

# 一种恒 Lyapunov 指数谱混沌吸引子及其 Jerk 电路实现

李春彪<sup>1)2)†</sup> 王德纯<sup>1)</sup>

1) (南京理工大学电子工程与光电技术学院, 南京 210094)

2) (江苏经贸职业技术学院工程技术系, 南京 210007)

3) (江苏省食品安全工程技术研究开发中心电源与系统部, 南京 210007)

(2008 年 4 月 28 日收到, 2008 年 7 月 14 日收到修改稿)

基于 Colpitts 方程, 提出了一种新的三维混沌吸引子. 该混沌吸引子在系统变幅参数改变时, 输出混沌信号中的两维信号的幅值随着参数作线性变化, 第三维信号的幅值保持在同样的数值区间, 而系统的 Lyapunov 指数谱却保持恒定. 该混沌系统通过改造 Colpitts 混沌系统归一化方程中的指数项为绝对值项而得到. 通过相图、庞加莱映射、功率谱以及 Lyapunov 指数, 证明了该混沌吸引子的存在性. 对这种新型混沌吸引子的基本动力学行为予以分析, 基于 Lyapunov 指数谱阐述并论证了该系统能够呈现周期态和混沌态. 最后, 给出该特殊的混沌吸引子的 Jerk 函数实现电路. 系统的混沌特性与某个特定参数无关而信号幅值却随之线性改变的重要特性, 使得该系统在混沌雷达、保密通信以及其他信息处理系统中具有潜在的重大应用价值.

关键词: Colpitts 系统, 恒定 Lyapunov 指数谱, 混沌吸引子, 分岔图

PACC: 0545

## 1. 引言

混沌作为一种复杂的非线性现象, 在过去的几十年里在科学、数学以及工程应用等领域得到了极大的关注. 混沌动力行为能够由许多非线性振荡器产生, 非线性振荡器中的非线性元件或者实现二次项、乘积项, 或者实现分段线性项, 或者是其他高次项, 甚至是指数项. 常见的 Lorenz 系统<sup>[1,2]</sup>, Rössler 系统<sup>[3]</sup>, Chen 系统<sup>[4]</sup>, Lü 系统<sup>[5-7]</sup>, 及其他新的混沌系统<sup>[8-11]</sup>, 它们的混沌特性对于参数非常敏感, 参数的变化与误差使得系统的动力学特性有所变化, 相应的系统相轨将在不动点、周期态、拟周期态与混沌态等不同的区域之间变动.

Kennedy 发现了 Colpitts 电路可以产生混沌现象以后<sup>[12]</sup>, 关于 Colpitts 电路的动力学行为特性分析, 高频实现技术以及四维 Colpitts 混沌振荡器、超混沌的实现等研究也相继得以展开<sup>[13-21]</sup>. 本文在归一化 Colpitts 系统方程的基础上, 改变其非线性指数函数, 用分段线性的绝对值项来代替, 得到一种新的混沌吸引子. 通过 Lyapunov 指数谱与分岔图分析, 发现该系统与 Colpitts 混沌系统和上述其他混沌系统

不同. 最显著的特征是: 该系统的动力学特性与参数之间的变化关系不对称, 存在某个参数  $a$ , 对于系统动力学行为具有特殊的影响. 调整参数  $a$ , 能够对系统输出信号中的两维信号的幅值作线性调整, 另一维信号幅值保持在原有的值区间(后称  $a$  为局部变幅参数). 与此同时, 系统的 Lyapunov 指数谱却保持恒定. 文章先给出了一定参数下的混沌吸引子、功率谱密度及其分数维数, 接着通过局部变幅参数  $a$  变化下的 Lyapunov 指数谱与分岔图, 揭示上述混沌动力学特性. 并简单分析了系统的耗散性、平衡点、稳定性以及其他系统参数对于该系统的动力学行为的影响.

## 2. 源于 Colpitts 系统方程的混沌吸引子

已经知道, 通过引入新的电路参数  $g, Q, k$ , 对 Colpitts 振荡器归一化处理以后, 可以得到如下系统方程<sup>[14]</sup>:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{g}{Q(1-k)} (z - f(y)), \\ \dot{y} &= \frac{g}{Qk} z, \end{aligned}$$

† E-mail: goontry@126.com

$$\dot{z} = -\frac{Qk(1-k)}{g}x - \frac{Qk(1-k)}{g}y - \frac{1}{Q}z, \quad (1)$$

其中参数  $g$  表示 Colpitts 振荡器的开环增益,  $Q$  表示无载谐振回路的品质因数,  $k$  是一个无量纲的比值,  $f(y) = \exp(-y) - 1$ .

