

非线性耦合时空混沌系统的反同步研究*

吕 翎† 夏晓岚

(辽宁师范大学物理与电子技术学院, 大连 116029)

(2008 年 7 月 27 日收到, 2008 年 8 月 15 日收到修改稿)

利用非线性耦合方法研究了离散型时空混沌系统的反同步问题. 对时空混沌系统的线性项和非线性项进行适当的分离, 利用系统本身的非线性项作为耦合函数, 实现了两个二维耦合映象格子的反同步. 进一步将这种非线性耦合方法推广应用到由二维耦合映象格子构成复杂网络的反同步研究中, 仿真模拟发现仍具有理想的反同步效果.

关键词: 反同步, 非线性耦合, 耦合映象格子, 复杂网络

PACC: 0545

1. 引 言

自然界存在大量的实际系统可以用时空混沌系统来描述, 这类系统随时间和空间演化均表现为混沌行为. 其中, 耦合映象格子^[1]是描述时空混沌系统最常见的一种形式, 它不仅在数学上易于研究与计算, 而且耦合映象格子本身能够呈现极其丰富的时空混沌动力学行为, 因此被广泛应用于时空混沌同步的研究之中, 并取得了一些有价值的结果. 关于时空混沌同步的研究, 目前比较常用的方法是变量耦合法, 它是将针对时间混沌系统同步的变量耦合法直接推广而来的, 通过状态变量之间的耦合抑制混沌系统的时空演化, 从而达到混沌同步的目的. Emura^[2]报道了通过线性耦合实现多个时空混沌系统的同步方案. Brandt 等^[3]利用变量耦合法实现了一类神经网络的时空混沌同步. Nekorkin 等^[4]完成了两个耦合映象格子之间的相互同步. Wang 等^[5]通过数值分析研究了线性耦合下复杂网络的时空混沌同步问题. Hu 等^[6]基于单向耦合映象格子模型提出了一种时空混沌同步方案. 张旭等^[7]利用单向耦合驱动耦合映象格子达到了时空混沌系统的准确同步. 岳立娟等^[8]研究了布拉格声光双稳系统时空混沌的单向耦合同步. 匡锦瑜等^[9]利用同一混沌信号驱动两个单向耦合映象格子达到同步, 并提出一种

利用时空混沌同步的计算机网络数字加密通信方案. 这些研究工作是利用驱动系统和响应系统状态变量之间的线性耦合实现同步的. 虽然线性耦合法具有形式简单、易于应用以及同步代价相对较小的优点, 但对于一些非线性表现非常强烈的时空混沌系统, 线性耦合同步的效果往往欠佳. 因此有必要进一步研究利用非线性耦合实现时空混沌同步的方法.

本文利用非线性耦合方法研究了离散型时空混沌系统的反同步问题. 首先对时空混沌系统的线性项和非线性项进行适当的分离, 利用系统本身的非线性项作为耦合函数, 实现了两个二维耦合映象格子的反同步, 即同步时目标系统和响应系统状态变量的绝对值相同但符号相反. 其次将这种非线性耦合方法推广应用到由二维耦合映象格子构成复杂网络的反同步研究中, 仿真模拟发现仍具有理想的反同步效果.

2. 反同步原理

考虑下列离散型时空混沌系统

$$x_{n+1}(i, j) = F(x_n(i, j)), \quad (1)$$

其中 n 表示离散化时间, i, j 为空间二维格子的格点坐标 ($i, j = 1, 2, \dots, L$), L 为系统尺寸. $x_n(i, j) \in R^N$ 为系统的状态变量, $F: R^N \rightarrow R^N$.

* 辽宁省自然科学基金(批准号 20082147)和辽宁省教育厅创新团队计划(批准号 2008T108)资助的课题.

† E-mail: luling1960@yahoo.com.cn

将 $F(x_n(i, j))$ 进行适当的分离

$$x_{n+1}(i, j) = F(x_n(i, j)) = Ax_n(i, j) + \mathcal{J}(x_n(i, j)), \quad (2)$$

其中 A 为经过适当分离配置的线性项的系数矩阵.

对于系统(2), 利用时空混沌系统本身的非线性部分 $\mathcal{J}(x_n(i, j))$ 作为耦合函数进行单向耦合, 构造目标系统和响应系统

$$x_{n+1}^{(1)}(i, j) = Ax_n^{(1)}(i, j) + \mathcal{J}(x_n^{(1)}(i, j)), \quad (3)$$

$$x_{n+1}^{(2)}(i, j) = Ax_n^{(2)}(i, j) + \mathcal{J}(x_n^{(2)}(i, j)) - \sigma[\mathcal{J}(x_n^{(1)}(i, j)) + \mathcal{J}(x_n^{(2)}(i, j))], \quad (4)$$

其中 σ 为耦合强度.

