第 58 卷 第 2 期 2009 年 2 月
1000-3290/2009/58(02)/0734-06
物　理　学　报
ACTA PHYSICA SINICA
Vol.58,No.2,February,2009

重夸克偶素的高阶变分-积分微扰修正*

赵云辉[1)2)]　海文华[1)†]　朱钱泉[1)]

1)(湖南师范大学物理系,长沙　410081)

2)(邵阳学院物理系,邵阳　422000)

(2008 年 5 月 25 日收到;2008 年 7 月 12 日收到修改稿)

利用基于积分方程的改进的变分微扰方法(变分-积分微扰法)求解重夸克偶素激发态. 设置含有变分参数的母哈密顿量作为零级哈密顿量,选择该母哈密顿系统的精确解作为试探波函数,得到了只有几项的高阶修正波函数和高阶能量修正. 该计算结果更接近精确能量值,修正波函数的有界性和收敛性也得到了证明. 结果表明,这种方法不仅可提高计算结果的精度,而且可确保微扰级数解的收敛性.

关键词:重夸克偶素, 变分-积分微扰法, 高阶能量修正

PACC:0365G, 1480D

1. 引　　言

微观系统中的量子态由 Schrödinger 方程描述,因而求解 Schrödinger 方程成为量子力学中的重要任务. 然而,对大多数实际物理系统而言,除少数几种情况[1—3]外,Schrödinger 方程不能精确求解. 于是,近似求解方法应运而生. 常用的近似方法有变分法、微扰论、半经典近似法等. 用变分法近似求解能量本征方程时,不受势的大小限制,应用范围较广,当变分参量很少且近似解是简单的解析表达式时,使用很方便;但往往很难确定适用的试探波函数,且其只能给出能量本征值的上限,其解的精确程度以及如何改进都不明确,同时也存在波函数的收敛问题[4]. 标准微扰论的一级近似计算很简单,且当微扰很弱时可以得到较好的近似结果;但二级及以上的能量修正和一级以上的近似微扰波函数的求解通常很麻烦,因为需要对无穷级数求和,当微扰项变强时,微扰级数的收敛性难以保证. 在微扰论、变分法和半经典近似理论中,微扰论的应用最为广泛,对微扰论的改进工作也进展得最快. 如变分基微扰法[4],在波函数不满足零边界条件且不是平方可积的发散情形下建立计算能量修正的方法[5,6],可分离变量和不可分离变量的高维量子微扰问题[7],外场下高激发原子等量子混沌系统[8],基于积分方程的没有发散的量子微扰方法[7,9],改进的基于积分方程的量子微扰法的应用及波函数收敛性证明[10,11],改进的微扰技术在不同系统的应用[11—15]等. 若将基于积分方程的微扰法与变分法结合起来,构造改进的变分-积分微扰法来分析和研究实际的量子系统,不仅可拓展两种方法各自的优势,同时可克服这两种近似方法各自的一些不足. 这一方面可使计算结果的精度得到改进,另一方面又可保证波函数的收敛性,应用范围更广.

重夸克偶素是指由重的粲夸克(C 夸克)和底夸克(B 夸克)与它们的相应的么夸克通过强相互作用结合在一起的基本粒子. 用变分法和微扰法处理这类系统的研究工作曾见报道[16—18],但研究高阶微扰的工作不多. 本文运用改进的变分-积分微扰法研究基本粒子中的重夸克偶素的基态和激发态修正能级与修正波函数,将计算结果与变分法、标准微扰论结果进行比较,表明我们的计算结果更接近精确值. 利用这种方法不但可以较方便地计算波函数和能量等物理量到较高级修正,而且可以解决某些用原有量子微扰方法难以解决的高级微扰修正的有界性和微扰级数的收敛性问题.

* 国家自然科学基金(批准号:10575034)和湖南省教育厅(批准号:07C682)资助的课题.

