

新三维混沌系统及其电路仿真^{*}

唐良瑞[†] 李 静 樊 冰 翟明岳

(华北电力大学电气与电子工程学院, 北京 102206)

(2008 年 5 月 21 日收到, 2008 年 7 月 23 日收到修改稿)

提出了一个新的不同于 Lorenz 系统和 Chen 系统的三维连续自治混沌系统. 该系统含有五个参数, 其中两个方程中各含有一个非线性乘积项. 通过理论推导、数值仿真、Lyapunov 指数谱、分岔图、Lyapunov 维数、Poincare 截面图研究了系统的基本动力学特性, 并分析了改变不同参数时系统动力学行为的变化. 最后设计了硬件电路并运用电子工作平台 Multisim 软件对该电路进行仿真实验, 证实了该混沌系统的可实现性.

关键词: 混沌系统, Lyapunov 指数, Poincare 截面图, 电路仿真

PACC: 0545

1. 引 言

混沌是发生在确定性系统中的一种不确定行为. 混沌状态是平衡状态、周期状态、拟周期状态以外的第四种状态. 自从麻省理工学院的 Lorenz 于 20 世纪 60 年代在数值实验中偶然发现第一个混沌吸引子以来, Lorenz 系统作为第一个混沌的物理和数学模型, 成为后人研究混沌理论的出发点和基石^[1, 2]. 1999 年陈关荣在混沌系统反控制中发现了一个与 Lorenz 系统不拓扑等价的新混沌吸引子 Chen 系统^[3, 4]. 2002 年吕金虎等进一步发现了 Lü 系统^[5]. 2004 年, 刘崇新等又提出了 Liu 系统^[6]. 同年, Lü 等对 Lorenz 系统进行修改, 发现了一类 Lorenz 混沌系统, 并对该混沌系统进行了详细分析^[7].

近年来, 随着人们对混沌现象的深入研究, 对其动力学行为和基本特性的逐步了解, 混沌在工程领域的应用已取得了一定进展. 在图像数据加密、保密通信、电力电网动态分析和保护、机械振动故障诊断、电子振荡发生器设计、信号检测与处理中得到了有效的应用. 随着混沌理论的不断发展和完善, 混沌将会在很多领域得到广泛应用. 在这些应用中, 需要有目的地控制混沌或者加强已存在的混沌行为, 通过电路设计来产生混沌信号和实现混沌行为. 国内外对混沌和超混沌生成及应用的研究已成为一个

热点^[8, 9].

本文提出了一个新的三维自治混沌系统. 该系统含有五个参数, 其中两个方程中各含有一个非线性乘积项. 通过理论推导、数值仿真、Lyapunov 指数谱、分岔图、Lyapunov 维数、Poincare 截面图研究了系统的基本动力学特性, 验证了系统的混沌特性. 设计了该混沌系统的硬件电路, 并进行了仿真实验, 证实了该系统的可实现性.

2. 新混沌系统基本分析

2.1. 新的混沌系统模型

本文提出的新的三维自治混沌系统的数学模型为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -ax + by, \\ \dot{y} &= cx - xz - dy, \\ \dot{z} &= xy - e(x + z). \end{aligned} \quad (1)$$

式中, a, b, c, d, e 是实常数. 当参数 $a = 25.6, b = 66.8, c = 39.22, d = 0.2, e = 4$ 时, 系统存在一个典型的混沌吸引子.

2.2. 理论分析

2.2.1 耗散性和吸引子的存在性

由于

^{*} 国家自然科学基金(批准号: 60402004)资助的课题.

[†] E-mail: tangliangrui@163.com

$$\nabla V = \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{z}}{\partial z} = -a - d - e, \quad (2)$$

当 $a + d + e > 0$ 时, 则系统(1)是耗散的, 且以如下指数形式收敛:

$$\frac{dV}{dt} = e^{-(a+d+e)}, \quad (3)$$

即体积元 V_0 在 t 时刻收缩为体积元 $V_0 e^{-(a+d+e)t}$. 这意味着, 当 $t \rightarrow \infty$ 时, 包含系统轨迹的每个体积元以指数率 $-a - d - e$ 收缩到零. 因此, 所有系统轨迹线最终会被限制在一个体积为零的集合上, 且它渐进运动固定在一个吸引子上.

2.2.2. 平衡点及稳定性

令方程组(1)的右边等于零, 即

$$\begin{aligned} -ax + by &= 0, \\ cx - xz - dy &= 0, \\ xy - e(x + z) &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

得到三个平衡点为

$$\begin{aligned} s_0 &= (0 \ 0 \ 0), \\ s_1 &= (x_1 \ y_1 \ z_1), \\ s_2 &= (x_2 \ y_2 \ z_2). \\ x_{1,2} &= \frac{be \pm \sqrt{b^2 e^2 - 4a^2 bc + 4abce}}{2a}, \\ y_{1,2} &= \frac{be \pm \sqrt{b^2 e^2 - 4a^2 bc + 4abce}}{2b}, \\ z_1 &= z_2 = c - \frac{ad}{b}. \end{aligned}$$