定义系统(3)和(4)状态变量之间的误差

$$e_n(i, j) = x_n^{(1)}(i, j) - x_n^{(2)}(i, j), \quad (5)$$

可以得到

$$e_{n+1}(i, j) = x_{n+1}^{(1)}(i, j) - x_{n+1}^{(2)}(i, j) = Ae_n(i, j) + (1 - \sigma) \times [\mathcal{J}(x_n^{(1)}(i, j)) - \mathcal{J}(x_n^{(2)}(i, j))], \quad (6)$$

当取 $\sigma = 1$ 时(6)式可以写成

$$e_{n+1}(i, j) = Ae_n(i, j). \quad (7)$$

构造 Lyapunov 函数

$$V = |e_n(i, j)| \quad (8)$$

考虑到(7)式, 则 V 的微分可以写成

$$\Delta V = |e_{n+1}(i, j)| - |e_n(i, j)| = (|A| - 1)|e_n(i, j)|. \quad (9)$$

当取 $|A| \leq 1$ 时, 由(9)式可以得到

$$\Delta V \leq 0. \quad (10)$$

根据 Lyapunov 稳定性定理^[10], 此时, 反同步得以实现.

3. 仿真实验

二维耦合映象格子是一个时间空间离散化, 但状态变量仍保持连续的动力学系统. 它是在空间二维格子上的时空耦合映象, 其状态变量是一维的, 动力学方程为^[11]

$$x_{n+1}(i, j) = (1 - \varepsilon)f(x_n(i, j)) + \frac{\varepsilon}{4}[f(x_n(i-1, j)) + f(x_n(i+1, j)) + f(x_n(i, j-1)) + f(x_n(i, j+1))], \quad (11)$$

式中 ε 为系统空间离散格点间的耦合强度因子, $f(x_n(i, j))$ 为局域函数

$$f(x_n(i, j)) = 1 - ax_n^2(i, j), \quad (12)$$

其中 a 为参量.

二维耦合映象格子在系统参量 a 和空间离散格点间的耦合强度因子 ε 取不同数值时, 能够呈现丰富的时空混沌行为. 这里取系统尺寸 $L = 100$, 系统参量 $a = 1.95$, $\varepsilon = 0.1$, 系统状态变量的初始值 $x_0(i, j) = 0.6$, 在周期性边界条件下, 作出二维耦合映象格子的时空演化以及返回映象如图 1 2 所示.

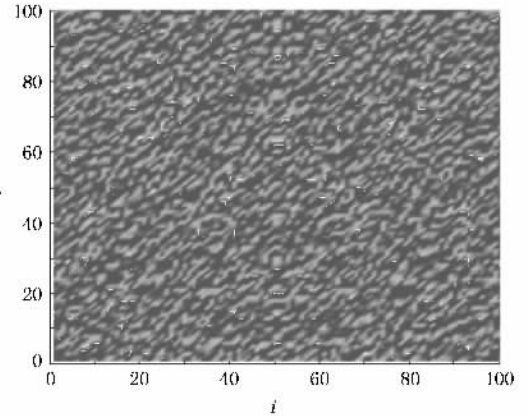


图 1 二维耦合映象格子的时空演化

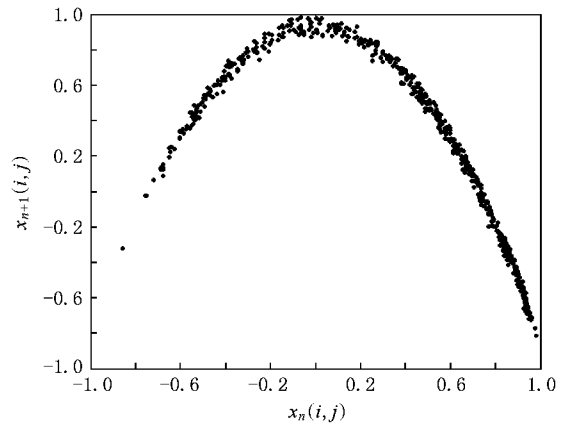


图 2 二维耦合映象格子的返回映象

以二维耦合映象格子模型作为例子, 仿真模拟验证上述方法的有效性. 将二维耦合映象格子(11)式分离出线性项 $Ax_n(i, j)$, 其余部分作为非线性项 $\mathcal{J}(x_n(i, j))$, 按照(3)(4)式的耦合方式构造目标系统和响应系统. 在仿真模拟过程中, 系统参量的选择保持不变. 由于系统的状态变量是一维的, 所以, 系统线性项的系数矩阵 A 仅有一个元素, 取为 -0.5 , 状态变量的初始值 $x_0^{(1)}(i, j) = 0.6$, $x_0^{(2)}(i, j) = 0.3$, 在空间第 50 个格点开始实施反同步控制, 时间间隔为 200 秒时的同步结果如图 3 A 所示. 由图 3 目标

系统和响应系统的相空间返回映象图可以看出, 实施反同步控制后, 经过短暂的时空序列, 响应系统中状态变量的幅值与目标系统相同, 符号相反. 图 4 中随着时空序列的演化, 两系统状态变量的误差信号迅速平稳地趋于零, 反同步得以实现.

