

关联可切换超混沌系统的构建与特性分析*

刘扬正^{1)†} 姜长生¹⁾

1) 南京航空航天大学自动化学院, 南京 210016)

2) 南京工程学院非线性物理研究所, 南京 211167)

(2008 年 5 月 7 日收到, 2008 年 7 月 2 日收到修改稿)

利用拓展系统变量, 增加系统的非线性函数和对原系统实施反混沌控制方法, 构建了一类关联且有多种切换方式的超混沌系统. 对这类系统的分岔图、平衡点的稳定性、Lyapunov 指数和动力学行为的演化过程进行了分析. 设计了实现切换超混沌系统的电路, 利用开关的切换, 一个电路能实现多个超混沌系统的功能.

关键词: 超混沌系统, 切换, 分岔图, Lyapunov 指数

PACC: 0545

1. 引言

混沌保密通讯和混沌数字通讯是非线性科学理论研究和应用研究最为活跃的领域之一, 也是将混沌理论转化为实际应用的研究热点^[1-22]. 基于多个系统间切换的键控技术能扩展混沌数字通讯的频率, 文献 [1-5] 利用系统间切换实现多通道混沌数字通讯; 为了增强混沌同步保密通讯的安全性能, 文献 [6-14] 探讨了多个关联子系统之间的切换混沌同步问题. 基于多个关联子系统之间的切换混沌同步保密通讯, 既能克服 P-C 混沌同步保密通讯系统安全性能差的缺点, 也能弥补环链耦合混沌同步保密通讯系统难以实现的不足^[15]. 由此可见, 对多个关联混沌系统之间切换问题的研究, 不仅具有深远的理论意义, 而且具有广泛的应用价值. 为了建构子系统足够多又能容易相互切换的混沌系统, 文献 [13, 14] 采用增加并改变系统非线性特性的方法^[16-22], 建构了包含多个子系统的关联且可切换的复杂混沌系统. 本文利用拓展系统变量, 增加系统的非线性函数和对原系统实施反混沌控制方法, 构建一类关联且有多种切换方式的超混沌系统, 对这类系统的分岔图、平衡点的稳定性、Lyapunov 指数和 Lyapunov 维数, 以及动力学行为的演化过程进行分

析. 设计实现新的切换超混沌系统的电路, 利用开关的切换, 一个电路能实现多个超混沌系统的功能.

2. 切换系统的构建

采用拓展系统变量并将其反馈回系统的方法^[16-21], 对三维混沌系统^[22]进行改造, 构建四维超混沌系统. 由于对原系统实施反控制方式的不同, 四维超混沌系统存在多种形式, 增加并改变系统的非线性函数, 进而构建关联可切换四维超混沌系统. 对三维混沌系统实施非线性拓展并将拓展变量线性反馈控制到原系统的第一项, 构建一类关联可切换四维超混沌系统

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a(y - x) + w, \\ \dot{y} &= by - 10xz, \\ \dot{z} &= -cz + 10f_1(x, y), \\ \dot{w} &= df_2(x, y, z, w) + 10f_3(x, y, z, w). \end{aligned} \quad (1)$$

(1) 式中正常数 a, b, c, d 为系统参数, x, y, z, w 为系统变量. 为了达到电路实现容易和切换操作方便的目的, 构建关联可切换四维超混沌系统需满足以下条件: 1) 保持系统的参数不变, 发生改变的是系统拓展函数的变量和系统的非线性特性; 2) 限定系统变化的非线性函数在系统变量的二次函数中选择; 3) 系统参数的取值要保证所有子系统皆处于超混沌

* 国家自然科学基金(批准号: 90405011)、江苏省高校自然科学基金(批准号: 07KJD120081)和南京工程学院自然科学基金(批准号: KXJ07068)资助的课题.

† E-mail: lyz64@njit.edu.cn, jlyz_6410@163.com

状态.

对于系统(1),系统变化的非线性函数 $f_1(x, y)$ 在系统变量的二次函数 x^2, xy, y^2 中选取;系统拓展函数的线性部分 $f_2(x, y, z, w)$ 在 x, y, z, w 中选取;系统拓展函数的非线性部分 $f_3(x, y, z, w)$ 在系统变量的二次函数 xw, yz, yw 中选择时,共有 $(3 \times 4 \times 3 = 36)$ 种组合,意味着系统(1)包含 36 个可供选择

表 1 关联可切换四维超混沌系统(1)的 8 个子系统列表

子系统	$f_1(x, y)$	$f_2(x, y, z, w)$	$f_3(x, y, z, w)$	子系统	$f_1(x, y)$	$f_2(x, y, z, w)$	$f_3(x, y, z, w)$
(a)	x^2	y	yz	(b)	y^2	x	yz
(c)	y^2	z	yz	(d)	x^2	x	xw
(e)	xy	w	xw	(f)	y^2	z	yw
(g)	x^2	w	yw	(h)	xy	y	yw

图 1 表示系统参数 $a = 40, b = 25, c = 3$ 保持不变,8 个子系统变量 y 随系统参数 d 变化的分岔图.图 1 中的(a)图对应表 1 中的子系统(a),以此类推,根据这类四维超混沌系统的分岔图,确定使子系统都处于混沌状态共同的系统参数值.