由于系统(1)参数满足 $b^2 e + 4abc > 4a^2 d$, 所以系统有三个平衡点. 把系统(1)在平衡点处线性化的特征多项式统一表示为

$$f(\lambda) = \lambda^3 + A\lambda^2 + B\lambda + C, \quad (5)$$

在 s_0 处将系统(1)线性化, 得 Jacobi 矩阵 J_0 和特征多项式 $f(\lambda)$, 有

$$J_0 = \begin{bmatrix} -a & b & 0 \\ c & -d & 0 \\ -e & 0 & -e \end{bmatrix},$$

$$f(\lambda) = \lambda^3 - (a + d + e)\lambda^2 + (ad - bc + ae + de)\lambda + e(bc - ad) \quad (6)$$

由(5)和(6)式可知, 此时

$$\begin{aligned} A &= -(a + d + e), \\ B &= ad - bc + ae + de, \\ C &= e(bc - ad). \end{aligned} \quad (7)$$

根据 Routh-Hurwitz 条件^[10], 所有的特征值都具有负实部当且仅当 $A > 0, B > 0, C > 0, AB - C > 0$ 时, 平衡点才为稳定点. 在 $a = 25.6, b = 66.8, c = 39.22, d$

$= 0.2, e = 4$ 条件下, 系统(1)在平衡点 s_0 处的特征值不都具有负实部, 因此平衡点 $s_0 = (0 \ 0 \ 0)$ 是不稳定的.

把系统(1)分别在平衡点 s_1, s_2 处线性化, 可以得到与(6)式相似的特征多项式. 在 $a = 25.6, b = 66.8, c = 39.22, d = 0.2, e = 4$ 的条件下, 根据 Routh-Hurwitz 条件, 可以得出这两个平衡点都是不稳定的.

2.3. 混沌吸引子

当参数 $a = 25.6, b = 66.8, c = 39.22, d = 0.2, e = 4$ 时, 系统(1)存在一个典型的混沌吸引子. 本文采用了四阶 Runge-Kutta 离散化算法, 迭代 15000 次后取后面 14000 个数据得到的混沌吸引子相图如图 1 所示.

由图 1 可知系统(1)的混沌吸引子轨线在特定的吸引域内具有遍历性. 这个系统的混沌吸引子与 Lorenz 系统的吸引子形状不相同, 与陈关荣发现的 Chen 系统吸引子以及近年来刘崇新等发现的 Liu 吸引子也不同.

系统(1)产生的序列具有非周期性, 而且对初始值极为敏感, 其时域波形如图 2 所示, 初始值敏感特性如图 3 所示, 即使初始值 x 只相差 0.0000001 ($x_0 = 1, x'_0 = 1.0000001$, 其余初始值不变 $y_0 = 1, z_0 = 1$), 其波形在 $t > 9$ 后完全不相同. 并且系统的频谱是连续谱, 如图 4 所示. 频谱图中没有明显的波峰, 并且峰值连成一片, 也说明了系统(1)是混沌系统, 且序列的频谱很宽.

2.4. Lyapunov 指数和 Lyapunov 维数

混沌吸引子的相邻轨线之间呈现出彼此相互排斥的趋势, 并以指数速率相互分离, 而 Lyapunov 指数是定量描述轨线相互排斥和吸引的量. 特别是系统的最大 Lyapunov 指数是判断混沌系统的重要特征. 计算最大 Lyapunov 指数的方法很多, 如最小数据量法、Wolf 法、Jacobi 法等. 本文利用奇异值分解^[11]的方法计算出系统(1)的三个 Lyapunov 指数为 $\lambda_1 = 3.1155, \lambda_2 = 0.1297, \lambda_3 = -32.6233$, 其最大 Lyapunov 指数比 Lorenz 系统的最大 Lyapunov 指数要大 ($\lambda_1 = 1.50$), 说明系统(1)比 Lorenz 系统运动轨迹更加复杂. 并且该系统具有两个正的 Lyapunov 指数, 具有超混沌的特征, 系统的动态行为更加难以预测. 新混沌系统的 Lyapunov 维数为

