \frac{D}{c^{*2}} = \frac{(\sqrt{\tau} + 1)^2 - \lambda^2 \tau^2}{\lambda^2 \tau (\tau - 1)},$$

$$g(1) = (1 - c^*) + \frac{D}{(1 - c^*)^2} = \frac{\tau(\sqrt{\tau} + 1)^2 - \lambda^2}{\lambda^2(\tau - 1)},$$

$$k = \frac{c_f}{B}(V_2 - V_1) = \frac{c_f}{h_2}(\tau - 1),$$

$$m = \frac{V_2 - V_1}{\mu} = \frac{B}{\mu h_2}(\tau - 1),$$

$$\eta = \frac{\mu c_f}{B}.$$

令 $\xi = -X$, 则 $W(-\infty) = 0, W(+\infty) = 1$, 且方程 (12) 变为

$$\begin{aligned} \frac{dW}{d\xi} &= -Q, \\ \frac{dQ}{d\xi} &= -mg(W)Q + m_f(W). \end{aligned} \tag{15}$$

方程 (15) 的 Jacobi 矩阵为

$$J_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -mg'(W)Q + m_f'(W) & -mg(W) \end{pmatrix}.$$

在 $O(0, 0)$ 点的切线性方程为

$$\frac{dW}{d\xi} = -Q,$$

$$\frac{dQ}{d\xi} = -mkrW - mg(0)Q, \tag{16}$$

其特征值为

$$\lambda_3^\pm = \frac{1}{2}[-mg(0) \pm \sqrt{m^2 g^2(0) + 4mkr}].$$

所以 $O(0, 0)$ 点是方程 (15) 的鞍点, 对应于 λ_3^+ 的特征向量为 $(1, -\lambda_3^+)$, 对应于 λ_3^- 的特征向量为 $(1, -\lambda_3^-)$.

在 $Z(1, 0)$ 点的切线性方程为

$$\begin{aligned} \frac{dW}{d\xi} &= -Q, \\ \frac{dQ}{d\xi} &= mk(1+r)(W-1) - mg(1)Q, \end{aligned} \tag{17}$$

其特征值为

$$\lambda_4^\pm = \frac{1}{2}[-mg(1) \pm \sqrt{m^2 g^2(1) - 4mk(1+r)}].$$

显然, 当 $g(1) > 0, m < m_0$ 时, $Z(1, 0)$ 点是 (15) 的稳定焦点.

3. 振荡型行波解的存在性

在给出单调行波解的存在性定理前, 先给出如下两个引理.

引理 1 过 $O(0, 0)$ 点在第四象限的轨线 $Q_m(W)$ 关于 m 是严格单调递减的, 即当 $m_1 < m_2$ 时, 有 $Q_{m_1}(W) > Q_{m_2}(W)$.

该引理的证明过程见文献 [16].

引理 2 $Z(1, 0)$ 点附近的轨线 $Q_m(W)$ 是渐近稳定的, 且轨线的螺旋方向是逆时针的.

证明 令 $A = W - 1, B = Q, \tan \theta = \frac{B}{A}$, 则 $Z(1, 0)$ 点的切线性方程为

$$\begin{aligned} \frac{dA}{d\xi} &= -B, \\ \frac{dB}{d\xi} &= mk(1+r)A - mg(1)B. \end{aligned}$$

$$\text{记 } V(A, B) = \frac{1}{2}[mk(1+r)A^2 + B^2 - 2\beta AB] + 1,$$

其中

$$0 < \beta < \min\left(\frac{4mk(1+r)g(1)}{4k(1+r) + mg^2(1)}, \sqrt{mk(1+r)}\right).$$

由于 $0 < \beta < \sqrt{mk(1+r)}$, 故对任意的 A, B , 有 $V(A, B) > 0$,

$$\frac{dV}{d\xi} = mk(1+r)A \frac{dA}{d\xi} + B \frac{dB}{d\xi}$$

$$\begin{aligned}
 & -\beta B \frac{dA}{d\xi} - \beta A \frac{dB}{d\xi} \\
 & = mk(1+r)A \cdot (-B) \\
 & \quad + B \cdot [mk(1+r)A - mg(1)B] + \beta B^2 \\
 & \quad - \beta A [mk(1+r)A - mg(1)B] \\
 & = -mg(1)B^2 + \beta B^2 - \beta mk(1+r)A^2 \\
 & \quad + \beta mg(1)AB \\
 & = -(mg(1) - \beta) \cdot \left[B - \frac{\beta mg(1)}{2(mg(1) - \beta)} A \right]^2 \\
 & \quad - \beta A^2 m \left[k(1+r) - \frac{\beta mg^2(1)}{4(mg(1) - \beta)} \right].
 \end{aligned}$$

