第 58 卷 第 2 期 2009 年 2 月
1000-3290/2009/58(02)/0740-04

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.58, No.2, February, 2009
©2009 Chin. Phys. Soc.

利用广义不确定关系计算 Gibbons-Maeda 黑洞的统计力学熵*

贺 锋† 赵 凡

(湖南科技大学物理学院,湘潭 411201)

(2007 年 12 月 29 日收到;2008 年 7 月 11 日收到修改稿)

利用广义不确定关系修正的态密度方程并采用 WKB 近似方法,计算了 Gibbons-Maeda 黑洞时空中标量场的统计力学熵. 所得的统计力学熵与该黑洞的视界面积成正比,与 Brick-Wall 方法所得的结果相同,但不需要取任何截断就能避免 Brick-Wall 方法的发散问题.

关键词:广义不确定关系,Gibbons-Maeda 黑洞,态密度,统计力学熵

PACC:0470,9760L

1. 引　言

自从 Bekenstein 和 Hawking 提出黑洞的热力学熵与它的视界面积成正比以来[1,2],黑洞熵就成为理论物理研究的一项重要课题. 这是因为熵具有统计意义,对熵的理解涉及到对黑洞微观本质的认识. 很可能需要一个完全的量子引力理论才能真正认识黑洞熵的微观起源. 在目前量子引力论还未成熟的情况下,人们发展了多种半经典方法探求黑洞熵的微观起源,其中用得最多的是 1985 年 Hooft 提出的 Brick-Wall 方法[3]. 虽然得到了黑洞熵与其视界面积成正比的结论,但为了克服视界处发散问题,需要引入截断因子. 有没有其他方法可以消除 Brick-Wall 模型中的发散呢?最近 Chang 等指出,考虑引力对测不准关系的修正,将导致平直时空量子场论中态密度方程的修正[4]. 李翔的进一步研究发现,将 Chang 的结论推广到弯曲时空,则可以解决 Brick-Wall 模型的熵的发散问题[5]. 目前,人们普遍相信引力效应会导致一个最小可观测距离的存在,这个最小长度为 Planck 长度的量级,时空在 Planck 尺度下是不连续的,由此提出广义不确定关系[6—8].

平直时空量子场论中的位置-动量不确定关系为

$$\Delta x\Delta p \geqslant \frac{\hbar}{2}, \tag{1}$$

Chang 等[4]指出,考虑引力的位置-动量不确定关系推广为

$$\Delta x\Delta p \geqslant \frac{1}{2}\left[\hbar + \frac{\lambda}{\hbar}(\Delta p)^2\right]. \tag{2}$$

由(2)式可得

$$\Delta x \geqslant \frac{1}{2}\left[\frac{\hbar}{\Delta p} + \frac{\lambda}{\hbar}\Delta p\right] \geqslant \sqrt{\frac{\hbar}{\Delta p}\cdot\frac{\lambda}{\hbar}\Delta p} = \sqrt{\lambda}, \tag{3}$$

上式表明空间存在最小尺度$\sqrt{\lambda}$,其中 λ 为引力修正常量,它表征引力对平直时空量子场论中对易关系的修正. 在统计物理中,考虑不确定关系(1)式,一个量子态在相空间中占据的体积为$(2\pi\hbar)^3$ 的相元,所以 $\mathrm{d}x^3\mathrm{d}p^3$ 内的量子态数目为

$$\frac{\mathrm{d}x^3\mathrm{d}p^3}{(2\pi\hbar)^3}. \tag{4}$$

考虑广义不确定关系(2)式,则 $\mathrm{d}x^3\mathrm{d}p^3$ 内的量子态数应为[4]

$$\frac{\mathrm{d}x^3\mathrm{d}p^3}{(2\pi h)^3(1+\lambda p^2)^3}, \tag{5}$$

其中 $p^2 = p_ip^i\,(i = 1,2,3)$.

本文将利用广义不确定关系修正的态密度方程

* 教育部留学回国人员科研启动基金(批准号:教外司留[2004]527 号)、湖南省自然科学基金(批准号:06JJ2026)和湖南科技大学研究基金资助的课题.

† E-mail:fhe@hnust.edu.cn;fhedoc@163.com

(5)式计算Gibbons-Maeda黑洞标量场的统计力学熵.

2. Gibbons-Maeda黑洞时空中的Klein-Gordon方程

采用自然单位制($G=c=1$),Gibbons-Maeda黑洞度规由下式给出[9]：

$$\mathrm{d}s^2=-\frac{(r-r_+)(r-r_-)}{R^2}\mathrm{d}t^2+\frac{R^2}{(r-r_+)(r-r_-)}\mathrm{d}r^2+R^2(r)(\mathrm{d}\theta^2+\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2),\tag{6}$$

其中 $r_\pm=M\pm\sqrt{M^2+D^2-P^2-Q^2}$, $D=(P^2-Q^2)/2M$, $R^2=r^2-D^2$, Q 和 P 分别为Gibbons-Maeda黑洞的电荷和磁荷.