令  $k = 1/2, a = 2g/Q, b = 1/Q$ , 原 Colpitts 系统就变为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a(z - f(y)), \\ \dot{y} &= az, \\ \dot{z} &= -\frac{1}{2a}x - \frac{1}{2a}y - bz, \end{aligned} \quad (2)$$

其中指数项对于 Colpitts 振荡器产生非线性动力学行为起着关键的作用, 实现指数项的关键器件是三极管.

基于 Colpitts 系统方程, 变化上述指数项  $-af(y)$ , 替之以一个含绝对值分段线性项  $a - c$

$|y|$ , 得到新的混沌吸引子数学模型为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= az - c|y| + a, \\ \dot{y} &= az, \\ \dot{z} &= -\frac{1}{2a}x - \frac{1}{2a}y - bz, \end{aligned} \quad (3)$$

其中  $a, b, c$  为正的实常数. 当  $a = 3, b = 0.4, c = 1.62$  时, 混沌吸引子如图 1 所示; 庞加莱映射如图 2 所示; 信号及其功率谱如图 3 所示. 利用 Jacobian 方法计算其 Lyapunov 指数为  $LE_1 = 0.0982, LE_2 = 0, LE_3 = -0.4981$ , Lyapunov 维数为  $d_L = 2.197$ , 证明该新系统的维数为分数维数. 从系统相轨迹图、庞加莱映射、频谱图以及系统的 Lyapunov 指数及分数维可见, 当  $a = 3, b = 0.4, c = 1.62$  时, 上述新系统为混沌系统.

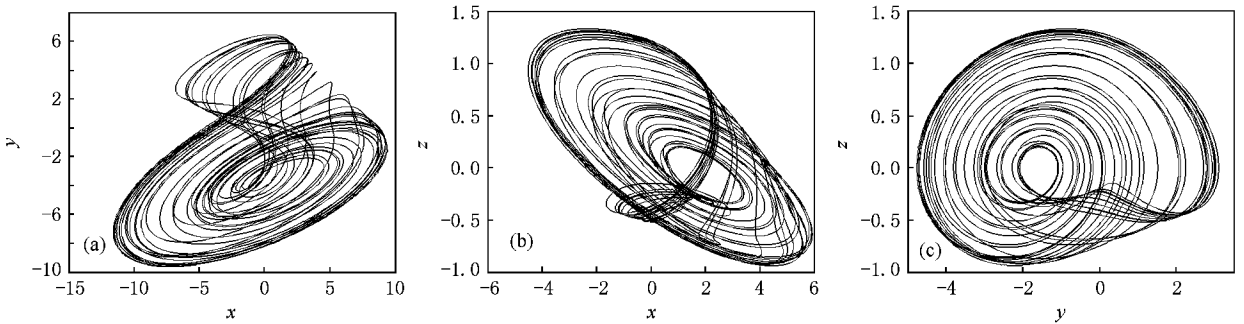


图 1 奇怪吸引子在相平面上的投影 (a)x-y 平面 (b)x-z 平面 (c)y-z 平面

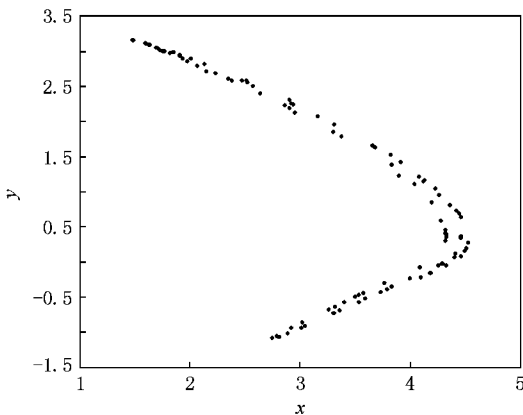


图 2 在  $z=0$  截面上的庞加莱映射

## 3. 动力学特性分析及数值仿真

### 3.1. 基本的动力学分析

#### 3.1.1. 耗散性和吸引子的存在性

由于  $\nabla V = \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{z}}{\partial z} = -b$ , 当  $b > 0$  时, 则系统 (3) 是耗散的, 且以指数形式  $\dot{V} = (-b)V$  收敛, 这意味着, 当  $t \rightarrow \infty$  时, 包含系统轨线的每个体积元以指数率  $(-b)$  收缩到零. 因此, 所有系统轨线最终会被限制在一个体积为零的集合上, 且它渐近运动固定在一个吸引子上.

#### 3.1.2. 平衡点及稳定性

令  $\dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = 0$ , 即令  $az - c|y| + a = 0, az = 0, -\frac{1}{2a}x - \frac{1}{2a}y - bz = 0$ , 得到系统两个平衡点:  $S_1 = (a/c, -a/c, 0), S_2 = (-a/c, a/c, 0)$ .