† 通讯联系人. E-mail:whhai2005@yahoo.com.cn

2. 改进的变分-积分微扰法

若一个一维定态实际系统的势函数 $U(x)$ 仅对某精确可解的理想系统势函数 $V(x)$ 有小的偏离 $H'_0(x)$，选用合适的单位 $\hbar=1$，Schrödinger 方程可写为

$$\left(-\frac{1}{2\mu}\nabla^2+U(x)\right)\Psi=E\Psi,\qquad (1)$$
$$U(x)=V(x)+H'_0(x),$$

其哈密顿量为

$$H=-\frac{1}{2\mu}\nabla^2+V(x)+H'_0(x)$$
$$=H_0+H'_0.\qquad (2)$$

变分微扰法的特点是取新的母哈密顿量 H_λ 作为零级哈密顿量，其中 λ 是变分参量，则微扰哈密顿量为

$$H'=H-H_\lambda.\qquad (3)$$

选择相应的试探波函数 $\chi(\lambda,x)$ 使其满足

$$H_\lambda\chi(\lambda,x)=E_0\chi(\lambda,x),\qquad (4)$$

可得到零级能量 $E_0(\lambda)$，原哈密顿量 H 的平均值为

$$\overline{H}=\langle\chi(\lambda,x)|H|\chi(\lambda,x\rangle.\qquad (5)$$

λ 的优化值可从 H 的平均值取极小值求得. 将优化的变分参数值代入试探波函数作为无微扰的零级波函数 $\chi_0(\lambda,x)$，得各级微扰方程

$$\frac{1}{2\mu}\chi^{(i)}_{xx}-(V(x)-E_0)\chi^{(i)}=\varepsilon^{(i)}(\lambda,x),\qquad (6)$$

$$\varepsilon^{(0)}=0,\varepsilon^{(i)}=H'\chi^{(i-1)}-\sum_{j=1}^{i}E_j\chi^{(i-j)}$$
$$(i=1,2\cdots).\qquad (7)$$

由于零级方程为二阶线性齐次方程，已知它的一个解为 $\chi_0(\lambda,x)$，则它的另一线性无关解可表为 $\chi_0(\lambda,x)$ 的非线性相关形式[7,9,10]

$$\tilde{\chi}_0(\lambda,x)=\chi_0\int\chi_0^{-2}\mathrm{d}x.\qquad (8)$$

利用基于积分方程的微扰方法[7,9,10]，各级微扰通解和第 i 级能量修正公式为如下积分形式：

$$\chi^{(i)}=2\mu\chi^{(0)}\int_{A_i}^{x}\chi_0\,\varepsilon^{(i)}\mathrm{d}x-2\mu\chi_0\int_{B_i}^{x}\tilde{\chi}_0\,\varepsilon^{(i)}\mathrm{d}x$$
$$(i=1,2,\cdots,\infty),\qquad (9)$$

$$E_i=\int_{x_0}^{\infty}\chi^{(0)}\left(H'\chi^{(i-1)}-\sum_{j=1}^{i}E_j\chi^{(i-j)}\right)\mathrm{d}x$$
$$(i=1,2,\cdots,\infty),\qquad (10)$$

式中 A_i，B_i 是与边界条件有关的任意常数，x_0 为一边界坐标，对于径向运动，$x_0=0$.

3. 重夸克偶素基态的能量修正和波函数修正

重夸克偶素的组分 C 夸克和 B 夸克均很重，是很典型的非相对论束缚态系统，用势模型能较好地描写. 用通常的变分法和微扰法也能处理这类系统[16—18]，但研究高阶微扰的工作难度较大. 下面我们以 Cornell 势为例，利用改进的变分微扰法研究重夸克偶素能量修正和波函数修正. 我们将仅考虑零级系统的第一激发态（$2S$ 态），因为与该情形相比，零级系统的基态（$1S$ 态）微扰问题较为简单[4].