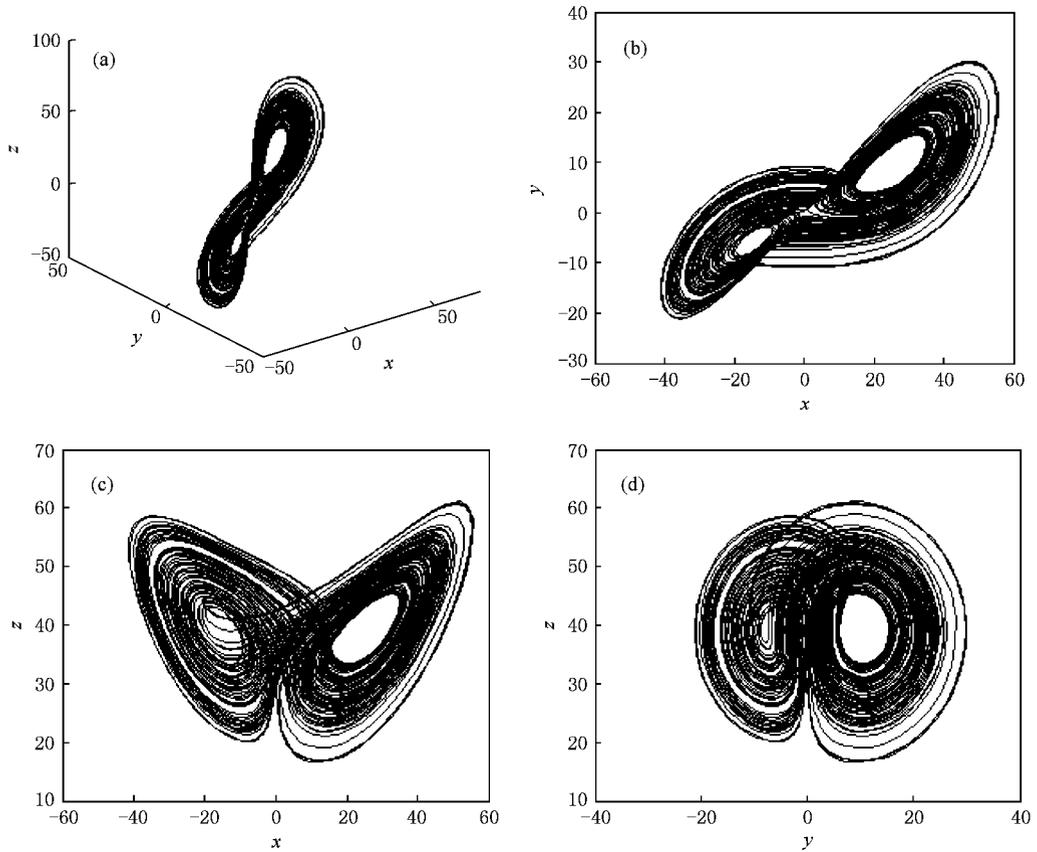


图1 系统(1)的典型混沌吸引子图 (a)系统(1)的 x - y - z 三维空间相图 (b) x - y 平面相图 (c) x - z 平面相图 (d) y - z 平面相图

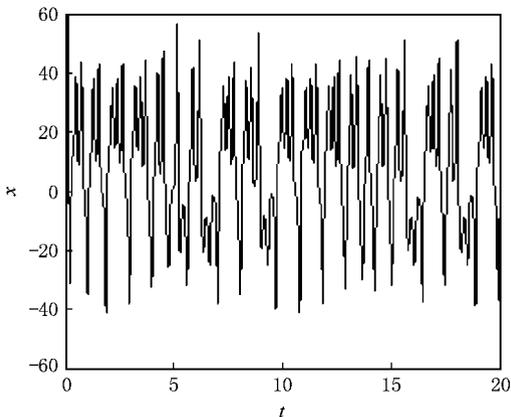


图2 系统(1) x 的时域波形图

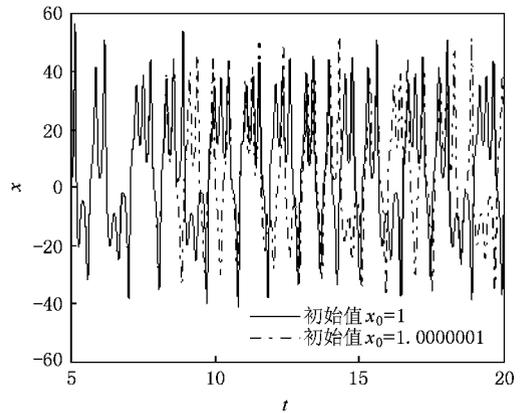


图3 系统(1) x 对初值的敏感性

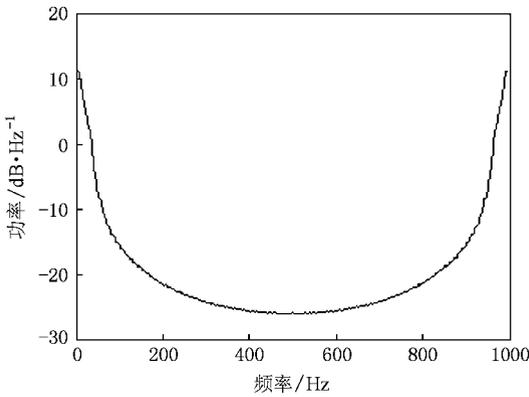
$$\begin{aligned}
 D_L &= j + \frac{1}{|\lambda_{j+1}|} \sum_{i=1}^j \lambda_i \\
 &= 2 + \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)}{|\lambda_3|} \\
 &= 2 + \frac{(3.1155 + 0.1297)}{|-32.6233|} = 2.097. \quad (8)
 \end{aligned}$$