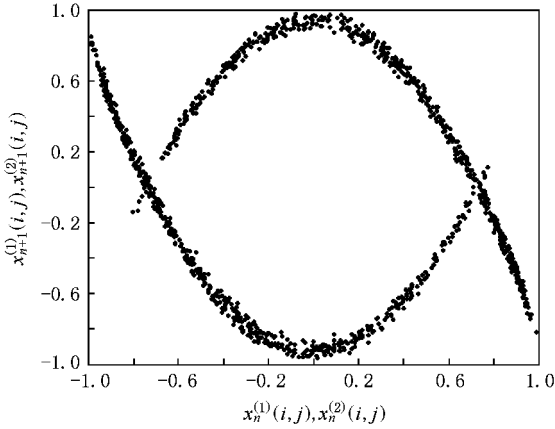


图 3 反同步时耦合映象格子的返回映象

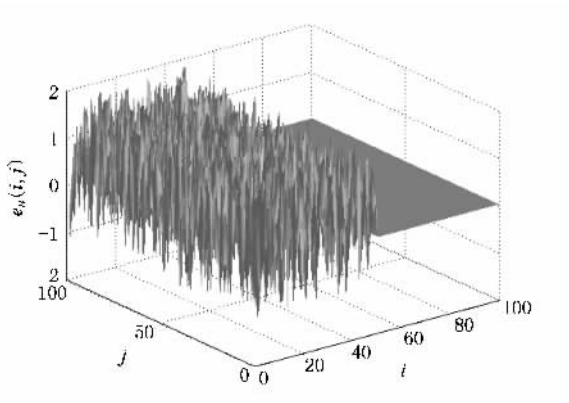


图 4 反同步时误差变量随时空的演化

4. 二维耦合映象格子构成复杂网络的反同步

下面我们将上述反同步方法推广到由 m 个离散型时空混沌系统 (2) 作为节点, 通过时空混沌系统本身的非线性部分 $\mathcal{J}(x_n(i, j))$ 作为耦合连接形成复杂网络的反同步问题.

设网络有 m 个节点, 单个节点在无耦合情况下满足的状态方程为 (2) 式. 当存在耦合作用时, 第 k 个节点所满足的状态方程为

$$x_{n+1}^{(k)}(i, j) = Ax_n^{(k)}(i, j) + \mathcal{J}(x_n^{(k)}(i, j)) - \sigma \sum_{l=1}^m G_{kl} \mathcal{J}(x_n^{(l)}(i, j)), \quad (13)$$

其中 σ 是耦合强度, G_{kl} 表示耦合矩阵 G 的矩阵元, 它的具体表示因网络的连接类型而异. 例如, 若进行单向星型连接下的反同步时, 耦合矩阵为

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ -1 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix}. \quad (14)$$

定义网络反同步误差

$$e_n^{(k)}(i, j) = x_n^{(k)}(i, j) + x_n^{(k+1)}(i, j) \quad (k = 1, 2, \dots, m-1), \quad (15)$$

则

$$\begin{aligned} e_{n+1}^{(k)}(i, j) &= x_{n+1}^{(k)}(i, j) + x_{n+1}^{(k+1)}(i, j) \\ &= Ae_n^{(k)}(i, j) + (1 - \sigma) \\ &\quad \times [\mathcal{J}(x_n^{(k)}(i, j)) + \mathcal{J}(x_n^{(k+1)}(i, j))] \end{aligned} \quad (16)$$

当取 $\sigma = 1$ 时 (16) 式变为

$$e_{n+1}^{(k)}(i, j) = Ae_n^{(k)}(i, j). \quad (17)$$

构造网络系统的 Lyapunov 函数为

$$V = \sum_{k=1}^{m-1} |e_n^{(k)}(i, j)|. \quad (18)$$

V 的微分可以写成

$$\begin{aligned} \Delta V &= \sum_{k=1}^{m-1} (|e_{n+1}^{(k)}(i, j)| - |e_n^{(k)}(i, j)|) \\ &= \sum_{k=1}^{m-1} (|A| - 1) |e_n^{(k)}(i, j)|. \end{aligned} \quad (19)$$

取 $|A| \leq 1$, 即有

$$\Delta V \leq 0, \quad (20)$$

可以实现整个复杂网络的混沌反同步.