具 Cornell 势的重夸克偶素的哈密顿量为[4,19]

$$H=-\frac{1}{2\mu}\nabla^2+V(r)$$
$$=-\frac{1}{2\mu}\nabla^2-\frac{\kappa}{r}+\sigma r,\qquad (11)$$

其中 μ 为约化质量，等于组分夸克质量的一半，κ 和 σ 分别为 Coulomb 势和线性禁闭势的耦合强度. 取母哈密顿量为零级哈密顿量

$$H_\lambda=-\frac{1}{2\mu}\nabla^2-\frac{\lambda}{r},\qquad (12)$$

其中 λ 是一个变分参量. 微扰哈密顿量为

$$H'=H-H_\lambda=-\frac{\kappa-\lambda}{r}+\sigma r.\qquad (13)$$

作为一个例子，我们考虑零级系统的第一激发态（$2S$ 态），其相应的零级径向波函数和零级能量为

$$\chi^{(0)}=\left(\frac{\mu\lambda}{2}\right)^{\frac{3}{2}}(2-\mu\lambda r)r\mathrm{e}^{-\mu\lambda r/2},$$
$$E_0=-\frac{1}{8}\mu\lambda^2,\qquad (14)$$

原哈密顿量 H 的平均值为

$$\overline{H}=\int_0^{\infty}\chi^{(0)}H\chi^{(0)}\mathrm{d}r$$
$$=-\frac{\kappa\lambda\mu}{4}+\frac{1}{8}\mu\lambda^2+\frac{6\sigma}{\lambda\mu}.\qquad (15)$$

利用（10）式得能量的一级修正为

$$E_1=\int_0^{\infty}\chi^{(0)}H'\chi^{(0)}\mathrm{d}r$$
$$=\frac{2(-\kappa+\lambda)\lambda^2\mu^2+48\sigma}{8\lambda\mu}.\qquad (16)$$

对于 $i=1$ 的情形，利用方程（7）可得

$$\varepsilon^{(1)}=2\mu(H'-E_1)\chi^{(0)}.\qquad (17)$$

由（9）式可得到一级修正波函数为

$$\chi^{(1)}=\chi^{(0)}\int_A^r(\chi^{(0)})^{-2}\left(\int_B^r\chi^{(0)}\varepsilon^{(1)}\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}r=\left(m_1r^2+m_2r+A+\frac{m_3}{-2+r\lambda\mu}\right)\chi^{(0)},\tag{18}$$

其中系数分别为

$$m_1=-\sigma/\lambda,$$
$$m_2=-\kappa\mu/2+\lambda\mu/2+2\sigma/(\lambda^2\mu),$$
$$m_3=-2(-\kappa\lambda^2\mu^2+\lambda^3\mu^2-4\sigma)/(\lambda^3\mu^2).$$

利用第一级归一化条件$\int_0^\infty\chi^{(0)}\chi^{(1)}\mathrm{d}r=0$,可得积分常数

$$A=\frac{-5\kappa\lambda^2\mu^2+5\lambda^3\mu^2-56\sigma}{\lambda^2\mu^2}.\tag{19}$$

由(10)式可得二级能量修正为

$$E_2=\int_0^\infty\chi^{(0)}(H'-E_1)\chi^{(1)}\mathrm{d}r=-\frac{8\kappa^2\lambda\mu-16\kappa\lambda^2\mu+8\lambda^3\mu}{64\lambda}+\frac{384\sigma}{64\lambda\mu}-\frac{384\kappa\sigma}{64\lambda^2\mu}-\frac{4224\sigma^2}{64\lambda^4\mu^3}.\tag{20}$$

对于 $i=2$ 情形,(9)式给出第二级修正波函数为

$$\chi^{(2)}=\chi^{(0)}\int_B^r(\chi^{(0)})^{-2}\left(\int_C^r\chi^{(0)}\varepsilon^{(2)}\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}r=\left(k_1r^4+k_2r^3+k_3r^2+k_4r+\frac{k_5}{-2+r\lambda\mu}+B\right)\chi^{(0)},$$

$$\varepsilon^{(2)}=2\mu[(H'-E_1)\chi^{(1)}-E_2\chi^{(0)}],\tag{21}$$

其中系数分别为

$$k_1=\sigma^2/(2\lambda^2),$$
$$k_2=-\sigma(-3\kappa\lambda^2\mu^2+3\lambda^3\mu^2+4\sigma)/(6\lambda^3\mu),$$
$$k_3=(\kappa^2\lambda^4\mu^4+\lambda^6\mu^4+20\lambda^3\mu^2\sigma-144\sigma^2-2\kappa(\lambda^5\mu^4+10\lambda^2\mu^2\sigma))/(8\lambda^4\mu^2),$$
$$k_4=(-5\kappa^2\lambda^3\mu^3-5\lambda^5\mu^3+10\lambda^2\mu\sigma+64\sigma^2/(\lambda\mu)+10\kappa(\lambda^4\mu^3-6\lambda\mu\sigma))/(4\lambda^4\mu^2),$$
$$k_5=(\kappa^2\lambda^4\mu^4-2\kappa\lambda^5\mu^4+\lambda^6\mu^4+36\kappa\lambda^2\mu^2\sigma-36\lambda^3\mu^2\sigma+64\sigma^2)/(\lambda^6\mu^4).$$