把系统 (3) 在平衡点处线性化, 得其 Jacobian 矩阵为

$$J_{S_{1,2}} = \begin{bmatrix} 0 & -c \operatorname{sgn}(y) & a \\ 0 & 0 & a \\ -1/2a & -1/2a & -b \end{bmatrix}_{S_{1,2}}. \quad (4)$$

对平衡点  $S_1$ , 其特征方程为

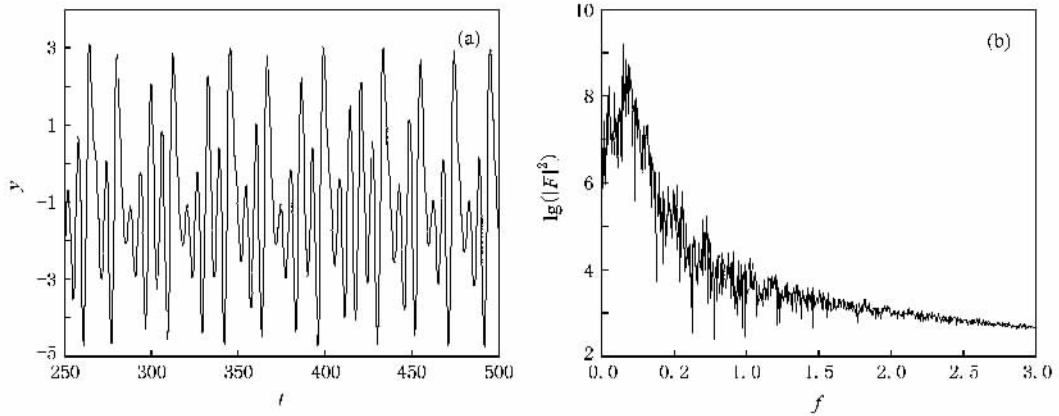


图3 系统输出信号及其功率谱 (a)输出信号  $y(t)$  (b)信号  $y(t)$  的功率谱

$$\lambda^3 + b\lambda^2 + \lambda + c/2 = 2. \quad (5)$$

由 Routh-Hurwitz 判据,当  $b > 0, c > 0$  且满足  $b > c/2$ ,即  $c < 2b$  时,平衡点  $S_1$  是稳定的.也就是说,当  $b < c/2$ ,即  $c > 2b$  时,平衡点  $S_1$  是不稳定的.而对平衡点  $S_2$ ,其特征方程为

$$\lambda^3 + b\lambda^2 + \lambda - c/2 = 0. \quad (6)$$

根据 Routh-Hurwitz 判据,当  $b > 0, c > 0$  时,平衡点  $S_2$  总是不稳定的.为了使得平衡点  $S_1, S_2$  不稳定,进而有可能产生混沌,系统(3)的系数必须满足关系

$$b < c/2,$$

或者

$$c > 2b.$$

对于参数  $a = 3, b = 0.4$ ,当  $c > 0$  时,  $S_2$  是不稳定的,但不能断定  $S_1$  是否稳定,但当  $c > 0.8$  时,意味着  $S_1$  是不稳定的.

具体地,当  $a = 3, b = 0.4, c = 1.62$  时,得到两个平衡点  $(1.8519, -1.8519, 0)$  和  $(-1.8519, 1.8519, 0)$ .在平衡点处对系统(3)进行线性化得其 Jacobi 矩阵为

$$J_e = \begin{bmatrix} 0 & -1.62e_{12} & 3 \\ 0 & 0 & 3 \\ -1/6 & -1/6 & -0.4 \end{bmatrix}, \quad (7)$$

其中  $e_1 = -1; e_2 = 1$ .将平衡点  $(1.8519, -1.8519, 0)$  代入,得到对应的特征根为  $\lambda_1 = 0.1401 + 1.0821i, \lambda_2 = 0.1401 - 1.0821i, \lambda_3 = -0.6803$ .这里  $\lambda_3$  为负实根,而  $\lambda_1$  和  $\lambda_2$  是一对具有正实部的共轭复根,故而平衡点  $(1.8519, -1.8519, 0)$  是不稳定的,为三维空间中的一个鞍焦点.将平衡点  $(-1.8519,$

$1.8519, 0)$  代入,得到所对应的特征根为  $\lambda_1 = -0.4691 + 1.1335i, \lambda_2 = -0.4691 - 1.1335i, \lambda_3 = 0.5382$ .这里  $\lambda_3$  为正实根,而  $\lambda_1$  和  $\lambda_2$  是一对具有负实部的共轭复根,平衡点  $(-1.8519, 1.8519, 0)$  也是不稳定的,是鞍点.