由此可见，这个新系统的 Lyapunov 维数是分数

维数，从而验证了该系统为混沌系统。

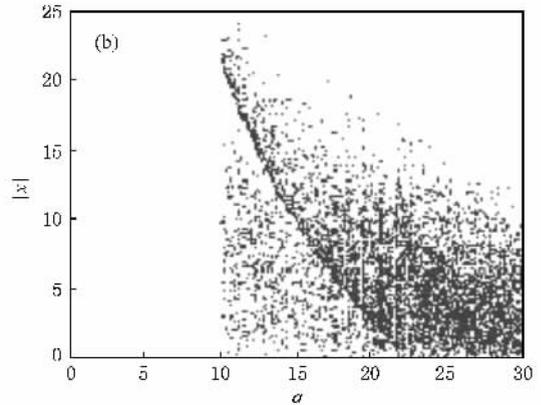
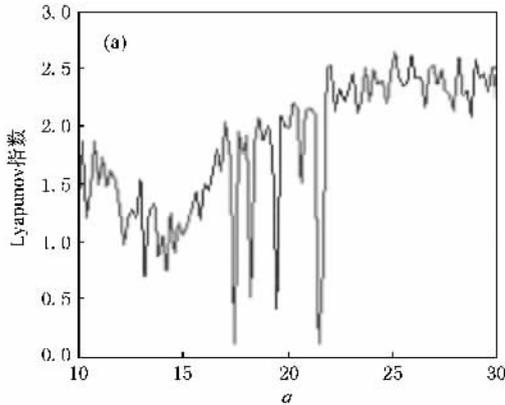
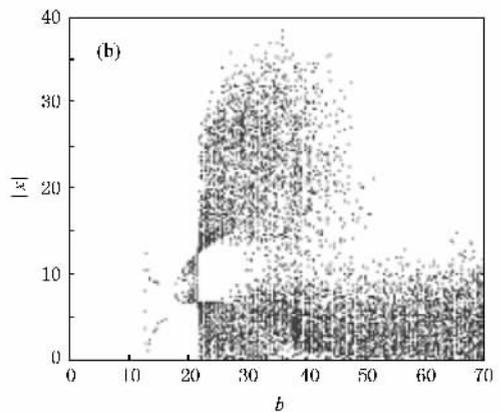
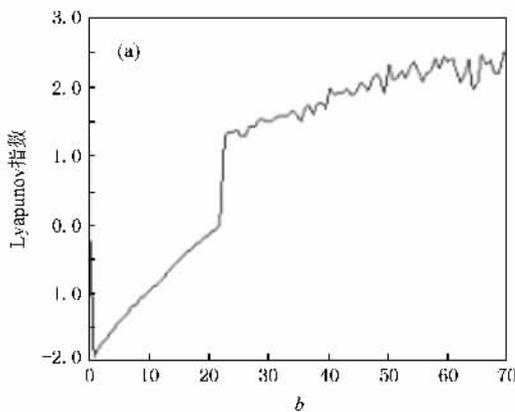
2.5. 系统参数的影响

随着系统参数的改变，系统平衡点的稳定性将会发生变化，从而系统也将处于不同的状态。用分岔图和最大 Lyapunov 指数谱图(LE 谱)可以很直观地

图4 系统(1) x 的频谱图

分析出各个系统参数变化时系统的变化情况.

1) 固定参数 $b = 66.8$, $c = 39.22$, $d = 0.2$, $e = 4$, 改变 a , $a \in [10, 30]$.

图5 a 变化时系统(1)的LE谱以及关于 x 的分岔图 (a)LE谱图 (b)关于 x 的分岔图图6 b 变化时系统(1)的LE谱以及关于 x 的分岔图 (a)LE谱图 (b)关于 x 的分岔图

3) 固定参数 $a = 25.6$, $b = 66.8$, $d = 0.2$, $e = 4$, 改变 c , 使 $c \in [0, 40]$.

当 $a \in [10, 30]$ 变化时, 系统的 LE 谱以及关于 x 的分岔图如图 5 所示. 当有一个 LE 大于零时, 系统处于混沌状态. 由图 5(a) 可见, 随着 a 的变化, 系统的最大 LE 都是大于零的, 说明系统始终处于混沌状态. 所以 $a \in [10, 30]$ 时, 系统(1) 处于混沌状态.

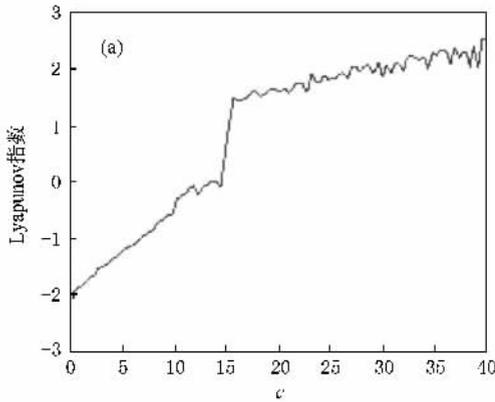
2) 固定参数 $a = 25.6$, $c = 39.22$, $d = 0.2$, $e = 4$, 改变 b , 使 $b \in [0, 70]$.

当 $b \in [0, 70]$ 变化时, 系统的 LE 谱以及关于 x 的分岔图如图 6 所示. 由图 6(a) 可见, 随着 b 在 $[0, 70]$ 范围内变化, 系统的 LE 指数也在变化. 当 $0 < b \leq 22$ 时, 系统 LE 指数小于 0, 系统为周期状态; 当 $22 < b \leq 70$ 时, 系统 LE 始终都大于零, 且都大于 1, 系统处于混沌状态, 随着 b 的增大, 系统的混沌性增强. 从图 6(b) 也可以看出系统的倍周期性质.

当 $c \in [0, 50]$ 变化时, 系统的 LE 谱图以及关于 x 的分岔图如图 7 所示. 由图 7(a) 可知, 随着 c 在

[0, 50] 范围内变化, 系统的 LE 指数也发生变化. 当 $0 < c \leq 13.8$ 时, 系统(1)处于周期状态; 当 $13.8 < c \leq 40$ 时, 系统(1)处于混沌状态. 与图 6(a) 相比较可知, 参数 c 和 b 对系统状态的影响类似, 即系统都是从周期状态向混沌状态转变.