从图 1 可以看出,当系统参数 $a = 40, b = 25, c = 3, d = 1$ 时,选定的 8 个子系统皆处于混沌状态,且 8 个子系统的动力学演化行为有较大差异.

3. 系统切换功能的实现

关联可切换四维超混沌系统(1)的各个子系统之间存在一定的差异,也存在着密切的联系.根据(1)式设计了一个能实现四维超混沌系统切换功能的实际电路,如图 2 所示.图中的运算放大器皆选用 LM324,电路中各元件的数值如图中标示,它们由系统的参数决定.用模拟乘法器实现系统(1)中的二次非线性函数.通过电路中开关的切换可进行子系统间的转换,开关 K_1, K_2 的组合实现非线性函数 x^2, xy 和 y^2 的切换;开关 K_3, K_4 和 K_5 实现线性函数 dx, dy, dz 和 dw 的切换;开关 K_6, K_7 的组合实现非线性函数 xw, yw 和 yz 的切换.利用图中开关的切换,一个电路可以实现多个四维超混沌系统的功能,操作灵活简便.

4. 切换系统的特性分析

将 $f_1(x, y) = x^2, f_2(x, y, z, w) = y, f_3(x, y, z, w) = yz$ 代入系统(1)得到子系统(a)的表达式为

的子系统,但有些子系统不稳定,例如取 $f_1(x, y) = x^2, f_2(x, y, z, w) = x, f_3(x, y, z, w) = yw$ 构成的子系统不稳定.研究表明,系统(1)中能够成为混沌系统的子系统有 27 个.以下将以表 1 中选定的具有代表性的 8 个子系统为例,对关联可切换混沌系统的构建及其特性进行分析.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a(y - x) + w, \\ \dot{y} &= by - 10xz, \\ \dot{z} &= -cz + 10x^2, \\ \dot{w} &= dy + 10yz. \end{aligned} \quad (2)$$

当系统参数 a, b, c, d 取正数时,子系统(a)只有唯一的平衡点 $P^0(0, 0, 0, 0)$,在平衡点 P^0 处的 Jacobian 矩阵为

$$J = \begin{bmatrix} -a & a & 0 & 1 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c & 0 \\ 0 & d & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3)$$

(3)式在平衡点 P^0 处的特征值为 $\lambda_1 = -a, \lambda_2 = b, \lambda_3 = -c, \lambda_4 = 0$.四个特征值皆为实数,其中一个特征值大于零,一个特征值等于零,两个特征值小于零,因而平衡点 P^0 是不稳定的鞍结点.数值计算的结果表明,当系统参数为 $a = 40, b = 25, c = 3, d = 1$ 时,子系统(a)的 Lyapunov 指数(LE)为 $\lambda_{L1} = 3.7097, \lambda_{L2} = 0.6743, \lambda_{L3} = 0, \lambda_{L4} = -27.4453$.拥有两个正的 Lyapunov 指数,子系统(a)为超混沌系统,分形维数 $\left(D_L = j + \frac{1}{|\lambda_{(j+1)}|} \sum_{i=1}^j \lambda_{Li} \right)$ 为 3.1597.根据图 2 设计的电路,利用 EWB 电子电路仿真软件在模拟示波器上得到子系统(a)的部分相图如图 3 所示,其坐标系设置和坐标轴的单位为(a) $x-z$ (1 V/格, 1 V/格)(b) $z-u$ (1 V/格, 0.5 V/格).

同理可得,子系统(b)只有唯一的平衡点 $P^0(0, 0, 0, 0)$,Jacobian 矩阵在平衡点 P^0 处的特征值为 $\lambda_1 = -40.025, \lambda_2 = 25, \lambda_3 = -3, \lambda_4 = 0.025$.四个特征值皆为实数,且有两个特征值大于零,两个特征值小