### 3.2. 恒 Lyapunov 指数谱特性

对于系统(3),随着系统参数的改变,系统平衡点的稳定性将会发生变化,从而该系统也将处于不同的状态区域.但是,从前面的分析已经看出,在平衡点处 Jacobi 矩阵所对应的特征多项式中不含有变量  $a$ ,因此变量  $a$  不影响系统在平衡点上的动力学特征.实际上,系统(3)在任意相点处线性化所得的 Jacobi 矩阵所对应的特征值也都与  $a$  无关,因而  $a$  不影响相空间上任意一点处的动力学特性,在参数  $a$  变化时,系统(3)将有相同的 Lyapunov 指数谱.实际计算时,由于受到计算精度的影响和不同参数底下系统初始值的简单化的统一处理,使得 Lyapunov 指数谱围绕一个固定值上下波动.

固定参数  $b = 0.4, c = 1.62$  不变,改变参数  $a$  时的 Lyapunov 指数谱与取不同的庞加莱截面所得的分岔图,如图4所示.由图4可见,当参数  $a > 0$ ,从小到大调整  $a$ ,系统(3)一直处于混沌状态,系统的 Lyapunov 指数谱保持恒定,都是  $LE_1 = 0.0982, LE_2 = 0, LE_3 = -0.4981$ ,如图4(a)所示.

同时,调整参数  $a$ ,系统输出三维信号的幅度变化情况呈现如下规律性:当  $a$  增加,系统  $x, y$  信号的幅度也跟着增大;当  $a$  减小,系统  $x, y$  信号的幅度也跟着减小,且上述增减变化与参数  $a$  之间呈线性规律(见图4(c)(d));无论  $a$  增加或者减小,系

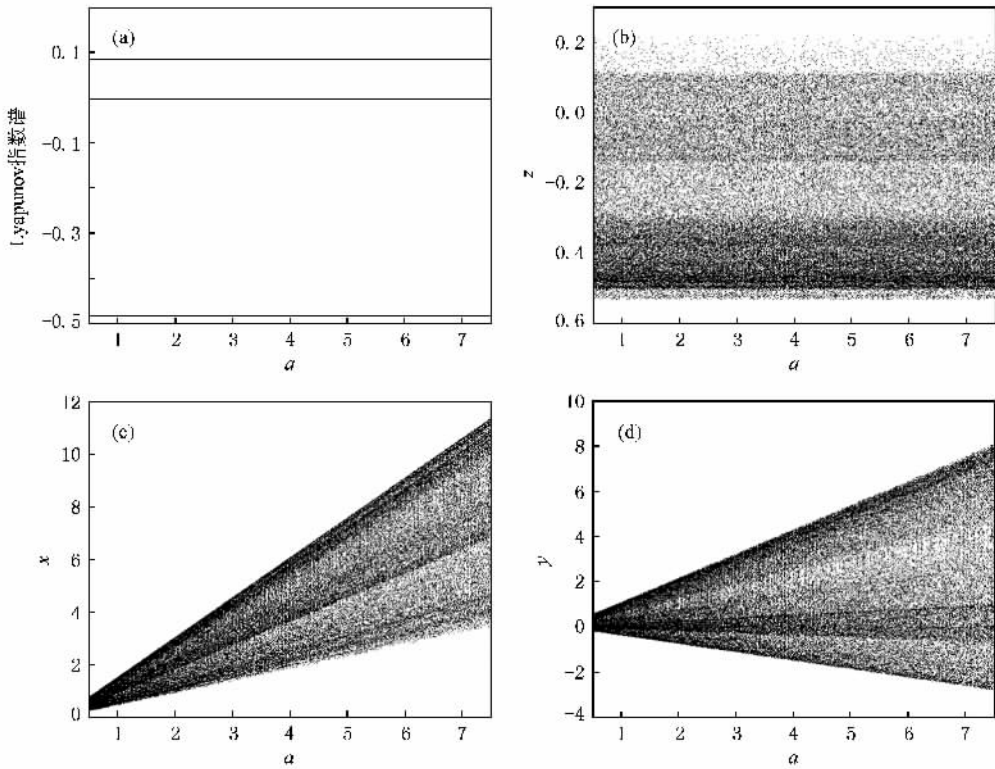


图4 系统(3)随  $a$  变化时的 Lyapunov 指数谱和分岔图 (a) Lyapunov 指数谱, (b)  $z$ - $a$  分岔图(庞加莱截面为  $x = 0$ ), (c)  $x$ - $a$  分岔图(庞加莱截面为  $z = 0$ ), (d)  $y$ - $a$  分岔图(庞加莱截面为  $z = 0$ )