由第二级归一化条件 $\int_0^\infty(2\chi^{(0)}\chi^{(2)}+\chi^{(1)}\chi^{(1)})\mathrm{d}r=0$,可算得积分常数

$$B=\frac{7\kappa^2\lambda^4\mu^4-14\kappa\lambda^5\mu^4+7\lambda^6\mu^4-114\kappa\lambda^2\mu^2\sigma+144\lambda^3\mu^2\sigma-8064\sigma^2}{2\lambda^2\mu^2}.\tag{22}$$

由(10)式可得到第三级能量修正为

$$E_3=\int_0^\infty\chi^{(0)}[(H'-E_1)\chi^{(2)}-E_2\chi^{(1)}]\mathrm{d}r=\frac{4608\sigma[(\kappa-\lambda)^2\lambda^4\mu^4+44(\kappa-\lambda)\lambda^2\mu^2\sigma+552\sigma^2]}{768\lambda^7\mu^5}.\tag{23}$$

当 $i=3$ 时,第三级修正波函数为

$$\chi^{(3)}=\chi^{(0)}\int_C^r(\chi^{(0)})^{-2}\left(\int_D^r\chi^{(0)}\varepsilon^{(3)}\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}r=\chi^{(0)}\left(n_1r^6+n_2r^5+n_3r^4+n_4r^3+n_5r^2+n_6r+C+\frac{n_7}{-2+r\lambda\mu}\right).\tag{24}$$

对于粲夸克:$n_1=-0.000143$,$n_2=0.002750$,$n_3=-0.086950$,$n_4=0.092710$,$n_5=-0.166193$,$n_6=0.0844596$,$n_7=0.083543$. 对于底夸克:$n_1=-0.000763$,$n_2=0.009440$,$n_3=-0.050476$,$n_4=0.131592$,$n_5=-0.151700$,$n_6=0.049579$,$n_7=0.031429$. 利用第三级归一化条件 $\int_0^\infty(\chi^{(0)}\chi^{(3)}+\chi^{(1)}\chi^{(2)})\mathrm{d}r=0$,可求得积分常数

$$C=\frac{1}{48\lambda^9\mu^6}(-33\kappa^3\lambda^6\mu^6+99\kappa^2\lambda^7\mu^6-99\kappa\lambda^8\mu^6+33\lambda^9\mu^6-648\kappa^2\lambda^4\mu^4\sigma+1296\kappa\lambda^5\mu^4\sigma-648\lambda^6\mu^4\sigma+166016\kappa\lambda^2\mu^2\sigma^2-166016\lambda^3\mu^2\sigma^2+4014080\sigma^3).\tag{25}$$

由(10)式可得第四级能量修正为

$$E_4=\int_0^\infty\chi^{(0)}((H'-E_1)\chi^{(3)}-E_2\chi^{(2)}-E_3\chi^{(1)})\mathrm{d}r=\frac{6\sigma}{\lambda^{10}\mu^7}[-(\kappa-\lambda)^3\lambda^6\mu^6-110(\kappa-\lambda)^2\lambda^4\mu^4\sigma-3864(\kappa-\lambda)\lambda^2\mu^2\sigma-45280\sigma^3].\tag{26}$$

上述方程中的变分参量 λ 的优化值可从方程(15)

中 H 的平均值取极小的条件$\frac{\partial \bar{H}}{\partial \lambda}=0$ 求得，与其他常数一起分列如下[14]：

对于 $c\bar{c}$：$\mu = 0.92$ GeV，$\kappa = 0.52$，$\sigma = \frac{1}{2.34^2}$ GeV^2，$\lambda = 1.921933$；

对于 $b\bar{b}$：$\mu = 2.5$ GeV，$\kappa = 0.52$，$\sigma = \frac{1}{2.34^2}$ GeV^2，$\lambda = 1.099796$.