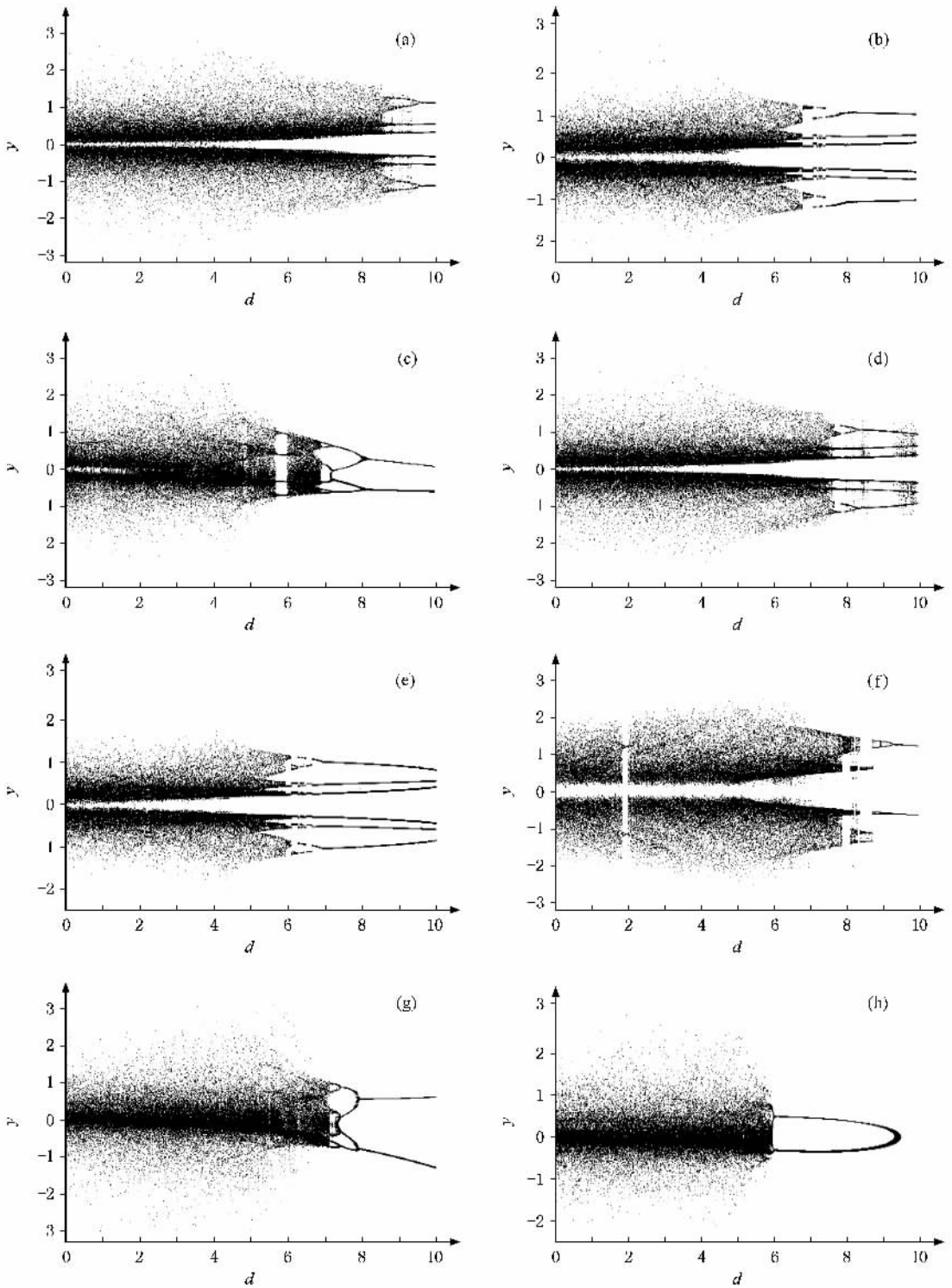


图 1 8 个子系统变量 y 随系统参数 d 变化的分岔图 (a)子系统(a)(b)子系统(b)(c)子系统(c)(d)子系统(d)(e)子系统(e)(f)子系统(f)(g)子系统(g)(h)子系统(h)

于零,因而平衡点 P^0 是不稳定的鞍结点.当系统参数为 $a = 40, b = 25, c = 3, d = 1$ 时,子系统(b)的 Lyapunov 指数 (LE)为 $\lambda_{11} = 4.1326, \lambda_{12} = 1.1674, \lambda_{13} = 0, \lambda_{14} = -29.5433$.拥有两个正的 Lyapunov 指数,

子系统 (b)为超混沌系统,分形维数为 3.1794.子系统 (b)的部分相图如图 4 所示.

子系统 (c)有 $P^0(0, 0, 0, 0)$ 和 $P(-7.5, -0.1, 0.0333, -296)$ 两个平衡点, Jacobi 矩阵在平衡点 P^0