统  $z$  信号的幅度在同一个值区间(见图 4(b)). 因此, 可以将系统方程(3)中的参数  $a$  定义为局部变

幅参数, 或者称为局部幅度调节器. 进一步观察上述分岔图可以看出, 局部变幅参数  $a$  在区间  $[0.5, 7.5]$

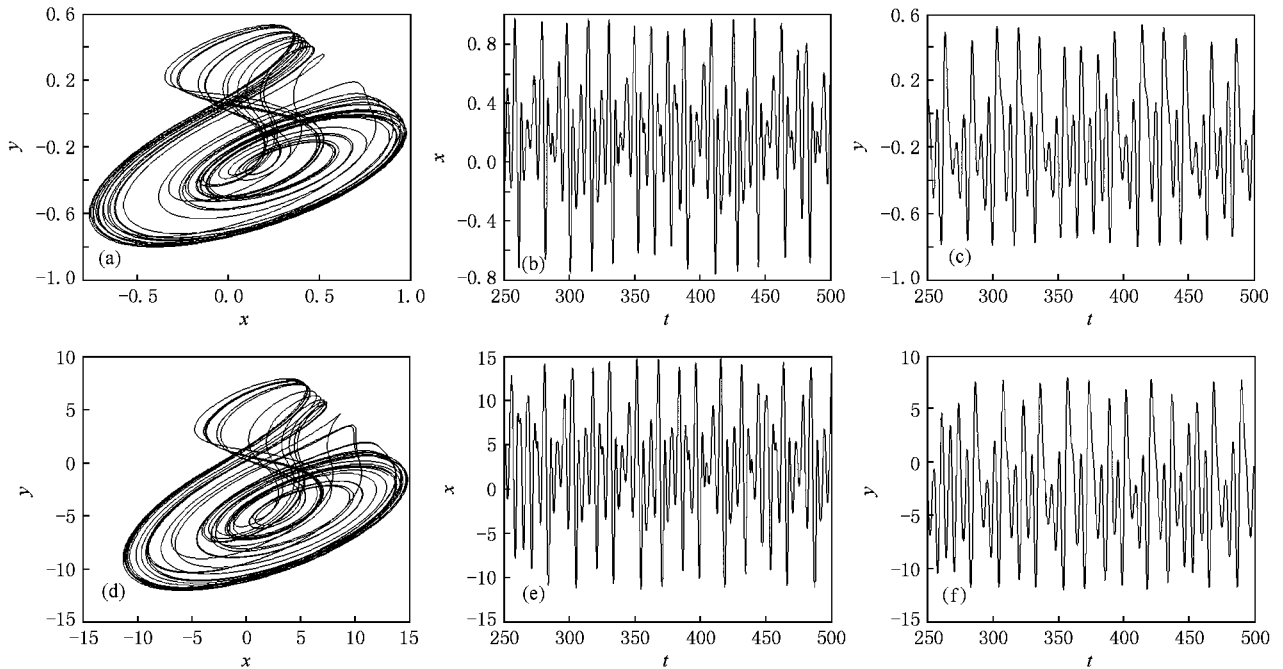


图5 系统(3)随  $a$  变化的吸引子在  $x$ - $y$  平面的投影和  $x, y$  的波形图 (a)  $a = 0.5$  时的相轨 (b)  $a = 0.5$  时的  $x$  波形 (c)  $a = 0.5$  时的  $y$  波形 (d)  $a = 7.5$  时的相轨 (e)  $a = 7.5$  时的  $x$  波形, (f)  $a = 7.5$  时的  $y$  波形

变化,变幅参数增大了 15 倍,系统相应的二维信号  $x$  与  $y$  的幅度变化也达 15 倍,反映在图 4 的分岔图上,表现为庞加莱截面截得的相轨上的点位置提高,在  $x, y$  方向上,随着局部变幅参数逐渐提高,相轨穿过庞加莱截面的点的位置跨度也加大.信号波形与吸引子的仿真结果进一步证实,当局部变幅参数  $a$  在上述区间变化时, $x$  信号的幅度由  $[-0.77, 1]$  增加到  $[-0.77 \times 15, 1 \times 15]$ ,即  $[-11.5, 15]$ ,信号  $y$  的幅度由  $[-0.8, 0.55]$  增加到  $[-0.8 \times 15, 0.55 \times 15]$ ,即  $[-12, 8.25]$  如图 5 所示,而信号  $z$  的最大值与最小值的范围没有变化.进一步仿真还可以得到局部变幅参数  $a$  变化时,系统三维输出信号的最