4) 固定参数 $a = 25.6, b = 66.8, c = 39.22, e =$



4, 变化 d , 使 $d \in [0, 0.5]$.

当 $d \in [0, 0.5]$ 变化时, 系统的 LE 谱图以及关于 x 的分岔图如图 8 所示. 由图 8(a) 可知, 系统 LE 指数始终大于零, 且变化不大. 说明当 $0 \leq c \leq 0.5$ 时, 系统(1)始终处于混沌状态, 参数 d 对系统状态影响比 a, b, c 都小.

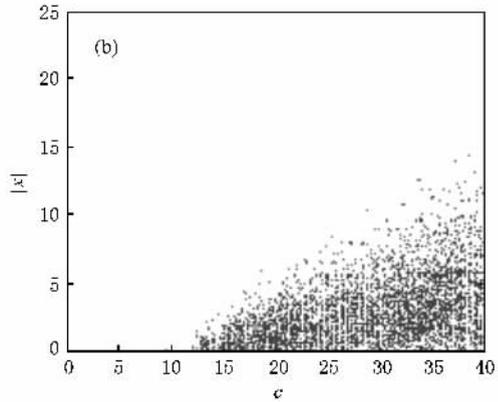


图 7 c 变化时系统(1)的 LE 谱以及关于 x 的分岔图 (a) LE 谱图 (b) 关于 x 的分岔图

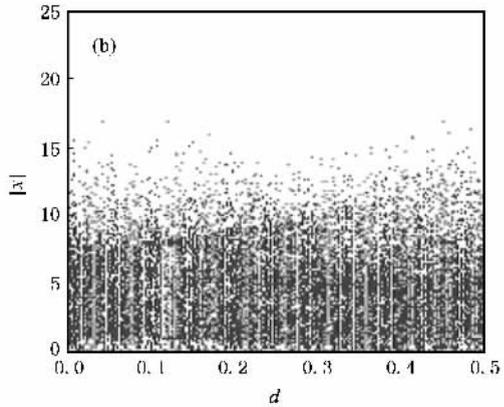
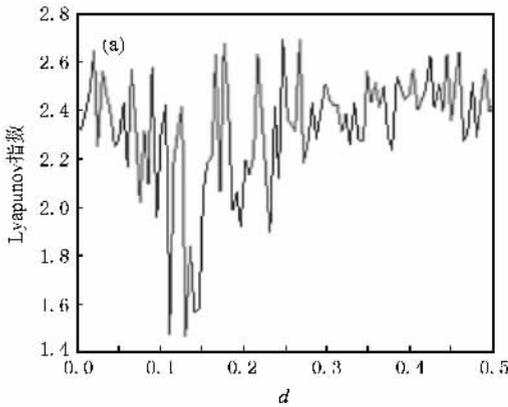


图 8 d 变化时系统(1)的 LE 谱以及关于 x 的分岔图 (a) LE 谱图 (b) 关于 x 的分岔图

5) 固定参数 $a = 25.6, b = 66.8, c = 39.22, d = 0.2$, 改变 e , 使 $e \in [0, 5]$.

当 e 在 $[0, 5]$ 变化时, 系统的 LE 谱图以及关于 x 的分岔图如图 9 所示. 由图 9(a) 可见, 当 $0 \leq e \leq 1.5$ 时, LE 时而大于 0, 时而小于 0, 系统在混沌状态和周期状态之间转变. 当 $0.9 < e \leq 1.3, 1.5 < e \leq 5$ 时, 系统 LE 始终大于 0, 系统始终处于混沌状态.

从以上分析可知, 参数 a, b, c, d, e 中 e 对系统状态影响最大, 因为当 e 在 $[0, 5]$ 范围内变化时, 系统将从混沌状态进入周期解状态, 然后又从周期解状态进入混沌状态. 因此, 系统(1)在参数范围 $a \in [10, 30], b \in (22, 70], c \in (13.8, 40], d \in [0, 0.5], e$

$\in (0.9, 1.3] \cup (1.5, 5)$ 内处于混沌状态. 由于参数变化范围没有固定, 本文只是在系统(1)处于一个典型奇怪吸引子的参数附近进行了变化. 可见, 该系统的动力学特征十分丰富. 由于该系统参数个数较多, 系统处于混沌状态的参数范围也较大, 这更加有利于将混沌系统应用于加密系统中. 因为一个好的加密系统的条件之一就是其密钥空间要大. 而本文提出的混沌系统正好可以满足这个条件.