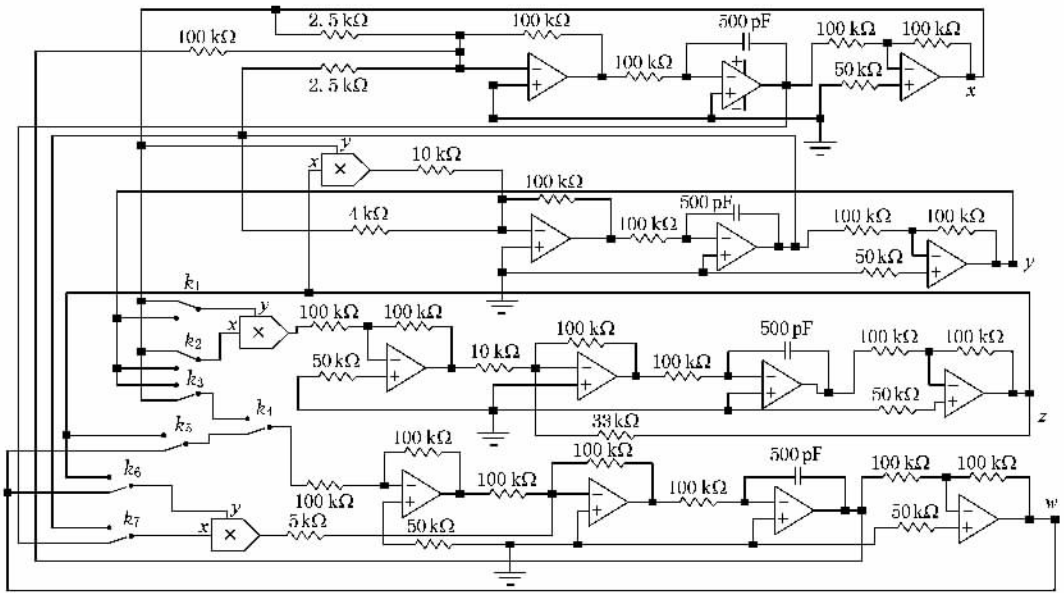


图 2 切换超混沌系统的电路图

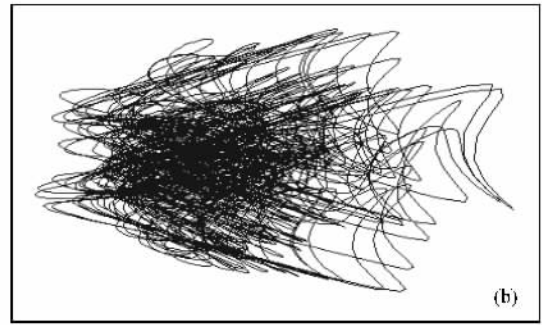
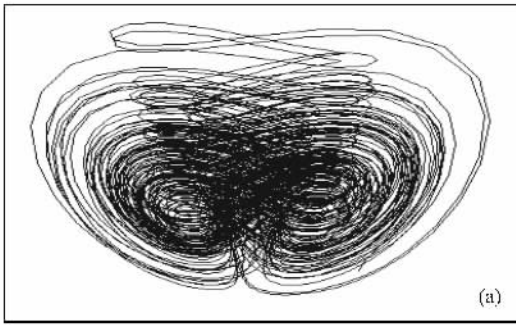


图 3 子系统 (a) 的部分相图 (a) $x-z$ (b) $z-w$

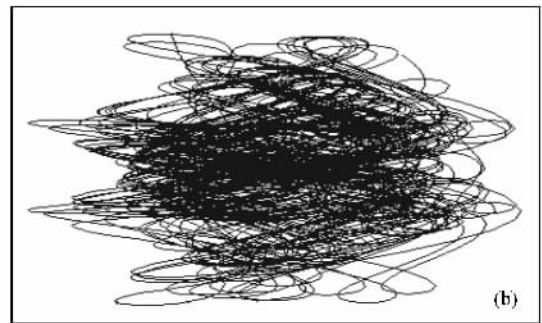
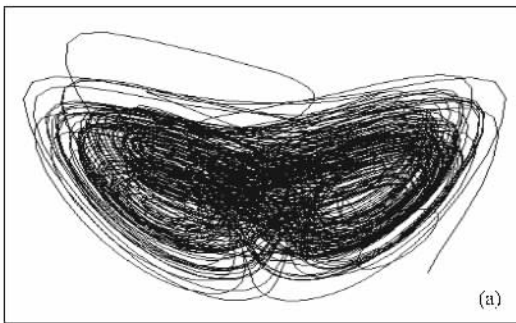


图 4 子系统 (b) 的部分相图 (a) $x-z$ (b) $z-w$

处的特征值为 $\lambda_1 = -a$, $\lambda_2 = b$, $\lambda_3 = -c$, $\lambda_4 = 0$. 在平衡点 P 处的特征值为 $\lambda_1 = -39.7806$, $\lambda_2 = 29.4330$, $\lambda_3 = -7.6524$, $\lambda_4 = 0$, 四个特征值皆为实数, 有一个特征值大于零, 一个特征值等于零, 两个特征值小于零, 因而两个平衡点都是不稳定的鞍结

点. 当系统参数为 $a = 40$, $b = 25$, $c = 3$, $d = 1$ 时, 子系统 (c) 的 Lyapunov 指数 (LE) 为 $\lambda_{11} = 3.1216$, $\lambda_{12} = 0.3714$, $\lambda_{13} = 0$, $\lambda_{14} = -26.7481$. 分形维数为 3.1304, 系统 (c) 为超混沌系统. 子系统 (c) 的部分相图如图 5 所示.