因为 $\beta < \frac{4mk(1+r)g(1)}{4k(1+r) + mg^2(1)} < mg(1)$, 所以 $mg(1) - \beta > 0$, 且 $k(1+r) - \frac{\beta mg^2(1)}{4(mg(1) - \beta)} > 0$, 故 $\frac{dV}{d\xi} < 0$, 即轨线 $Q_m(W)$ 在 $Z(1,0)$ 点附近是渐近稳定的.

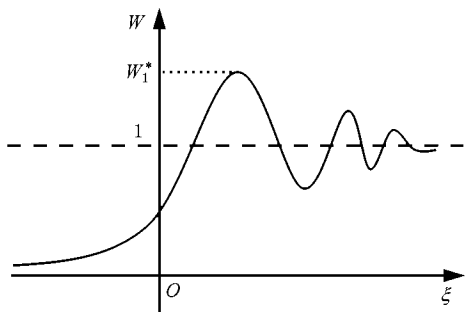


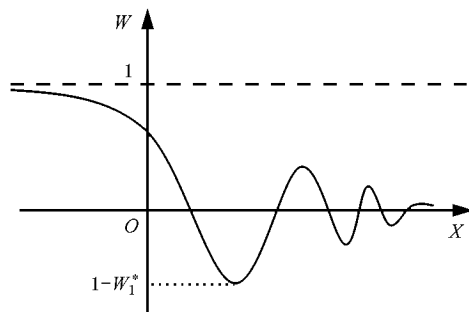
图1 方程(15)振荡型行波解示意图

又由于 $\tan \theta = \frac{B}{A}$ 所以有

$$\begin{aligned}
 \sec^2 \theta \cdot \frac{d\theta}{d\xi} & = \frac{1}{A^2} \left(A \frac{dB}{d\xi} - B \frac{dA}{d\xi} \right) \\
 & = \frac{1}{A^2} [A(mk(1+r)A - mg(1)B) + B^2] \\
 & = \frac{1}{A^2} \left[mk(1+r) \left(A - \frac{mg(1)}{2mk(1+r)} B \right)^2 \right. \\
 & \quad \left. + B^2 - \frac{m^2 g^2(1)}{4mk(1+r)} B^2 \right],
 \end{aligned}$$

由 $m < m_0$ 知 $\frac{d\theta}{d\xi} > 0$, 即轨线 $Q_m(W)$ 在 $Z(1,0)$ 点附近的螺旋方向是逆时针的. 引理证毕.

定理 当 $g(1) > 0, 1/g(1) < m < m_0$ 时, 方程(15)存在唯一的振荡型行波解, 如图1所示.



证明 我们应用追赶法来证明此定理, 分为以下四步.

第一步 以 $O(0,0)$ 点为圆心, 足够小的正数 ϵ_1 为半径作圆, 交第四象限的区域记为 $O_{\epsilon_1} = \{(W, Q_m(W)) | W^2 + Q_m^2(W) \leq \epsilon_1, W > 0, Q_m(W) < 0\}$, 如图2所示. 可证明在区域 O_{ϵ_1} 内, W 严格单调递增, 且 $Q_m(W)$ 严格单调递减.

因为 ϵ_1 足够小, 所以轨线 $Q_m(W)$ 在第四象限从 $O(0,0)$ 点沿特征方向 $(1, -\lambda_3^+)$ 出发后, 在 $W \in (0, \epsilon_1)$ 时, 方程(16)与(15)的轨线一致, 所以有 $dW/d\xi = -Q_m(W) > 0$, 即 W 严格单调递增.

$$\begin{aligned}
 \frac{dQ_m(W)}{dW} & = mg(0) + \frac{mkrW}{Q_m(W)} \Big|_{Q_m(W) = -\lambda_3^+ W} \\
 & = mg(0) + \frac{-mkr}{\lambda_3^+} + \lambda_3^+ - \lambda_3^+ \\
 & = -\lambda_3^+ < 0.
 \end{aligned}$$

故在 O_{ϵ_1} 内, $Q_m(W)$ 严格单调递减.