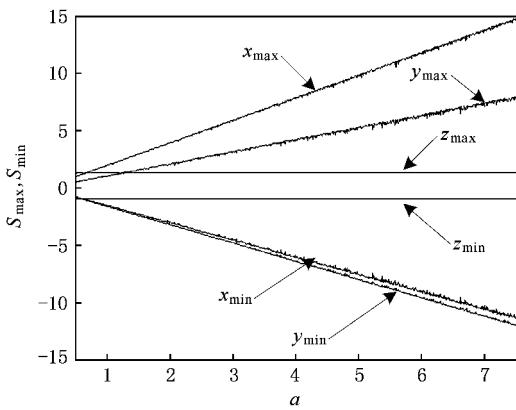
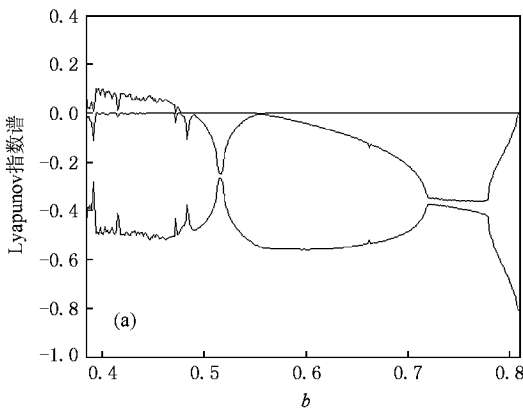


图 6 系统 (3) 随  $a$  变化时相应的三维信号  $x, y, z$  的最大值与最小值随参数  $a$  的变化曲线

小值与最大值的变化情况曲线,如图 6 所示.实际上,当局部变幅参数  $a$  进一步增加时,系统的信号  $x, y$  幅值会依然线性增加,而 Lyapunov 指数谱依然保持恒定,只是幅度增加以后,相应地也增加了电路实现的难度,所以在  $a > 7.5$  区间没有给出数值仿真结果.



当固定参数  $a = 3, c = 1.62$  不变,改变参数  $b$  使之在区间  $[0.3836, 0.81]$  变化时,得到相应的 Lyapunov 指数谱如图 7(a) 所示.由图可见,当  $b \in [0.3836, 0.4779]$  时,系统处于混沌状态;当  $b \in [0.4779, 0.81]$  时,系统处于周期状态;在  $b = 0.81$  处,由于  $c = 2b$  系统 (3) 在平衡点  $S_1$  处发生 Hopf 分岔;当  $b > 0.81$  时系统 (3) 趋于一个不动点.

当固定参数  $a = 3, b = 0.4$  不变,改变参数  $c$  使之在区间  $[0.8, 1.65]$  变化时,其 Lyapunov 指数谱如图 7(b) 所示.由图可知:当参数  $c < 0.8$  时,系统为稳定状态,趋于一个不动点,在  $c = 2b = 0.8$  处,系统 (3) 在平衡点  $S_1$  处发生 Hopf 分岔;当  $c \in [0.8, 1.47]$  时,系统处于周期状态,且随着系统的最大 Lyapunov 指数不断与 0 线碰撞,周期不断增大;当系统在  $c \in [1.47, 1.65]$  时,系统处于混沌状态,其中在  $c = 1.639$  附近出现一个明显的周期窗.

#### 4. Jerk 方程及其电路实现

经过代换,得到系统 (3) 的 Jerk 函数式为

$$\dot{y} = -b\ddot{y} + \dot{y} + \frac{c}{2}|y| - \frac{a}{2}. \quad (8)$$

根据文献 [22, 23],容易构造出该 Jerk 方程所对应的电路,如图 8 所示.电路方程为

$$\dot{y} = -\frac{\ddot{y}}{R_{adj}C} - \frac{\dot{y}}{RC} + \frac{1}{R_{abs}C}|y| - \frac{V_1}{RC}. \quad (9)$$

(图 8 中的  $R_1$  充当  $R_{adj}$  的角色,而与  $U_3$  相连的  $R_3$  就是  $R_{abs}$ ).为了实现方程 (8),且将频率设置在容易观察的音频,这里电路参数设置为: $R_2 = R_4 = R_5 = R_6 = R_7 = R_8 = 1 \text{ k}\Omega$ ,所有电容都设置为  $0.1 \mu\text{F}$ ,  $R_{adj} = R_1 = 2.5 \text{ k}\Omega$ ,而调整绝对值系数的电阻  $R_{adj} = R_3$