将这些常数代入所得修正波函数和能量公式中，可得波函数的显式和能量修正的数值.

利用(9)和(10)式，采用同样的方法，当 $i = 4,5,6\cdots$时，我们可计算第四级、第五级…修正波函数，也可计算第五级、第六级…修正能量.将粲夸克和底夸克 $2S$ 态的变分-积分微扰各级能量近似计算结果列在表 1 和表 2 中，并将变分微扰法和 Dalgarno-Lewis 求和技术所得计算结果也列在表中，以便于比较.从表中可知，我们的能量修正最高级结果为求和到第四级近似的结果，将它们与用变分微扰法和D-L求和法所得的相应结果比较，我们的结果与精确值符合得更好一点.虽然所得结果只有小数点后第 6 位上的差别，但高阶微扰修正的任何小的改进都不是容易的.特别是虽然将变分微扰法和 D-L 求和技术相结合，“通过一种等效的重整化，也可以使微扰级数的收敛性得到改善”[4]，但其中仍存在难以解决的微扰级数解的发散问题.因此，用这些方法计算到更高阶微扰可能不但不能改进结果精度，反而因级数发散而远离精确值.而我们的微扰解是有界的，微扰级数是收敛的[9]，从而可以通过计算高阶微扰并求和来逼近精确值.由此可见我们的结果优于原有结果.下一节将证明我们的各阶微扰修正解的有界性和微扰级数的收敛性.

表 1　粲夸克 $2S$ 态的变分-积分微扰近似能量计算值及比较

i	积分常数	变分参数	变分-积分微扰法	变分微扰法	D-L 求和
0		1.92193	−0.42479	−0.4248	−0.4248
1		1.92193	1.23943	1.2394	1.2394
2	3.738490	1.92193	0.018835	0.0188	0.0188
3	−3.072390	1.92193	0.041218	0.0412	0.04121
4	0.065885	1.921930	−0.0361901	−0.0362	−0.0362
求和到三级			0.874697	0.8747(0.0265)	0.8747
求和到四级			0.838507	0.8385(−0.0037)	0.8385
精确值			0.8482		

表 2　底夸克 $2S$ 态的变分-积分微扰近似能量计算值及比较

i	积分常数	变分参数	变分-积分法	变分微扰法	D-L 求和
0		1.099796	−0.377985	−0.3780	−0.3780
1		1.099796	0.797072	0.7970	0.7970
2	1.54612	1.099796	0.0087543	0.0088	0.0088
3	−1.27065	1.099796	0.0138453	0.0138	0.0138
4	0.024872	1.099796	−0.008786	−0.0088	−0.0088
求和到三级			0.441687	0.4417(0.0063)	0.4417
求和到四级			0.432901	0.4329(−0.0025)	0.4329
精确值			0.4354		

4. 高级微扰修正的有界性和微扰级数的收敛性

上面我们利用改进的变分-积分微扰法构造并计算了重夸克偶素基态的修正波函数和修正能量.下面我们将证明任意第 i 级微扰修正的有界性和修正波函数的收敛性.从(9)和(10)式可知，修正波函数是否平方可积与它从 $r=0$ 到 $r=\infty$ 的直接积分有关.对(8)式应用洛必达法则，可得其在 $r=\infty$ 处

的极限为

$$\lim_{r\to\infty}\tilde{\chi}^{(0)} = \lim_{r\to\infty}\frac{\int(\chi^{(0)})^{-2}\mathrm{d}r}{(\chi^{(0)})^{-1}}$$

$$= \lim_{r\to\infty}\frac{-\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mu\lambda r/2}}{(\mu\lambda)^{3/2}}$$

$$= -\infty. \tag{27}$$

这表明如不加限制条件,波函数(9)可在无穷边界处出现奇点.利用(7)和(8)式可得到微扰解(9)有界的充分必要条件[7]

$$\lim_{r\to\infty}\int_{A_i}^{r}\chi^{(0)}\varepsilon^{(i)}\mathrm{d}r = 0. \tag{28}$$