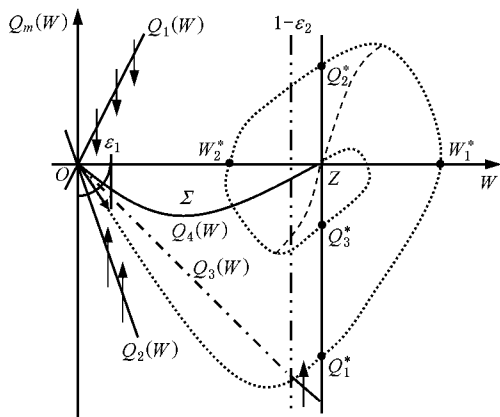


图2 方程(15)相平面轨线

第二步 过 $O(0,0)$ 点, 作三条直线 $Q_1(W) = L_1 W, Q_2(W) = L_2 W, Q_3(W) = -W$ 和一条曲线 $Q_4(W) = \frac{f(W)}{m_0}$, 其中 $L_1 > \frac{1}{2} [mg(1) +$

$$\sqrt{m^2 g^2(1) + mk(r + 1)^2}] , L_2 < \frac{1}{2} [mg(0) -$$

$\sqrt{m^2 g^2(0) + mk(r + 1)^2}]$. 记 Σ 为 W 轴, $W = \epsilon_1$ 和 $Q_4(W)$ 构成的区域, 可证明轨线 $Q_m(W)$ 位于 $Q_1(W)$ 与 $Q_2(W)$ 之间, 且在轨线 $Q_m(W)$ 第一次与 $W = 1$ 相交之前在 $W \in (\epsilon, 1)$ 内不能与 W 轴相交, 同时轨线 $Q_m(W)$ 在 Σ 内, 有 $\left. \frac{dQ_m(W)}{dW} \right|_{\Sigma} < 0$. 还可以证明, 轨线 $Q_m(W)$ 必与 $W = 1$ 相交, 若设第 i 次与 $W = 1$ 相交的交点为 $(1, Q_i^*)$, 则 $-1 < Q_i^* < 0$.

因为

$$\begin{aligned} & \left. \frac{dQ_m(W)}{dW} \right|_{Q_1(W)} - \frac{dQ_1(W)}{dW} \\ &= mg(W) - \frac{mk(W - 1)(W + r)}{L_1} - L_1 \\ &< mg(1) - \frac{mk(W - 1)(W + r)}{L_1} - L_1 \\ &= -\frac{1}{L_1} \left(L_1^2 - mg(1)L_1 \right. \\ & \quad \left. + mk \left[\left(W + \frac{r-1}{2} \right)^2 - \frac{(r+1)^2}{4} \right] \right), \end{aligned}$$

又因为

$$L_1 > \frac{1}{2} [mg(1) + \sqrt{m^2 g^2(1) + mk(r + 1)^2}] > 0,$$

所以 $\left. \frac{dQ_m(W)}{dW} \right|_{Q_1(W)} - \frac{dQ_1(W)}{dW} < 0$, 即轨线 $Q_m(W)$

位于 $Q_1(W)$ 下方.

因为

$$\begin{aligned} & \left. \frac{dQ_m(W)}{dW} \right|_{Q_2(W)} - \frac{dQ_2(W)}{dW} \\ &= mg(W) - \frac{mk(W - 1)(W + r)}{L_2} - L_2 \\ &> mg(0) - \frac{mk(W - 1)(W + r)}{L_2} - L_2 \\ &= -\frac{1}{L_2} \left(L_2^2 - mg(0)L_2 \right. \\ & \quad \left. + mk \left[\left(W + \frac{r-1}{2} \right)^2 - \frac{(r+1)^2}{4} \right] \right), \end{aligned}$$

又因为

$$L_2 < \frac{1}{2} [mg(0) - \sqrt{m^2 g^2(0) + mk(r + 1)^2}] < 0,$$

所以 $\left. \frac{dQ_m(W)}{dW} \right|_{Q_2(W)} - \frac{dQ_2(W)}{dW} > 0$, 即轨线 $Q_m(W)$

位于 $Q_2(W)$ 上方.