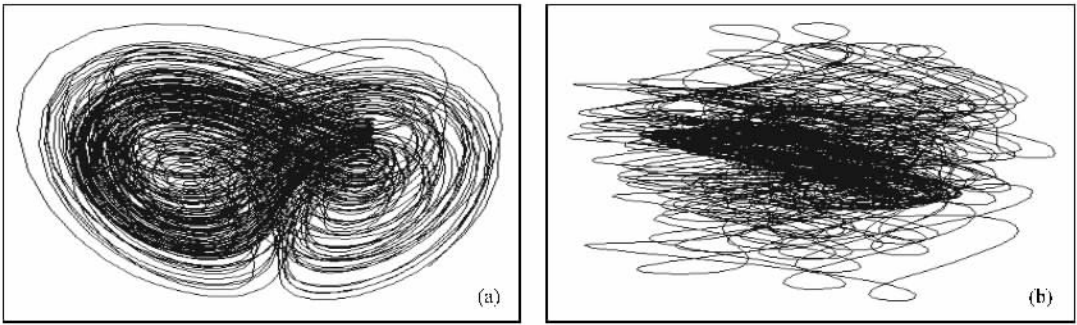


图 5 子系统 (c) 的部分相图 (a) $x-z$ (b) $z-w$

子系统(d)有 $P^0(0, 0, 0, 0), P^1(-0.8902, -0.9406, 2.6415, -0.1), P^2(0.8927, 0.9485, 2.6564, -0.1)$ 三个平衡点, Jacobi 矩阵在平衡点 P^0 处的特征值为 $\lambda_1 = -40.025, \lambda_2 = 25, \lambda_3 = -3, \lambda_4 = 0.025$. 在平衡点 P^1 处的特征值为 $\lambda_1 = -24.6155; \lambda_{2,3} = 3.3078 \pm 15.9218i, \lambda_4 = -1$ 在平衡点 P^2 处的特征值为 $\lambda_1 = -24.5206, \lambda_{2,3} = 3.2603 \pm 16.0256i,$

$\lambda_4 = -1$. P^1 和 P^2 处四个特征值中有两个实部大于零的复特征值, 两个小于零的实特征值, 因而两个平衡点都是不稳定的鞍焦点. 当系统参数为 $a = 40, b = 25, c = 3, d = 1$ 时, 子系统(d)的 Lyapunov 指数 (LE) 为 $\lambda_{11} = 2.4257, \lambda_{12} = 0.2489, \lambda_{13} = 0, \lambda_{14} = -23.4181$. 分形维数为 3.1142, 系统(d)为超混沌系统. 子系统(d)的部分相图如图 6 所示.

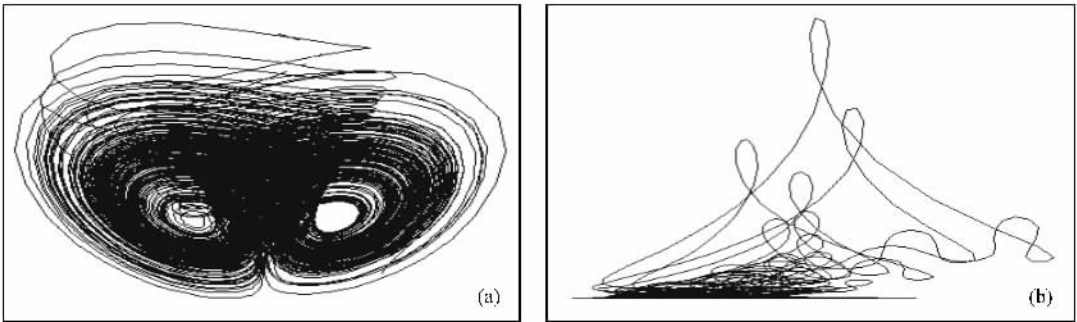


图 6 子系统 (d) 的部分相图 (a) $x-z$ (b) $z-w$

子系统(e)有 $P^0(0, 0, 0, 0), P^1(-0.8666, -0.8666, 2.5, 0), P^2(0.8666, 0.8666, 2.5, 0)$ 三个平衡点, Jacobi 矩阵在平衡点 P^0 处的特征值为 $\lambda_1 = -40, \lambda_2 = 25, \lambda_3 = -3, \lambda_4 = 1$; 在平衡点 P^1 处的特征值为

$\lambda_1 = -38.5249, \lambda_{2,3} = 10.2625 \pm 17.1375i, \lambda_4 = 9.6660$; 在平衡点 P^2 处的特征值为 $\lambda_1 = 37.5643, \lambda_2 = -42.0266, \lambda_3 = -13.5377, \lambda_4 = -7.6660$. P^0 和 P^2 是不稳定的鞍结点, P^1 是不稳定的鞍焦点. 当系统参