由于在无穷边界 $r=\infty$ 处 $\chi^{(0)}=0$,(8)式表明微扰修正的有界性由 $\chi^{(i)}$ 的边界值决定.在条件(28)下对(9)式中波函数求极限[7,9,10],可得

$$\lim_{r\to\infty}\chi^{(i)} = \lim_{r\to\infty}\frac{\varepsilon^{(i)}}{2[V(r)-E_0]},$$

$$V(r) = -\frac{\kappa}{r}+\sigma r, \tag{29}$$

$$E_0 = -\frac{1}{8}\mu\lambda^2.$$

在计算中利用了洛必达法则和 Wronskian 公式.将方程(7)代入上式,可得 $\chi^{(i)}$ 有限的边界值.当 $i=1$ 时,

$$\lim_{r\to\infty}\chi^{(1)} = 2\mu\lim_{r\to\infty}\frac{-\frac{\kappa-\lambda}{r}+\sigma r-E_1}{\kappa/r+\sigma r-E_0}\chi^{(0)}$$

$$= 2\mu\lim_{r\to\infty}\chi^{(0)} = 0. \tag{30}$$

当 $i=2$ 时,

$$\lim_{r\to\infty}\chi^{(2)} = 2\mu\lim_{r\to\infty}\left(\frac{\left(-\frac{\kappa-\lambda}{r}+\sigma r-E_1\right)^2}{(-\kappa/r+\sigma r-E_0)^2} - \frac{E_2}{-\kappa/r+\sigma r-E_0}\right)\chi^{(0)}$$

$$= 2\mu\lim_{r\to\infty}\chi^{(0)} = 0. \tag{31}$$

依此类推,方程(29)的每一项均正比于 $\chi^{(0)}$,而 $\chi^{(0)}$ 按指数衰减而趋于零,但 $H' = -\frac{\kappa-\lambda}{r}+\sigma r$ 不按指数规律增加,因此 $\chi^{(i)}$ 在无穷远处必为零,即各级波函数是有界的.

由上述结果容易进一步判定基于波函数(9)的微扰级数 $\sum_{i=1}^{\infty}\chi^{(i)}(r)$ 在 $r=\infty$ 的收敛性,因为注意到表1和表2中 $E_0<0$ 和 $E_1>0$,(30)和(31)中与 $\chi^{(0)}$ 相乘的 r 的函数保证了 $|\chi^{(2)}(r)|\ll|\chi^{(1)}(r)|$ 推广到任意第 i 阶微扰,可得 $\chi^{(i)}(r)$ 满足 $|\chi^{(i)}(r)|\ll|\chi^{(i-1)}(r)|$,此即微扰级数 $\sum_{i=1}^{\infty}\chi^{(i)}(r)$ 的收敛性条件.

5. 结论与讨论

我们已利用改进的变分-积分微扰法计算了重夸克偶素的 $2S$ 态的能量修正和波函数修正,并证明了所得修正解的有界性和微扰级数解的收敛性.从表1和表2可知,利用变分-积分微扰法计算的第四级能量修正非常接近精确值,与已有的变分微扰法结果及 Dalgarno-Lewis 求和技术所得计算结果进行对比,可知变分-积分微扰法的计算结果优于其他方法所得计算结果.此外,所得结果说明,变分-积分微扰法所得能量并不是能量本征值的上限,因为精确值[4]比所得结果要大.

从重夸克偶素的能量修正和波函数修正可知,这种改进的变分-积分微扰法把变分法和基于积分方程的微扰法巧妙地结合起来,包含了这两种方法的优点,即利用变分可使计算结果的精度得到改进,利用基于积分方程的微扰法可保证每个修正解的有界和微扰级数的收敛;同时可克服两种近似方法的一些不足.

虽然我们利用变分-积分微扰法只研究和分析了重夸克偶素的 $2S$ 态的能量修正和波函数修正,将该方法用于求 $1S$ 态的能量修正和波函数修正会更容易.也可将该方法应用到不同系统,如塞曼效应和斯塔克效应的研究.还可将其用于求简并和近简并情形下的不同系统的能量修正和波函数修正.因此,这种改进的变分-积分微扰方法具有较广泛的应用前景.