因为

$$\begin{aligned} & \left. \frac{dQ_m(W)}{dW} \right|_{\Sigma} \\ &= \left[mg(W) - \frac{mf(W)}{Q_m(W)} \right] \Big|_{\Sigma} \\ &< mg(W) - \frac{mf(W)}{Q_4(W)} \\ &< m [g(1) - m_0] < 0, \end{aligned}$$

所以在轨线 $Q_m(W)$ 第一次与 $W = 1$ 相交之前在 $W \in (\epsilon, 1)$ 内不能与 W 轴相交, 同时轨线 $Q_m(W)$ 在 Σ 内, 有 $\left. \frac{dQ_m(W)}{dW} \right|_{\Sigma} < 0$.

若轨线 $Q_m(W)$ 不与 $W = 1$ 相交, 这与 $W(+\infty) = 1$ 矛盾, 所以轨线 $Q_m(W)$ 必与 $W = 1$ 相交. 由文献 [16] 知, 从 $(0, 0)$ 点沿特征方向 $(1, -\lambda_3^+)$ 出发的轨线 $Q_m(W)$ 若第一次与 $W = 1$ 相交于 $Z(1, 0)$ 点, 则有 $m \geq m_0$, 此时 $Z(1, 0)$ 为稳定的结点, 这与 $m < m_0$ 矛盾, 又由于轨线第一次与 $W = 1$ 相交前, 不能够进入 Σ 区域, 故 $Q_i^* < 0$.

因为 $\left. \frac{dQ_m(W)}{dW} \right|_{Q_3(W)} - \frac{dQ_3(W)}{dW} = mg(W) - \frac{mf(W)}{Q_3(W)} + 1 = mg(W) + mk(W - 1)(W + r) + 1$, 当 $W = 1$ 时, 有 $\left. \frac{dQ_m(W)}{dW} \right|_{Q_3(W)} - \frac{dQ_3(W)}{dW} = mg(1) + 1 > 1$. 由于 $g(W)$ 是严格单调递增的, 且 $f_1(W) = mk(W - 1)(W + r)$ 在 $W \in (0, 1)$ 是连续可微的, 故存在一个足够小的正数 ϵ_2 , 使得当 $W \in [1 - \epsilon_2, 1]$ 时, 有 $\left. \frac{dQ_m(W)}{dW} \right|_{Q_3(W)} - \frac{dQ_3(W)}{dW} > 0$, 即轨线 $Q_m(W)$ 与 $W = 1$ 的交点必位于 $Q_3(W)$ 与 $W = 1$ 的交点上方, 即 $-1 < Q_i^* < 0$.

第三步 证明轨线 $Q_m(W)$ 与 $W = 1$ 相交后, 必以中心为 $Z(1, 0)$ 点, 按逆时针方向的螺旋线方式依次与 W 轴和 $W = 1$ 相交. 若记轨线第 i 次与 W 相交的交点为 $(W_i^*, 0)$ 则可证明 $|Q_i^*|$ 与 $|W_i^* - 1|$ 都是指数收敛的, 其中 i 为自然数.

记 $S^+ = \{ (W, Q_m(W)) \mid W = 1, Q_m(W) \geq 0 \}$, $S^- = \{ (W, Q_m(W)) \mid W = 1, Q_m(W) \leq 0 \}$, 令轨线 $Q_m(W)$ 与 $W = 1$ 的第一次相交时 $\xi = \xi_1^*$. 因为当 $W \geq 1$ 时, $g(W)$ 与 $f(W)$ 都是关于 W 的严格单调递增函数且 $g(1) > 0, f(W) \geq 0, -1 < Q_i^* < 0$, 由方程

(15)知,必存在常数 ξ_2^* ($\xi_2^* > \xi_1^*$),使得当 $\xi \in [\xi_1^*, \xi_2^*]$ 时, $Q_m(W)$ 与 W 都是严格单调递增的,且当 $\xi = \xi_2^*$ 时, $Q_m(W) = 0$, 即轨线必与 W 轴相交.