2.6. Poincare 截面图

为了利于观察系统的动力学行为, Poincare 截面的选取要恰当, 此截面不能包含系统的轨线, 也不能

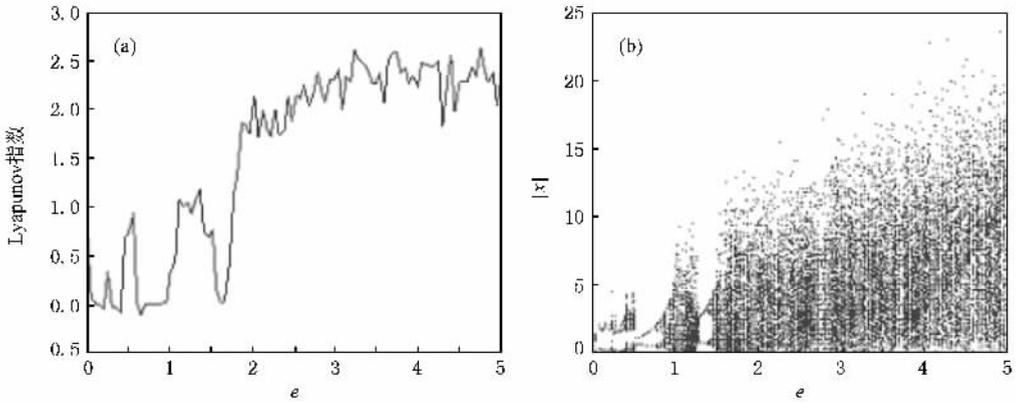


图9 e变化时系统(1)的LE谱以及关于x的分岔图 (a)LE谱图 (b)关于x的分岔图

与轨线相切.在给定的某组参数下,本文选取了相空间中穿过某一个平衡点的平面作为 Poincare 截面,然后观察 Poincare 截面上截点的情况,由此判断这组固定参数下系统的运动是否为混沌^[12].

在固定参数 $a = 25.6, b = 66.8, c = 39.22, d = 0.2, e = 4$ 时,系统的最大 LE 指数大于零,可知系统处于混沌状态,图 10 是此时系统在几个截面上的 Poincare 映像图.由图 10 可以看出,Poincare 截面上有一些成片的具有分形结构的密集点,吸引子的叶

片清晰可见,进一步说明了此时系统的运动是混沌的.

2.7. 电路仿真

采用线性电阻、线性电容、运算放大器(LM741)模拟乘法器(AD633)来设计实现系统(1)的电路.本文利用 Multisim 软件仿真的电路,其中运算放大器是用来进行电路的加减运算,模拟乘法器则用来实现系统中的非线性项.为了有效进行电路

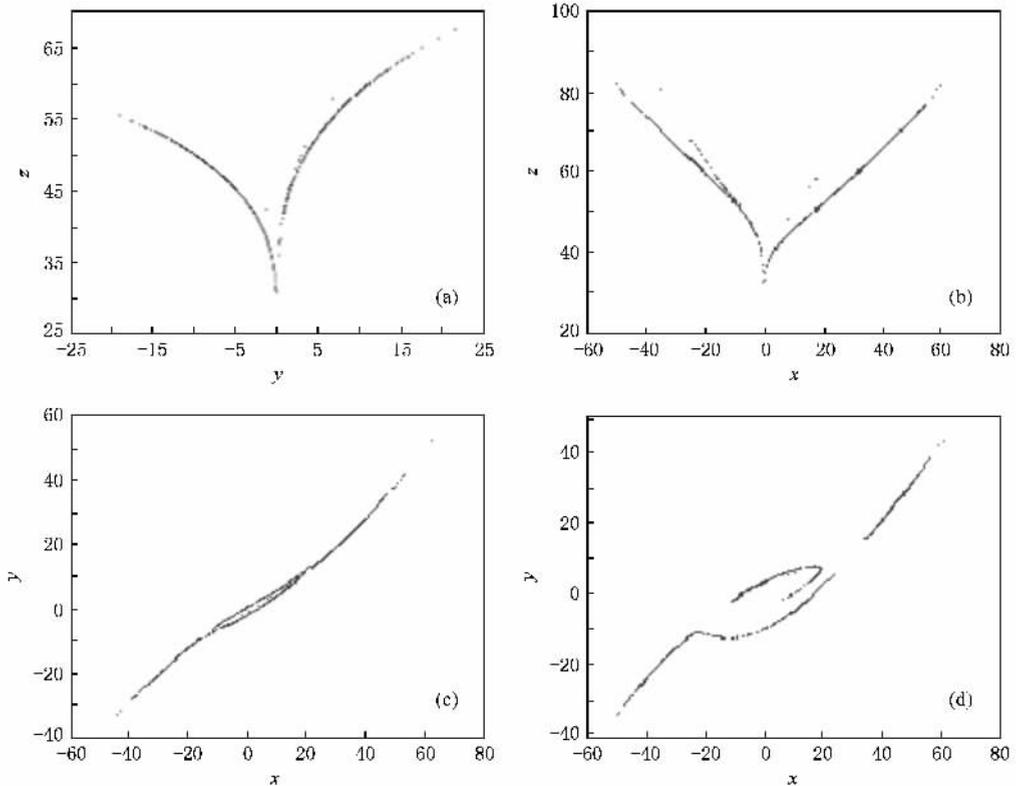


图 10 系统(1)Poincare 映像图 (a) $x = 0$ (b) $y = 0$ (c) $z = 40$ (d) $z = 50$

实验 把混沌信号的输出电平调小为原来的 1/10, 设

$$u = 10x, v = 10y, w = 10z. \quad (9)$$

又由于系统变量的变换不影响系统的状态及性能, 从而令

$$x = u, y = v, z = w, \quad (10)$$

方程组 (1) 可变为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -ax + by, \\ \dot{y} &= cx - 10xz - dy, \\ \dot{z} &= 10xy - e(x + z). \end{aligned} \quad (11)$$