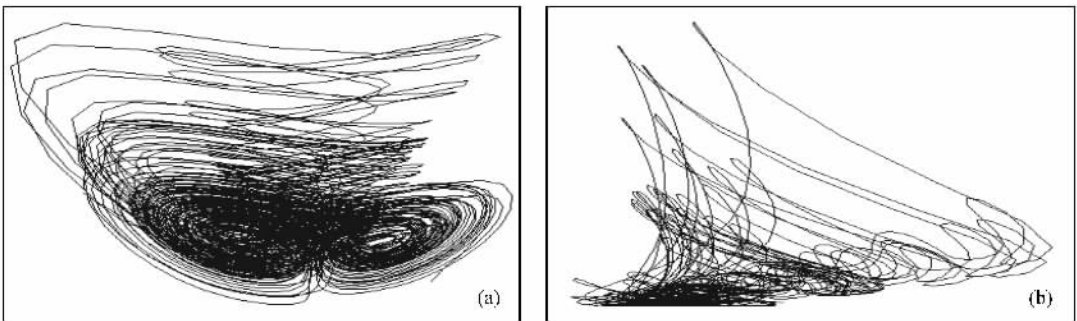


图 7 子系统 (e) 的部分相图 (a) $x-z$ (b) $z-w$

数为 $a = 40, b = 25, c = 3, d = 1$ 时, 子系统(e)的 Lyapunov 指数(LE)为 $\lambda_{L1} = 4.5247, \lambda_{L2} = 1.7798, \lambda_{L3} = 0, \lambda_{L4} = -29.1481$. 分形维数为 3.2163, 系统(e)为超混沌系统. 子系统(e)的部分相图如图 7 所示.

子系统(f)有 $P^0(0, 0, 0, 0), P^1(-0.217, -3.464, 40, 1.154), P^2(0.217, 3.464, 40, -1.154)$ 三个平衡点, Jacobi 矩阵在平衡点 P^0 处的特征值为 $\lambda_1 = -40, \lambda_2 = 25, \lambda_3 = -3, \lambda_4 = 0$. 在平衡点 P^1 处

的特征值为 $\lambda_1 = -0.0331, \lambda_{2,3} = -7.17 \pm 122.89i, \lambda_4 = -0.3499$; 在平衡点 P^2 处的特征值为 $\lambda_1 = -0.0332, \lambda_{2,3} = -7.46 \pm 122.89i, \lambda_4 = 0.3487$. P^0 和 P^2 不稳定, P^1 是稳定的鞍焦点. 当系统参数为 $a = 40, b = 25, c = 3, d = 1$ 时, 子系统(f)的 Lyapunov 指数(LE)为 $\lambda_{L1} = 4.2457, \lambda_{L2} = 1.4219, \lambda_{L3} = 0, \lambda_{L4} = -29.9417$. 分形维数为 3.1893, 系统(f)为超混沌系统. 子系统(f)的部分相图如图 8 所示.

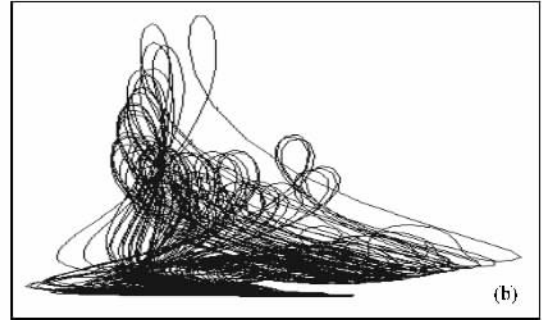
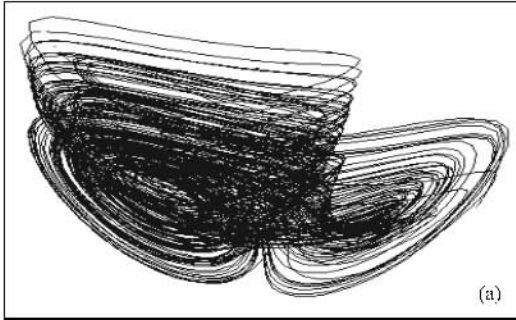