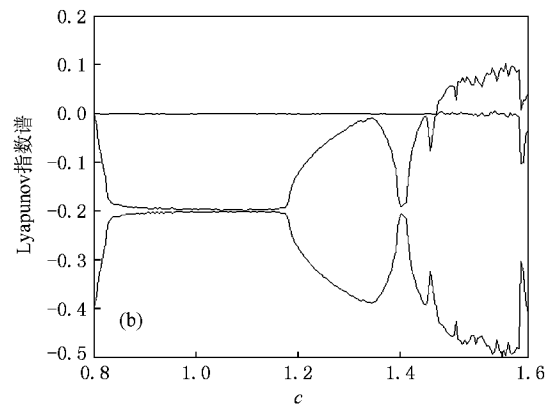


图 7 系统 (3) Lyapunov 指数谱 (a) 随  $b$  变化的 Lyapunov 指数谱, (b) 随  $c$  变化的 Lyapunov 指数谱

$= 1.2346 \text{ k}\Omega$ , 设计的绝对值变换电路采用两个普通的二极管 D1N4001. 调节电路中的电源电压  $V_1$ , 可以方便的调节局部变幅参数  $a$ , 进而调节电路输出信号的强度, 满足工程需要. 为了减少二极管导通电压门限给绝对值实现电路的影响, 我们将  $a$  提高, 图 9 给出了系统(3)在取参数  $a = 7, b = 0.4, c = 1.62$  时所对应的混沌吸引子实验仿真效果图.

## 5. 结 论

基于 Colpitts 系统方程和其处于混沌时的参数,

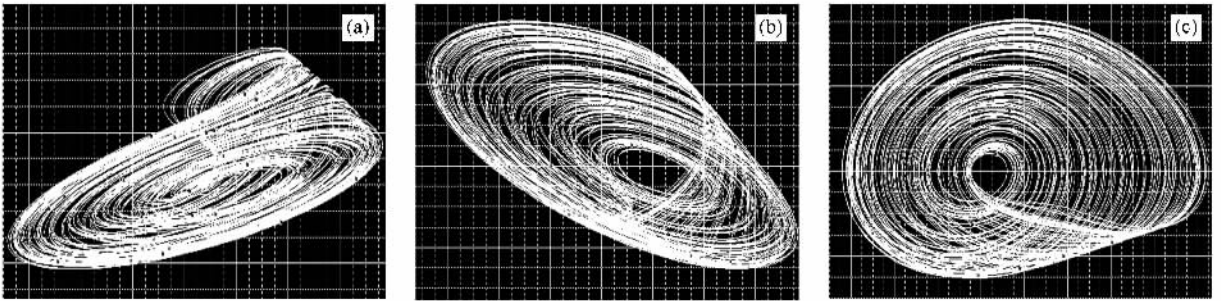


图 9 系统(3)的 Jerk 电路产生的奇怪吸引子在相平面上的投影 (a)  $x$ - $y$  平面 (b)  $x$ - $z$  平面 (c)  $y$ - $z$  平面

提出了一种新的含绝对值的混沌系统. 通过信号频谱、相图、庞加莱映射以及 Lyapunov 指数仿真分析, 证明该系统能够产生混沌吸引子. 尤其重要的是, 该系统存在一个局部变幅参数  $a$ . 当系统其他参数固定在一个合适的值时, 调整局部变幅参数  $a$ , 系统的 Lyapunov 指数谱将保持在一个恒定的水平, 而系统输出信号中  $x, y$  信号的幅值随着局部变幅参数  $a$  的增加而线性增加,  $z$  信号的幅度保持不变. 该系统

具有两个平衡点, 在参数变化时将经历不动点、周期态, 直至走向混沌. 本文根据系统方程推导出的 Jerk 函数式以及据此实现的电路仿真结果与理论分析一致. 该系统局部变幅参数  $a$  的较大可调区间, 以及参数  $b, c$  的一个合适够用的混沌区间, 使得该系统能够实现鲁棒控制, 因而使得该系统在混沌雷达和其他信息处理系统中有着广阔的应用前景.

[ 1 ] Lorenz E N 1993 *The Essence of Chaos* ( Seattle, WA : University of Washington Press ) p148  
 [ 2 ] Stewart I 2002 *Nature* **406** 948  
 [ 3 ] Rössler O E 1976 *Phys. Lett. A* **57** 397  
 [ 4 ] Chen G, Ueta T 1999 *Int. J. Bifurcat. Chaos* **9** 1465  
 [ 5 ] Lü J, Chen G 2002 *Int. J. Bifurcat. Chaos* **12** 659  
 [ 6 ] Lü J, Chen G, Zhang S 2002 *Int. J. Bifurcat. Chaos* **12** 1001  
 [ 7 ] Lü J, Chen G, Cheng D 2004 *Int. J. Bifurcat. Chaos* **14** 1507  
 [ 8 ] Cai G L, Tan Z M, Zhou W H, Yu W T 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 6230 ( in Chinese ) [ 蔡国梁、谭振梅、周维怀、余文桃 2007 物理学报 **56** 6230 ]  
 [ 9 ] Wang G Y, Qiu S S, Xu Z Y 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3295 ( in Chinese ) [ 王光义、丘水生、许志益 2006 物理学报 **55** 3295 ]