因为当 $\xi = \xi_2^*$ 时, $dQ_m(W_1^*)/d\xi = m/f(W_1^*) > 0$, 故存在常数 γ_1 , 使得当 $\xi \in [\xi_2^*, \gamma_1]$ 时, 有 $Q_m(W) > 0$, 且 W 严格单调递减. 由于当 $W > 1$ 且 W 严格单调递减时 $g(W)$ 与 $f(W)$ 都是严格单调递减的, 且 $g(W) > 0$, $f(W) > 0$, 故存在常数 γ_2 , 使得当 $\xi = \gamma_2$ 时, $dQ_m(W)/d\xi = 0$, 此时 $Q_m(W)$ 达到最大值, 且 $Q_m(W) > 0$. 下面证明轨线 $Q_m(W)$ 必与 S^+ 相交, 且 $Q_2^* \geq 0$. 由于 $Q_m(W)$ 位于 $Q_1(W)$ 下方, 若 $Q_2^* < 0$, 则轨线 $Q_m(W)$ 必交 W 轴于一点 $(W_a, 0)$ 且有 $W_a > 1$. 设此时 $\xi = \gamma_3$, 由 $dW/d\xi = -Q_m(W)$ 知, 存在正数 ϵ , 使得当 $\xi \in [\gamma_3, \gamma_3 + \epsilon]$ 时, $W > W_a > 1$, 即轨线与 $W = 1$ 不相交. 随着 ξ 的增加, 轨线 $Q_m(W)$ 不能再与 $W = 1$ 相交, 这与 $W(+\infty) = 1$ 矛盾. 显然, 若轨线与 S^+ 交于 $Z(1, 0)$ 点, 则可完成此定理的证明. 我们假设 $Q_2^* > 0$, 并设此时 $\xi = \xi_3^*$, 由 $dW/d\xi = -Q_m(W)$ 知, 随着 ξ 的增加, W 是严格单调递减的, 因为 $Q_m(W)$ 位于 $Q_1(W)$ 下方, 所以轨线必向下穿过 W 轴, 并交 W 轴于 $(W_2^*, 0)$ 点, 设此时 $\xi = \xi_4^*$. 因为轨线 $Q_m(W)$ 位于 $Q_2(W)$ 上方, 若 $Q_3^* > 0$, 则轨线必与 W 轴交于一点 $(W_\beta, 0)$, 其中 $0 < W_\beta < 1$. 当 $W \in [W_\beta, 1]$ 时, $W, Q_m(W)$ 都是关于 ξ 的严格单调递增函数, 且 $Q_m(W) > 0$, 由 $dW/d\xi = -Q_m(W)$ 知, 这显然是不可能的. 若轨线 $Q_m(W)$ 交 S^- 于 $Z(1, 0)$ 点, 这也可完成此定理的证明.

现假设 $Q_3^* < 0$, 并记此时 $\xi = \xi_5^*$, 下面证明 $|Q_i^*|$ 与 $|W_i^* - 1|$ 关于 ξ 都是指数收敛的.

因为 $\frac{dQ_i^*}{d\xi} = -mg(1)Q_i^*$, 所以 $Q_i^* = Q_1^* \exp$

$[-mg(1)(\xi_{2i-1}^* - \xi_1^*)]$. 故 $|Q_i^*|$ 关于 ξ 是指数收敛的. 因为当 $W > 1$ 时, 有 $g(W) > g(1)$, $f(W) > f(1) = 0$, 故当 $W \in [1, W_1^*]$ 且轨线 $Q_m(W)$ 在 W 轴下方时, 有 $\frac{dQ_m(W)}{dW} = mg(W) - \frac{m/f(W)}{Q_m(W)} > mg(1) > 1$, 即 $|Q_i^*| > W_1^* - 1$. 由于 $|Q_i^*|$ 关于 ξ 是指数收敛的, 故 $|W_i^* - 1|$ 也是关于 ξ 指数收敛的, 即轨线 $Q_m(W)$ 是以 $Z(1, 0)$ 为中心, 按逆时针方向的螺旋线.

第四步 按第三步的方法, 可证随着 ξ 的增加, 轨线 $Q_m(W)$ 必将多次与 W 轴和 $W = 1$ 相交, 由引理 1 知, 当 $\xi \rightarrow +\infty$ 时, $Q_m(W)$ 趋向 $Z(1, 0)$ 点. 再由引理 2 知, 方程 (15) 振荡型行波解是唯一的. 定理证毕.

因为 $1/g(1) < m < m_0$, 即 $g^2(1) < 4\gamma(1+r)$, 故只需要解如下两个关于 τ 的不等式

$$\frac{\tau(\sqrt{\tau} + 1)^2 - \lambda^2}{\lambda^2(\tau - 1)} > \frac{\eta h_2}{c_f(\tau - 1)}, \quad (18)$$

$$\left(\frac{\tau(\sqrt{\tau} + 1)^2 - \lambda^2}{\lambda^2(\tau - 1)} \right)^2 < \frac{4\gamma(\tau + 2\sqrt{\tau})}{\tau - 1}.$$