自由标量粒子在Gibbons-Maeda黑洞时空中所满足的Klein-Gordon方程为

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left[\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\frac{\partial\Phi}{\partial x^\nu}\right]=0.\tag{7}$$

上式可化为

$$\frac{R^2}{(r-r_+)(r-r_-)}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}+\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[(r-r_+)(r-r_-)\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right]+\frac{1}{R^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{2\phi}{2\theta}\right)+\frac{1}{R^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}=0.\tag{8}$$

令 $\Phi=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\Psi(r,\theta,\varphi)$，代入(8)式，得

$$\frac{R^2\omega^2}{(r-r_+)(r-r_-)}\Psi+\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial r}\times\left[(r-r_+)(r-r_-)\frac{\partial\Psi}{\partial r}\right]+\frac{1}{R^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{R^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\varphi^2}=0.\tag{9}$$

3. 考虑广义不确定关系时的态密度和熵

(9)式可采用WKB近似法求解. 令 $\Psi=\exp[\mathrm{i}s(r,\theta,\varphi)]$,代入(9)式，得

$$p_r^2=\frac{R^2}{(r-r_+)(r-r_-)}\times\left[\frac{R^2\omega^2}{(r-r_+)(r-r_-)}-\frac{1}{R^2}p_\theta^2-\frac{1}{R^2\sin^2\theta}p_\varphi^2\right],\tag{10}$$

其中 $p_r=\frac{\partial s}{\partial r}$, $p_\theta=\frac{\partial s}{\partial\theta}$, $p_\varphi=\frac{\partial s}{\partial\varphi}$. 利用(10)式，得

$$p^2=p_ip^i=g^{rr}p_r^2+g^{\theta\theta}p_\theta^2+g^{\varphi\varphi}p_\varphi^2=\frac{R^2\omega^2}{(r-r_+)(r-r_-)}.\tag{11}$$

利用(5)和(10)式可计算出Gibbons-Maeda黑洞时空中标量场的态密度

$$\begin{aligned}g(\omega)&=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}p_r\mathrm{d}p_\theta\mathrm{d}p_\varphi}{(1+\lambda p^2)^3}\\&=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi}{(1+\lambda p^2)^3}\int\frac{2R}{\sqrt{(r-r_+)(r-r_-)}}\times\sqrt{\frac{R^2\omega^2}{(r-r_+)(r-r_-)}-\frac{1}{R^2}p_\theta^2-\frac{p_\varphi^2}{R^2\sin^2\theta}}\mathrm{d}p_\theta\mathrm{d}p_\varphi\\&=\frac{1}{6\pi^2}\int\frac{R^6\omega^3\sin\theta}{(1+\lambda p^2)^3(r-r_+)^2(r-r_-)^2}\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\\&=\frac{2}{3\pi}\int\frac{R^6\omega^3}{(1+\lambda p^2)^3(r-r_+)^2(r-r_-)^2}\mathrm{d}r.\end{aligned}\tag{12}$$

由统计物理可知，标量场的自由能为

$$\begin{aligned}F(\beta)&=\frac{1}{\beta}\int\mathrm{d}g(\omega)\ln(1-\mathrm{e}^{-\beta\omega})\\&=-\int_0^\infty\frac{g(\omega)}{\mathrm{e}^{\beta\omega}-1}\mathrm{d}\omega\\&=-\frac{2}{3\pi}\int\frac{R^6\mathrm{d}r}{(r-r_+)^2(r-r_-)^2}\times\int_0^\infty\frac{\omega^3\mathrm{d}\omega}{(1+\lambda p^2)^3(\mathrm{e}^{\beta\omega}-1)}.\end{aligned}\tag{13}$$

统计力学熵为

$$\begin{aligned}S=\beta^2\frac{\partial F}{\partial\beta}&=\frac{2\beta^2}{3\pi}\int\frac{R^6\mathrm{d}r}{(r-r_+)^2(r-r_-)^2}\int_0^\infty\frac{\mathrm{e}^{\beta\omega}\omega^4\mathrm{d}\omega}{(\mathrm{e}^{\beta\omega}-1)^2(1+\lambda p^2)^3}\\&=\frac{2\beta^{-3}}{3\pi}\int\frac{R^6\mathrm{d}r}{(r-r_+)^2(r-r_-)^2}\int_0^\infty\frac{x^4\mathrm{d}x}{(\mathrm{e}^x-1)(1-\mathrm{e}^{-x})[1+\lambda R^2x^2/\beta^2(r-r_+)(r-r_-)]^3}.\end{aligned}\tag{14}$$

利用不等式

$$1 - e^{-x} > \frac{x}{1 + x}, \quad e^{x} - 1 > x, \tag{15}$$

可得到

$$\begin{aligned} S &< \frac{2\beta^{-3}}{3\pi} \int \frac{R^6 \mathrm{d}r}{(r - r_+)^2 (r - r_-)^2} \\ &\quad \times \int_0^\infty \frac{(x^3 + x^2)\mathrm{d}x}{[1 + \lambda R^2 x^2/\beta^2 (r - r_+)(r - r_-)]^3} \\ &= \frac{\beta}{6\pi\lambda^2} \int (r^2 - D^2) \mathrm{d}r \\ &\quad + \frac{\lambda^{-3/2}}{24} \int \frac{(r^2 - D^2)^{3/2} \mathrm{d}r}{(r - r_+)^{1/2}(r - r_-)^{1/2}}. \end{aligned} \tag{16}$$