[ 10 ] Wang F Z, Qi G Y, Chen Z Q, Zhang Y H, Yuan Z Z 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 4005 ( in Chinese ) [ 王繁珍、齐国元、陈增强、张宇辉、袁著社 2006 物理学报 **55** 4005 ]  
 [ 11 ] Yu S M 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 4111 ( in Chinese ) [ 禹思敏 2004 物理学报 **53** 4111 ]  
 [ 12 ] Kennedy M P 1994 *IEEE Trans. Circuits Syst.* **1** 41 771  
 [ 13 ] Maggio G M, de Feo O, Kennedy M P 1999 *IEEE Trans. Circuits Syst.* **1** 46 1118  
 [ 14 ] Maggio G M, di Bernardo M 2000 *IEEE Trans. Circuits Syst.* **1** 47 1160  
 [ 15 ] Elwakil A S, Kennedy M P 1999 *J. Franklin* **336** 687  
 [ 16 ] De Feo O, Maggio G M 2003 *Int. J. Bifurcat. Chaos* **13** 2917  
 [ 17 ] Wegener C, Maggio G M, Kennedy M P 1996 *Proc. NDES '96* Seville, Spain 275

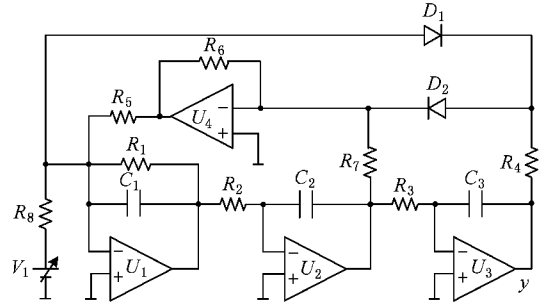


图 8 系统(3)的 Jerk 函数式所对应的电路

- [ 18 ] Čenys A , Tamaševičius A , Baziliauskas A , Krivickas R , Lindberg E 2003 *Chaos , Solitons and Fractals* **17** 349
- [ 19 ] Tamaševičius A , Mykolaitis G , Bumelienė S 2001 *Electron. Lett.* **37** 549
- [ 20 ] Mykolaitis G , Tamaševičius A , Bumelienė S 2004 *Electron. Lett.* **40** 319
- [ 21 ] Yu S M 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 3374 ( in Chinese ) [ 禹思敏 2008 *物理学报* **57** 3374 ]
- [ 22 ] Sprott J C 2000 *Am. J. Phys.* **68** 758
- [ 23 ] Kiers K , Schmidt D , Sprott J C 2004 *Am. J. Phys.* **72** 503

## An attractor with invariable Lyapunov exponent spectrum and its Jerk circuit implementation

Li Chun-Biao<sup>1,2,3</sup>† Wang De-Chun<sup>1</sup>

1 *School of Electronic Engineering and Optoelectronic Techniques , Nanjing University of Science and Technology , Nanjing 210094 , China*

2 *Department of Engineering Technology , Jiangsu Institute of Economic & Trade Technology , Nanjing 210007 , China*

3 *Department of Electric Source and System , Jiangsu R&D Center of Food Safety Engineering Technology , Nanjing 210007 , China*

( Received 28 April 2008 ; revised manuscript received 14 July 2008 )

### Abstract

A novel three-dimensional chaotic attractor derived from Colpitts equation is proposed in this paper. When the given parameter varies in a broad range , the amplitude of the signals of the first two dimensions changes linearly while the third one keeps its amplitude in the same range. At the same time , the Lyapunov exponent spectrum keeps invariable. This chaotic system is developed by substituting the absolute term for the exponent term in normalized Colpitts equation. Lyapunov exponent , Poincaré mapping , phase portrait and spectrum are given to verify that the attractors are chaotic. In addition , some basic dynamical characteristics of the new system are investigated briefly. Based on Lyapunov exponent spectrum analysis , it is demonstrated that the new system can go into periodic and chaotic behaviors. At last , the Jerk function of the new system is put forward and its circuit implementation is designed. The feature that the chaotic characteristic of this system has nothing to do with the given parameter while the amplitude of some state variables can be changed linearly makes it reasonable to predict that the chaotic system will have tremendous potential applications in chaotic radar , secure communications and other information processing systems.

**Keywords** : Colpitts system , invariable Lyapunov exponent spectrum , chaotic attractor , bifurcation diagram

**PACC** : 0545