图 8 子系统(f)的部分相图 (a) $x-z$ (b) $z-w$

子系统(g)有 $P^0(0, 0, 0, 0), P^1(-0.422, -0.1, 0.5936, -3.22), P^2(0.866, 0.866, 2.5, 0), P^3(-0.866, -0.866, 2.5, 0)$ 四个平衡点, Jacobi 矩阵在平衡点 P^0 处的特征值为 $\lambda_1 = -40, \lambda_2 = 25, \lambda_3 = -3, \lambda_4 = 1$. 在平衡点 P^1 处的特征值为 $\lambda_1 = -36.7698, \lambda_{2,3} = -0.7340 \pm 1.3316i, \lambda_4 = 20.2378$; 在平衡点 P^2 处的特征值为 $\lambda_1 = -25.4770, \lambda_{2,3} = 3.7385 \pm 14.8834i, \lambda_4 = 9.66$; 在平衡点 P^3 处的特征值为 $\lambda_1 = -25.4770, \lambda_{2,3} = 3.7385 \pm 14.8834i, \lambda_4 = -7.66$. P^0 是不稳定的鞍结点, P^1, P^2 和 P^3 是不稳定的鞍焦点. 当系统参数为 $a = 40, b = 25, c = 3, d = 1$ 时, 子系统(g)的 Lyapunov 指数(LE)为 $\lambda_{L1} = 3.4275, \lambda_{L2} = 0.4921, \lambda_{L3} = 0, \lambda_{L4} = -27.9741$. 分形维数为 3.1401, 系统(g)为超混沌系统. 子系统(g)的

部分相图如图 9 所示.

子系统(h)有 $P^0(0, 0, 0, 0), P^1(0.866, 0.865, 2.5, -0.1), P^2(-0.866, -0.867, 2.5, -0.1)$ 三个平衡点, Jacobi 矩阵在平衡点 P^0 处的特征值为 $\lambda_1 = -40, \lambda_2 = 25, \lambda_3 = -3, \lambda_4 = 0$. 在平衡点 P^1 处的特征值为 $\lambda_1 = -23.6517, \lambda_{2,3} = 2.8258 \pm 15.6742i, \lambda_4 = 8.66$; 在平衡点 P^2 处的特征值为 $\lambda_1 = -23.6517, \lambda_{2,3} = 2.8258 \pm 15.6742i, \lambda_4 = -8.66$; P^0 是不稳定的鞍结点, P^1 和 P^2 是不稳定的鞍焦点. 当系统参数为 $a = 40, b = 25, c = 3, d = 1$ 时, 子系统(h)的 Lyapunov 指数(LE)为 $\lambda_{L1} = 2.5831, \lambda_{L2} = 0.2556, \lambda_{L3} = 0, \lambda_{L4} = -26.4934$. 分形维数为 3.1074, 系统(h)为超混沌系统. 子系统(h)的部分相图如图 10 所示.

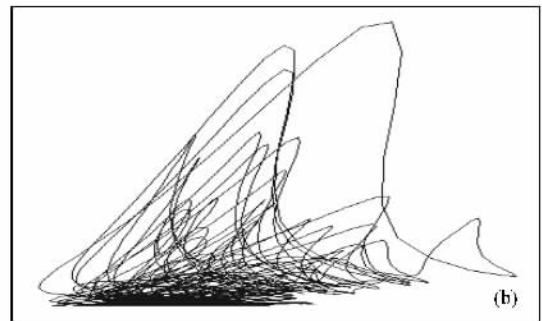
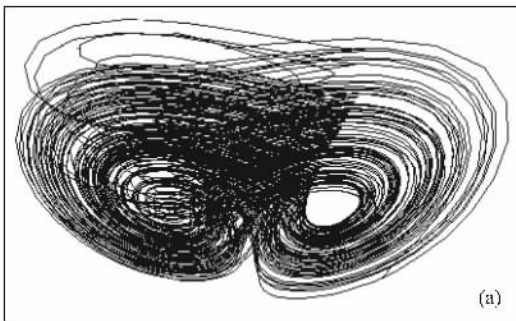
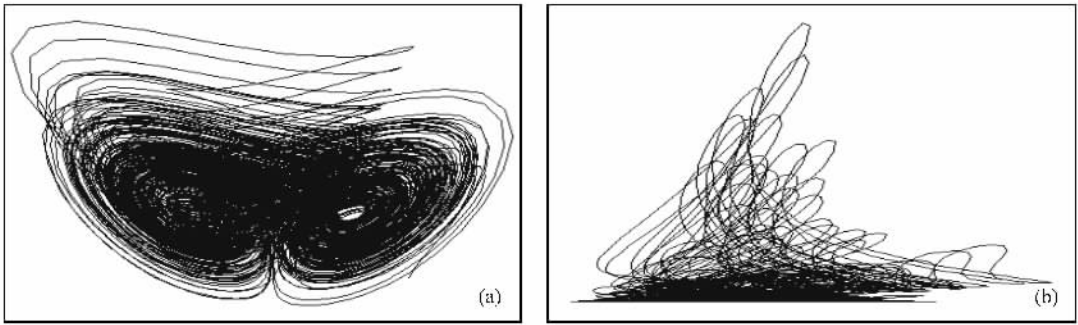


图 9 子系统(g)的部分相图 (a) $x-z$ (b) $z-w$

图 10 子系统 h 的部分相图 (a) $x-z$ (b) $z-w$

5. 结 论

本文建构了一类包含多个子系统的关联且可切换的四维超混沌系统,子系统间既相对独立,自成体系,又存在着很紧密的内在联系.利用系统选择器,

可以在各个子系统间随机切换,切换操作灵活方便,组合的方式变化多样,系统动力学行为演化的差异较大.人们可以根据实际应用的需要,对该类系统的切换形式实施控制和操作,因此,这类系统具有重要的应用价值.