根据电路理论以及各个元件的特性, 得其电路方程为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\frac{R_3}{R_2 R_4 C_1} x + \frac{R_3}{R_1 R_4 C_1} y, \\ \dot{y} &= \frac{R_8}{R_7 R_{10} C_2} x - \frac{R_8}{R_9 R_{10} C_2} xz - \frac{R_8}{R_{20} R_{10} C_2} y, \\ \dot{z} &= \frac{R_{12}}{R_{13} R_{11} C_3} xy - \frac{R_{12}}{R_{13} R_{17} C_3} x - \frac{R_{12}}{R_{13} R_{14} C_3} z. \end{aligned} \quad (12)$$

将方程 (11) 与 (12) 相比较, 可得

$$a = \frac{R_3}{R_2 R_4 C_1},$$

$$b = \frac{R_3}{R_1 R_4 C_1},$$

$$c = \frac{R_8}{R_7 R_{10} C_2},$$

$$10 = \frac{R_8}{R_9 R_{10} C_2} = \frac{R_{12}}{R_{13} R_{11} C_3},$$

$$d = \frac{R_8}{R_{20} R_{10} C_2},$$

$$e = \frac{R_{12}}{R_{13} R_{17} C_3} = \frac{R_{12}}{R_{13} R_{14} C_3}.$$

当电路中的各元器件值如图 11 中所示时, 利用示波器可得到 x 序列的时域图(见图 12). 利用示波器也可以看到混沌吸引子的相图(见图 13). 结果与数值仿真图基本相同, 但有一定的区别. 这是因为电路实验所的相图是从时间 $t = 0$ 开始绘制的, 而数值仿真是截取了混沌序列后 14000 个数据绘制而成, 取消了最开始的 1000 个数据. 所以该混沌系统的仿真实验和实际电路实验应该是基本符合的. 从而说明该混沌系统可以通过电路产生, 具有很大的实用性.

通过上述理论分析和仿真实验可以证实, 本文提出的非线性系统是一个新的混沌系统, 它具有一

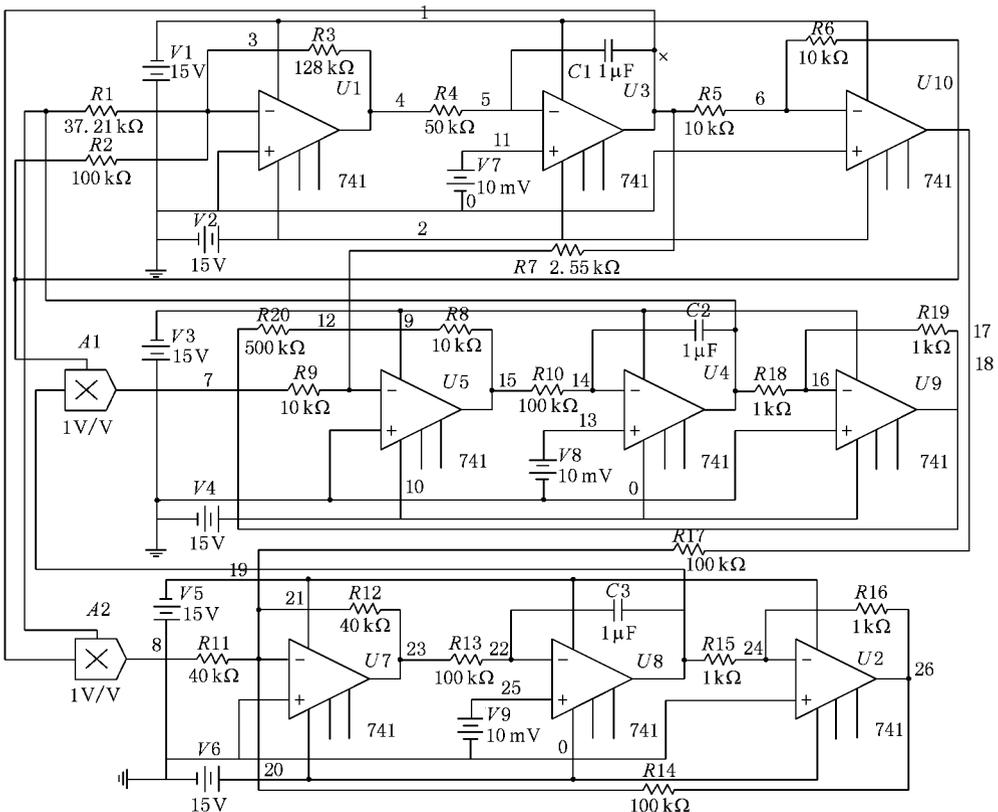
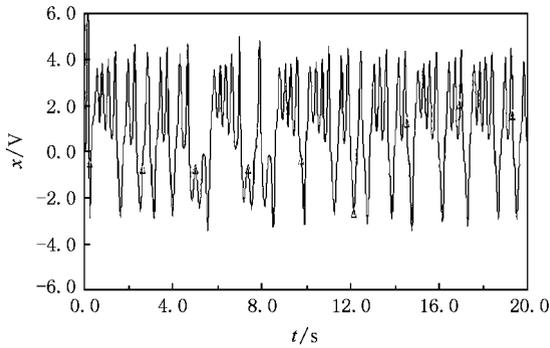
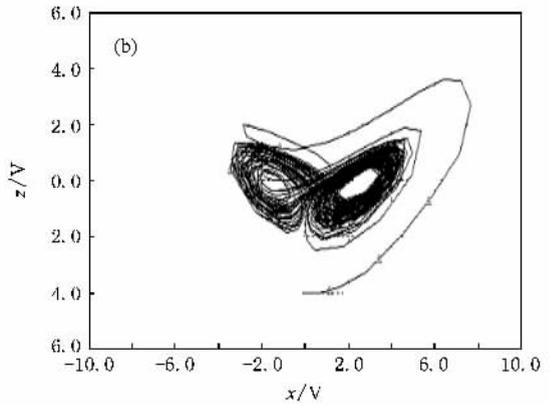
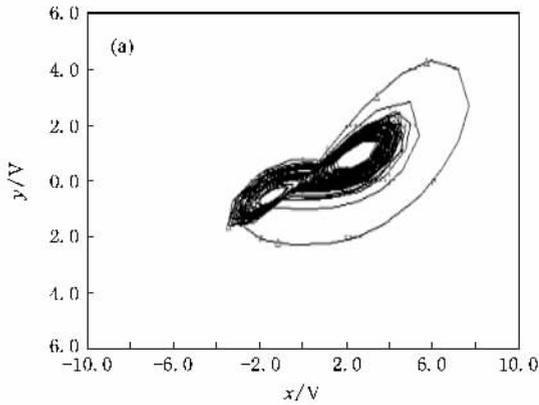