因为 $\tau > 1$, 故不等式 (18) 可化为

$$\eta h_2 \lambda^2 / c_f < \tau(\sqrt{\tau} + 1)^2 - \lambda^2 < 2\lambda^2 \sqrt{\gamma(\tau - 1)(\tau + 2\sqrt{\tau})}, \quad (19)$$

由 (19) 式可见, τ 不仅是 λ 与 η 的函数, 还是 h_2 和 c_f 的函数. 由于解析求解 τ 存在很大困难, 下面我们应用数值方法来计算满足 (19) 式的 τ 值. 取 $h_2/c_f = 50$. 令 $y_1(\tau) = \tau(\sqrt{\tau} + 1)^2 - \lambda^2$, $y_2(\tau) = 2\lambda^2 \sqrt{\gamma(\tau - 1)(\tau + 2\sqrt{\tau})}$. 若取 $\lambda = 3$, $\eta = 0.0001$, 则 $1.703 < \tau < 1.736$. 表 1 给出了对应于不同的 λ 和 η 且满足不等式 (19) 式的 τ 的取值范围.

表 1 对应于不同的 λ 和 η 且满足 (19) 式的 τ 的范围

η	λ				
	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5
0.0001	(1.346, 1.362)	(1.703, 1.736)	(2.070, 2.125)	(2.446, 2.527)	(2.830, 2.941)
0.0005	(1.363, 1.388)	(1.724, 1.787)	(2.096, 2.205)	(2.476, 2.643)	(2.864, 3.100)
0.0010	(1.385, 1.410)	(1.751, 1.827)	(2.128, 2.269)	(2.513, 2.737)	(2.906, 3.228)
0.0020	(1.427, 1.441)	(1.803, 1.887)	(2.191, 2.365)	(2.587, 2.877)	(2.990, 3.420)

4. 讨 论

第三部分定理的证明过程中,只是证明了轨线 $Q_m(W)$ 从 $(0,0)$ 点沿着特征方向 $(1, -\lambda_3^+)$ 出发,必在第四象限交 $W=1$ 于 $(1, Q_1^*)$ 点,并没有讨论轨线 $Q_m(W)$ 与 $W=1$ 相交之前,当 $W \in (0, 1)$ 时的轨线性质. 图 2 给出的仅仅是 $\frac{d^2 Q_m(W)}{dW^2} > 0$ 的情形,那么是否存在正常数 $E (E < 1)$ 和足够小的正数 ϵ ,使得当 $W \in (E - \epsilon, E + \epsilon)$ 时, $\frac{d^2 Q_m(W)}{dW^2} < 0$ 呢? 由于此问题的复杂性,这里我们仅以 $Q_m(W)$ 在 $W \in (0, 1)$ 内有三个极值点来简单讨论这种情形是否存在,即讨论是否存在三点 (W_1, Q_1) (W_2, Q_2) , (W_3, Q_3) 满足 $\frac{dQ_i}{dW_i} = \alpha (i = 1, 2, 3)$,其中 $0 < W_1 <$

$$W_2 < W_3 < 1, Q_i < 0.$$

因为 $\frac{dQ_i}{dW_i} = 0$, 所以 $g(W_i) = \frac{f(W_i)}{Q_i}$. 又因为 $g(W)$ 是关于 W 的严格单调递增函数,故 $g(W_1) < g(W_2) < g(W_3)$, 即 $\frac{f(W_1)}{Q_1} < \frac{f(W_2)}{Q_2} < \frac{f(W_3)}{Q_3}$. 若记 $T_i = \frac{f(W)}{Q_i}$ 则以下两种情形是可能存在的:

情形 1 $Q_1 < Q_2 < Q_3 < \alpha$ (见图 3), 图 4 显示了该情形下方程 (15) 的相平面轨线与 $W=1$ 第一次相交前的图像.

情形 2 $Q_1 = Q_3 < Q_2 < \alpha$ (见图 5), 图 6 显示了该情形下方程 (15) 的相平面轨线与 $W=1$ 第一次相交前的图像.

故系统 (15) 也可能存在如图 7 所示的振荡型行波解.