[1] Zeng J Y 1995 *Quantum Mechanics* (Beijing: Science Press) (in Chinese) [曾谨言 1995 量子力学(北京:科学出版社)]

[2] Roman P 1965 *Advanced Quantum Theory* (New York: Addison-Wesley)

[3] Dirac P A M 1958 *The Principles of Quantum Mechanics* (Oxford: Oxford University Press)
[4] Ding Y B 2004 *Notes of Quantum Mechanics* (Beijing: Science Press) p1—20 (in Chinese) [丁亦兵 2004 量子力学朝花夕拾(北京 科学出版社)第 1—20 页]
[5] Skala L，Cizek J 1996 *J*. *Phys*. A **29** L129
[6] Znojil M 1997 *J*. *Phys*. A **30** 8771
[7] Hai W H，Feng M，Zhu X，Shi L，Gao K L，Fang X M 2000 *Phys*. *Rev*. A **61** 052105
[8] Leopold J G，Percival I C 1978 *Phys*. *Rev*. *Lett*. **41** 944
[9] Hai W H A 2004 *Notes of Quantum Mechanics* (Beijing: Science Press) p31—45 (in Chinese) [海文华 2004 量子力学朝花夕拾(北京 科学出版社) 第 31—45 页]
[10] Zhao Y F，Hai W H，Zhao C L，Luo X B 2008 *Chin*. *Phys*. B **17** 1720
[11] Wu Y W，Hai W H，Cai L H 2006 *Acta Phys Sin*. **55** 583 (in Chinese) [邬云文、海文华、蔡丽华 2006 物理学报 **55** 583]
[12] Xu J，Hai W H，Li H 2007 *Chin*. *Phys*. **16** 2244
[13] Wu Y W，Hai W H 2006 *Acta Phys*. *Sin*. **55** 5721 (in Chinese) [邬云文、海文华 2006 物理学报 **55** 5721]
[14] Chen Z J，Xu K Z 1999 *Chin*. *Phys*. **8** 331
[15] Li F，Hai W H 2004 *Acta Phys*. *Sin*. **53** 1309 (in Chinese) [李飞、海文华 2004 物理学报 **53** 1309]
[16] Cabrera D，Rapp R 2007 *Phys*. *Rev*. D **76** 114506
[17] Rablford S，Repko W 2007 *Phys*. *Rev*. D **75** 074031
[18] Baldicchi M，Nesterenko A V，Prosperi G M，Simoto C 2008 *Phys*. *Rev*. D **77** 034013
[19] Chen H，Mei H，Shen P N，Jiang H Q 2005 *Acta Phys*. *Sin*. **54** 1136 (in Chinese) [陈 洪、梅 花、沈彭年、姜焕清 2005 物理学报 **54** 1136]

Multi-order corrections of variational-integral perturbation for heavy quarkonium*

Zhao Yun-Hui[1)2)] Hai Wen-Hua[1)†] Zhu Qian-Quan[1)]
1) (*Department of Physics*，*Hunan Normal University*，*Changsha* 410081，*China*)
2) (*Department of Physics*，*Shaoyang College*，*Shaoyang* 422000，*China*)
(Received 25 May 2008；revised manuscript received 12 July 2008)

Abstract

We employ the improved variational-perturbation method based on integral equation (variational-integral perturbation method) to solve the heavy quarkonium in the $2S$ state. Setting the mother Hamiltonian including variational parameter as the zero-order Hamiltonian and choosing the exact solution of the mother Hamiltonian system as the trial wave function，we obtain the multi-order corrected wave functions consisting of a few terms and calculate the multi-order energy corrections. The corrected wave functions are quadratically integrable and the energy corrections are in good agreement with the exact data. The boundedness and convergence of the perturbation series solution are also verified. The results show that the variational-integral perturbation method can not only raise precision of the result but also keep convergence of the wave function.

Keywords: heavy quarkonium，variational-integral perturbation method，multi-order energy corrections
PACC: 0365G，1480D

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10575034) and the Science Foundation of the Education Department of Hunan Province，China (Grant No. 07C682).
† Corresponding author. E-mail: whhai2005@yahoo.com.cn