图 11 电路原理图

图 12 x 序列的时域波形

切混沌系统的共有特征:确定性、有界性、对初值的极端敏感性、长期不可预测性、正的最大 Lyapunov

图 13 系统(1)的电路实验相图 (a) x - y 平面 (b) x - z 平面

指数、一定频率范围内的连续谱和遍历性等。

3. 结 论

本文提出了一个新的三维自治混沌系统,系统含有五个参数,其中两个方程中各含有一个非线性项.该系统的混沌吸引子形状有别于 Lorenz 系统和 Chen 系统.通过理论分析、数值仿真、LE 指数谱、分岔图和 Poincare 截面图分析了新混沌系统的基本动力学特性.验证了系统丰富的混沌特性.该系统参数较多,可以用电子振荡器电路来实现,所以它在电子测量、保密通信等领域中具有潜在的应用价值.

- [1] Lorenz E N 1963 *J. Atmos. Sci.* **20** 130
- [2] Lorenz E N 1993 *The Essence of Chaos* (Washington : University of Washington Press)
- [3] Chen G R , Ueta T 1999 *Int. J. Bifurcat. Chaos* **9** 1465
- [4] Celikovsky S , Chen G R 2002 *Int. J. Bifurcat. Chaos* **12** 1789
- [5] Lü J H , Chen G R 2002 *Int. J. Bifurcat. Chaos* **12** 659
- [6] Liu C X , Liu L , Liu K 2004 *Chaos Soliton. Fract.* **22** 1031
- [7] Lü J , Chen G , Cheng D 2004 *Int. J. Bifurcat. Chaos* **14** 1507
- [8] Wang F Q , Liu C X 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 5061 (in Chinese) [王发强、刘崇新 2006 物理学报 **55** 5061]
- [9] Elwakil A S , Kennedy M P 2000 *IEEE Trans. Circuits Syst.* **1** 47 76
- [10] Liu Z H 2006 *Fundamentals and Applications of Chaotic Dynamics* (Beijing : High Education Press) p18 (in Chinese) [刘宗华 2006 混沌动力学基础及其应用(北京 : 高等教育出版社) 第 18 页]
- [11] Zhang X D , Li Z P , Zhang L L 2005 *Beijing Technology University Sinica* **27** 371 (in Chinese) [张效丹、李志萍、张丽丽 2005 北京科技大学学报 **27** 371]
- [12] Lü J H , Lu J A , Chen S H 2002 *Analysis and Application of Chaotic Time Sequences* (Wuhan : Wuhan University Press) p51 (in Chinese) [吕金虎、陆君安、陈士华 2002 混沌时间序列分析及其应用(武汉 : 武汉大学出版社) 第 51 页]

A new three-dimensional chaotic system and its circuit simulation *

Tang Liang-Rui[†] Li Jing Fan Bing Zhai Ming-Yue

(School of Electric and Electronic Engineering , North China Electric Power University , Beijing 102206 , China)

(Received 21 May 2008 ; revised manuscript received 23 July 2008)

Abstract

A new three-dimensional chaotic system is reported in this paper , which is different from the Lorenz and Chen systems . This new system contains five system parameters and two quadratic cross-product terms . The basic dynamic properties of the new system are investigated via theoretical analysis , numerical simulation , Lyapunov exponent spectrum , bifurcation diagrams , Lyapunov dimension and Poincare diagrams . The different dynamic behaviors of the new system are analyzed when each system parameter is changed . Finally , the chaotic circuit is designed and realized by the Multisim software . It confirms that the chaotic system can be achieved .

Keywords : chaotic system , Lyapunov exponent , Poincare diagrams , circuit simulation

PACC : 0545

* Project supported by National Natural Science Foundation of China(Grant No.60402004).

[†] E-mail : tangliangrui@163.com