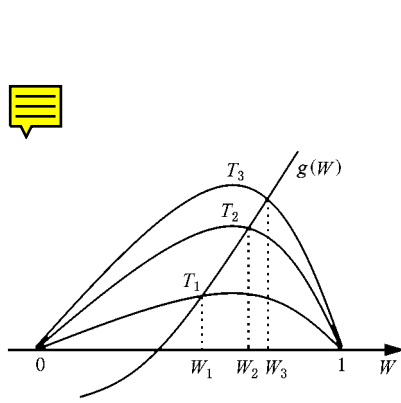


图 3 情形 1 下 T_i 与 $g(W)$ 相交图像

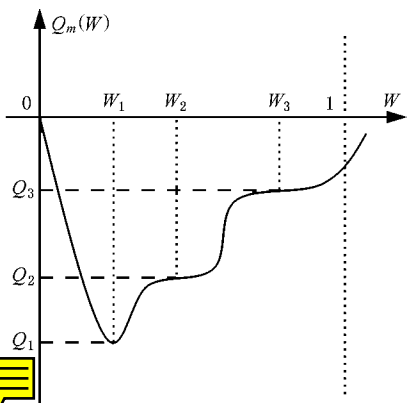


图 4 情形 1 下与 $W=1$ 第一次相交前的相平面轨线

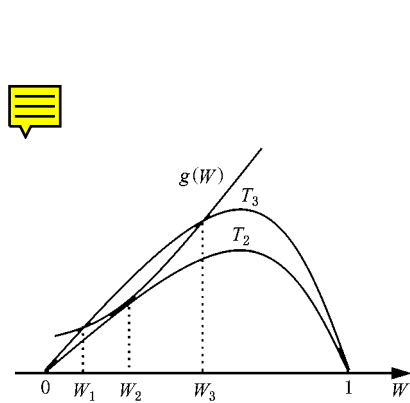


图 5 情形 2 下 T_i 与 $g(W)$ 相交图像

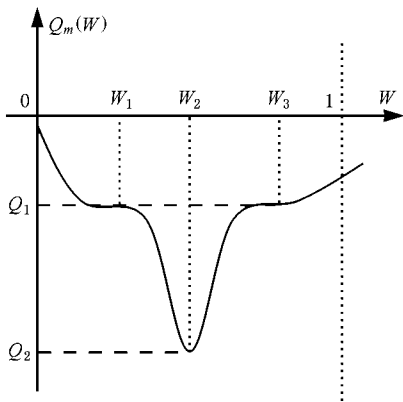


图 6 情形 2 下与 $W=1$ 第一次相交前的相平面轨线

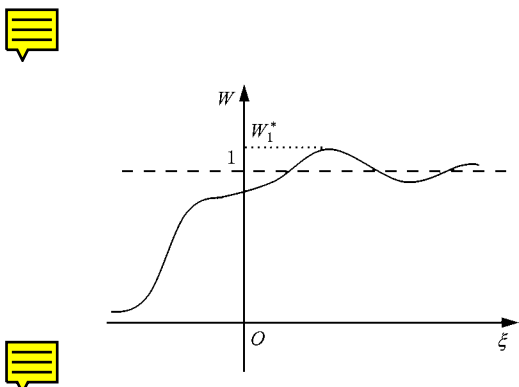


图 7 方程 (15) 可能的振荡型行波解示意图

感谢黄思训教授对本文的热情帮助.