- [1] Thuraiappah S, Thiagaligam K 2006 *IEEE Trans. Circuits Syst.* **1** 53 1597
- [2] Jing Z J, Huang J C 2005 *Chaos Soliton. Fract.* **23** 887
- [3] Riccardo R, Gianluca M, Gianluca S 2004 *IEEE Trans. Circuits Syst.* **1** 51 1336
- [4] Naoki M, Goce J, Kazuyuki A 2006 *IEEE Trans. Circuits Syst.* **1** 53 1341
- [5] Tam W M, Lau F C M, Tse C K 2004 *IEEE Trans. Circuits Syst.* **1** 51 1868
- [6] Liu Y Z, Jiang C S, Lin C S, Jiang Y M 2007 *Chin. Phys.* **16** 660
- [7] Qi G Y, Chen G R, Li S W, Zhang Y H 2006 *Int. J. Bifurcat. Chaos* **16** 859
- [8] Lü J H, Yu S M, Chen G R 2006 *IEEE Trans. Circuits Syst.* **1** 53 149
- [9] Zheng Z, Lü J, Zhou T, Chen G, Zhang S 2004 *Chaos Soliton. Fract.* **20** 277
- [10] Liu Y Z, Fei S M 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 1035 (in Chinese) [刘扬正、费树岷 2006 物理学报 **55** 1035]
- [11] Zhang J S, Xiao X C 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 2121 (in Chinese) [张家树、肖先赐 2001 物理学报 **50** 2121]
- [12] Zhang Y, Chen T Q 2005 *J. UEST China* **34** 763 (in Chinese) [张勇、陈天麒 2005 电子科技大学学报 **34** 763]
- [13] Liu Y Z, Jiang C S, Lin C S, Sun H 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 5131 (in Chinese) [刘扬正、姜长生、林长圣、孙晗 2007 物理学报 **56** 5131]
- [14] Liu Y Z, Jiang C S, Lin C S, Xiong X, Shi L 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 3107 (in Chinese) [刘扬正、姜长生、林长圣、熊星、石磊 2007 物理学报 **56** 3107]
- [15] Deng X L, Hang H B 2002 *Phys. Rev. E* **65** 055202-1
- [16] Wang F Z, Qi G Y, Chen Z Q, Zhang Y H, Yuan Z Z 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 4005 (in Chinese) [王繁珍、齐国元、陈增强、张宇辉、袁著祉 2006 物理学报 **55** 4005]
- [17] Wang F Q, Liu C X 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 5061 (in Chinese) [王发强、刘崇新 2006 物理学报 **55** 5061]
- [18] Wang F Q, Liu C X 2006 *Chin. Phys.* **15** 963
- [19] Zou Y L, Zhu J, Chen G R 2005 *Chin. Phys.* **14** 697
- [20] Wang F Z, Chen Z Q, Wu W J, Yuan Z Z 2007 *Chin. Phys.* **16** 3238
- [21] Liu C X 2007 *Chin. Phys.* **16** 3279
- [22] Liu Y Z, Jiang C S, Lin C S, Xiong X, Shi L 2007 *J. Elec. Info. Tech.* **29** 2641 (in Chinese) [刘扬正、姜长生、林长圣、熊星、石磊 2007 电子与信息学报 **29** 2641]

Building and analysis of properties of a class of correlative and switchable hyperchaotic system ^{*}

Liu Yang-Zheng^{1,2)†} Jiang Chang-Sheng¹⁾

¹ *College of Automatic Engineering , Nanjing University of Aeronautics and Astronautics , Nanjing 210016 , China)*

² *Institute of Nonlinear Physics , Nanjing Institute of Technology , Nanjing 211167 , China)*

(Received 7 May 2008 ; revised manuscript received 2 July 2008)

Abstract

A class of four-dimensional correlative and switchable hyperchaotic systems are built by adding an additional state , the nonlinear functions and anti-control into the three-dimensional chaotic system. Some of their basic properties are studied , such as the feature of equilibrium , the phase portraits of hyperchaotic attractor , Lyapunov exponent and the evolution of the dynamical action . The practical circuit is designed to realise these systems .

Keywords : hyperchaotic system , switching , bifurcation diagram , Lyapunov exponent

PACC : 0545

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 90405011) , the Natural Science Foundation of Jiangsu Province ,China (Grant No. 07KJD120081) and the Natural Science Foundation of Nanjing Institute of Technology ,China (Grant No. KXJ07068) .

[†] E-mail : lyz64@njit.edu.cn ; lyz_6410@163.com