由(3)式可知空间最小距离为$\sqrt{\lambda}$，我们只考虑视界附近对应于厚$\sqrt{\lambda}$的薄层$[r_+, r_+ + \varepsilon]$的贡献. 为了求得 ε 与 λ 的关系，把 g_{00} 在 r_+ 处作泰勒展开

$$g_{00} \approx g_{00}(r_+) + g'_{00}(r_+)(r - r_+). \tag{17}$$

表面引力为[10]

$$\kappa = -\frac{1}{2} \lim_{r \to r_+} \sqrt{\frac{-g^{rr}}{g^{00}}} \frac{\partial}{\partial r} \ln(-g^{00}). \tag{18}$$

对于 Gibbons-Maeda 黑洞，(18)式化为

$$\kappa = -\frac{1}{2} \lim_{r \to r_+} \frac{\partial}{\partial_r} (g_{00}). \tag{19}$$

由 $g_{00}(r_+) = 0$ 和(19)式，(17)式化为

$$g_{00} \approx -2\kappa(r - r_+). \tag{20}$$

因此 ε 与 λ 存在如下关系式：

$$\begin{aligned} \sqrt{\lambda} &= \int_{r_+}^{r_+ + \varepsilon} \sqrt{g_{rr}} \mathrm{d}r \\ &= \int_{r_+}^{r_+ + \varepsilon} \sqrt{\frac{1}{-g_{00}}} \mathrm{d}r \\ &\approx \int_{r_+}^{r_+ + \varepsilon} \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{2\kappa(r - r_+)}} \\ &= \sqrt{\frac{2\varepsilon}{\kappa}}. \end{aligned} \tag{21}$$

由(16)和(21)式，可得

$$\begin{aligned} S &\sim \frac{\beta}{6\pi\lambda^2}(r_+^2 - D^2)\varepsilon + \frac{\lambda^{-3/2}}{24} 2\sqrt{\lambda}(r_+^2 - D^2) \\ &= \frac{A}{160\lambda\pi}, \end{aligned} \tag{22}$$

其中 $A = 4\pi(r_+^2 - D^2)$是 Gibbons-Maeda 黑洞视界面积. (22)式表明，Gibbons-Maeda 黑洞时空中标量场的统计力学熵与该黑洞视界面积成正比，这与采用其他方法所得的结果一致，但利用广义不确定关系不需要引入截断，这显示了黑洞熵与其视界附近量子效应的联系.

[1] Bekenstein J D 1973 *Phys. Rev.* D **7** 2333

[2] Hawking S W 1975 *Commun. Math. Phys.* **43** 199

[3] Hooft G 't 1985 *Nucl. Phys.* B **256** 727

[4] Chang L N, Minic D, Okaruma N, Takeuchi T 2002 *Phys. Rev.* D **65** 125028

[5] Li X 2002 *Phys. Lett.* B **540** 9

[6] Gross D J, Menda P F 1988 *Nucl. Phys.* B **303** 407

[7] Maggiore M 1993 *Phys. Lett.* B **319** 83

[8] Ashteker A, Rovelli G, Smolin L 1992 *Phys. Rev. Lett.* **69** 237

[9] Gibbons G W, Maeda K 1988 *Nucl. Phys.* B **298** 741

[10] Zhao Z 1999 *Black Hole's Thermal Nature and Spacetime's Strangeness* (Beijing: Beijing Normal University' Press) (in Chinese) [赵 峥 1999 黑洞的热性质与时空奇异性（北京：北京师范大学出版社)]

Statistical entropy of Gibbons-Maeda black hole computed by generalized uncertainty principle*

He Feng† Zhao Fan

(*College of Physics*, *Hunan University of Science and Technology*, *Xiangtan* 411201, *China*)

(Received 29 December 2007; revised manuscript received 11 July 2008)

Abstract

Statistical entropy of scalar field outside Gibbons-Maeda black hole is computed by the equation of state density corrected by the generalized uncertainty principle and by WKB approximation method. The result shows that the black hole entropy is proportional to its horizon area, which is the same as that given by Brick-Wall method. The difference from the Brick-Wall method is that the present result is convergent without any cutoff.

Keywords: generalized uncertainty principle, Gibbons-Maeda black hole, state density, statistical entropy

PACC: 0470, 9760L

* Project supported by the Scientific Research Starting Foundation for the Returned Overseas Chinese Scholars of Ministry of Education, China (Grant No. [2004] No. 527), the Natural Science Foundation of Hunan Province, China (Grant No. 06JJ2026) and the Research Foundation of Hunan University of Science and Technology, China.

† E-mail: fhe@hnust.edu.cn; fhedo@163.com