- [1] Carrier G F 1970 *SIAM Review* **12** 175
- [2] Fife P C 1976 *J. Math. Anal. Appl.* **54** 497
- [3] Fife P C 1977 *Rocky Mount. J. Math.* **7** 389
- [4] Mimura M, Tabata M, Hosono Y 1981 *SIAM J. Math. Anal.* **11** 613
- [5] Nishiura Y, Fujii H 1987 *SIAM J. Math. Anal.* **18** 1726
- [6] Nishiura Y, Mimura M 1989 *SIAM J. Appl. Math.* **49** 481
- [7] Ikeda H, Mimura M 1989 *SIAM J. Appl. Math.* **49** 515
- [8] Fusco G, Hale J K 1985 *SIAM J. Math. Anal.* **16** 1152
- [9] Artstein Z 1999 *J. Dyn. Diff. Eq.* **11** 297
- [10] Peletier L A, Rodriguez J A 2004 *J. Diff. Eq.* **203** 185
- [11] Dunbar S 1983 *J. Math. Biol.* **17** 11
- [12] Dunbar S 1984 *Trans. Amer. Math. Soc.* **286** 557
- [13] Dunbar S 1986 *SIAM J. Appl. Math.* **46** 1057
- [14] Huang S X, Zhang M 1991 *Sci. China* **34** 1111 (in Chinese) [黄思训、张 铭 1991 中国科学 **34** 1111]
- [15] Huang S X, Zhang M 1992 *Sci. China* **35** 1471 (in Chinese) [黄思训、张 铭 1992 中国科学 **35** 1471]
- [16] Huang S X, Zhao J Z 2000 *Math. Meth. Appl. Sci.* **23** 949
- [17] Wang M X, Ye Q X 1990 *Adv. Math.* **19** 247
- [18] Ye Q X, Li Z Y 1990 *Introduction to Reaction Diffusion Equations* (Beijing : Science Press) (in Chinese) [叶其孝、李正元 1990 反应扩散方程引论(北京 科学出版社)]
- [19] Li Z Y, Ye Q X 1991 *J. Partial Differential Equations* **4** 1
- [20] Conley C, Smoller J 1978 *Lecture Notes in Mathematics* (Berlin : Springer-Verlag) p668
- [21] Conway E, Smoller J 1977 *Diffusion and the Predator-Prey Interaction* **33** 673
- [22] Gardner R 1984 *SIAM J. Appl. Math.* **44** 56
- [23] Smoller J 1983 *Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations* (Berlin : Springer-Verlag)
- [24] Nii S 1999 *J. Dyn. Diff. Eq.* **11** 515
- [25] Ruan S G, Xiao D M 2001 *SIAM J. Appl. Math.* **61** 1445
- [26] Garduno F S, Maini P K 1995 *J. Diff. Eq.* **117** 281
- [27] Wang M L 1995 *Phys. Lett. A* **199** 169
- [28] Parkes E J, Duffy B R 1997 *Phys. Lett. A* **229** 217
- [29] Porubov A V 1996 *Phys. Lett. A* **221** 391
- [30] Fan E G, Zhang H Q 1998 *Acta Phys. Sin.* **47** 353 (in Chinese) [范恩贵、张鸿庆 1998 物理学报 **47** 353]
- [31] Liu S K, Fu Z T, Liu S D, Zhao Q 2001 *Phys. Lett. A* **289** 69
- [32] Li H M 2005 *Chin. Phys.* **14** 251
- [33] Li D S, Zhang H Q 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 1565 (in Chinese) [李德生、张鸿庆 2006 物理学报 **55** 1565]
- [34] Zhang L, Zhang L F, Li C Y 2008 *Chin. Phys. B* **17** 403
- [35] Wu H Y, Zhang L, Tan Y K, Zhou X T 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 3312 (in Chinese) [吴海燕、张 亮、谭言科、周小滔 2008 物理学报 **57** 3312]
- [36] Zhang L, Zhang L F, Li C Y, Wang T, Tan Y K 2008 *Commun. Theor. Phys.* **49** 1557
- [37] Whitham G B 1974 *Linear and Nonlinear Waves* (New York : Wiley)
- [38] Zhang J Y 1987 *Geometrical Theory and Bifurcate Problem in Ordinary Differential Equations* (Beijing : Peking University Press) (in Chinese) [张锦炎 1987 常微分方程几何理论与分支问题(北京 北京大学出版社)]

Existence of oscillatory travelling wave solution of flood wave with viscosity^{*}

Zhang Liang^{1,2)†} Zhang Li-Feng¹⁾ Wu Hai-Yan³⁾ Wang Ji-Peng⁴⁾

1) *Laboratory for Applied Geophysics, Institute of Meteorology, PLA University of Science and Technology, Nanjing 211101, China*

2) *No. 96165 Troops of PLA, Leping 333300, China*

3) *No. 94855 Troops of PLA, Quzhou 324001, China*

4) *Meteorological and Hydrological Bureau of the General Staff, Beijing 100081, China*

(Received 23 May 2008 ; revised manuscript received 12 July 2008)

Abstract

Using the shooting technique, we investigate the existence of oscillatory travelling wave solution of viscous flood wave in a wide rectangular channel with constant inclination. We prove the existence and uniqueness of an oscillatory travelling wave solution when the parameters of the viscous coefficient, frictional coefficient, inclination and altitudinal ratio satisfy certain conditions. Owing to the difficulty of analytical calculation, Matlab is used to compute the value of altitudinal ratio, and the structure of oscillatory travelling wave solution is also discussed.

Keywords : shooting technique, viscous flood wave, oscillatory travelling wave solution

PACC : 0340G, 0340K, 9210F

^{*} Project supported by the State Key Development Program for Basic Research of China (Grant Nos. 2007CB411800, 2004CB418304).

[†] E-mail : zll_0617@163.com