以节点数 $m = 4$ 构成的复杂网络为例进行网络同步的仿真模拟. 单个节点的状态方程仍为 (2) 式所描述的二维耦合映象格子模型. 四个节点处二维耦合映象格子的状态变量分别为 $x_n^{(1)}(i, j)$, $x_n^{(2)}(i, j)$, $x_n^{(3)}(i, j)$, $x_n^{(4)}(i, j)$. 耦合矩阵为

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (21)$$

在仿真模拟过程中, 系统参数的选择以及原有的模拟数据均保持不变, 节点处的二维耦合映象格子线性项的系数取值仍为 -0.5 , 状态变量的初始值 $x_0^{(1)}(i, j) = 0.6$, $x_0^{(2)}(i, j) = 0.3$, $x_0^{(3)}(i, j) = 0.5$, $x_0^{(4)}(i, j) = 0.1$, 在空间第 50 个格点开始实施反同

步控制,时间间隔仍为 200 s 时复杂网络中所有系统状态变量的返回映象如图 5—8 所示.相应的误差变量随时空的演化如图 9—11 所示.由以上各图可以看出,整个网络实现了混沌反同步.模拟中还发

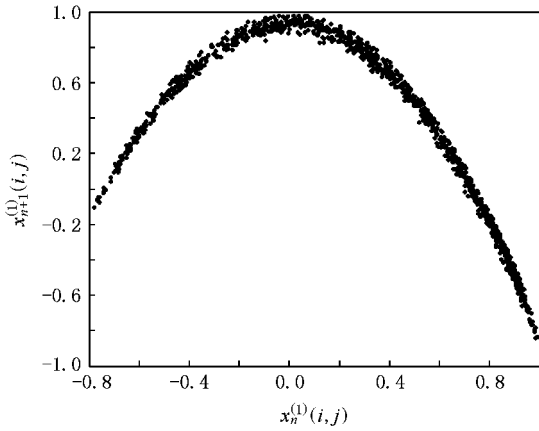


图 5 反同步时状态变量 $x_n^{(1)}(i, j)$ 的返回映象

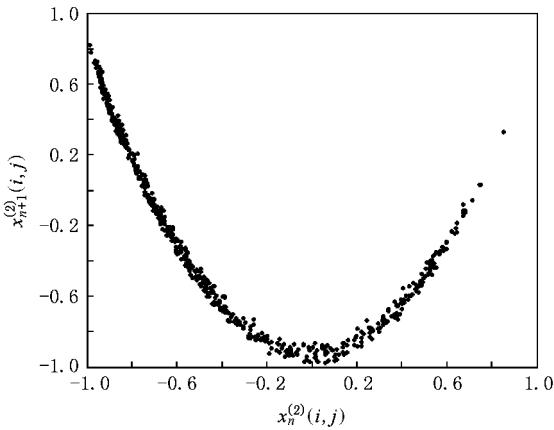


图 6 反同步时状态变量 $x_n^{(2)}(i, j)$ 的返回映象

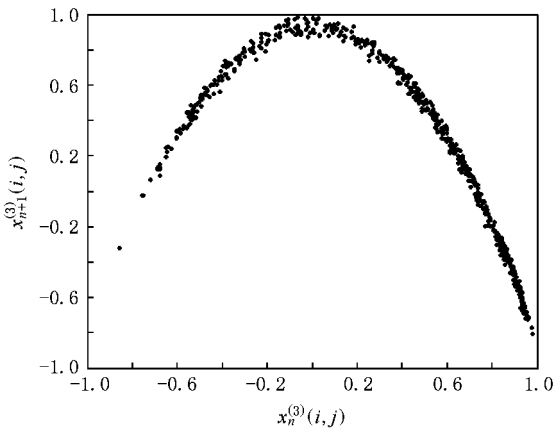


图 7 反同步时状态变量 $x_n^{(3)}(i, j)$ 的返回映象

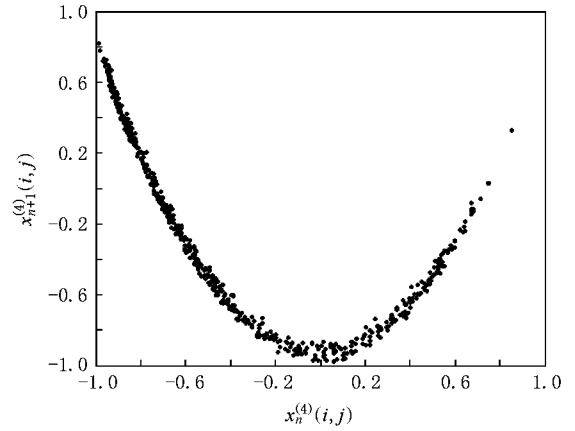


图 8 反同步时状态变量 $x_n^{(4)}(i, j)$ 的返回映象

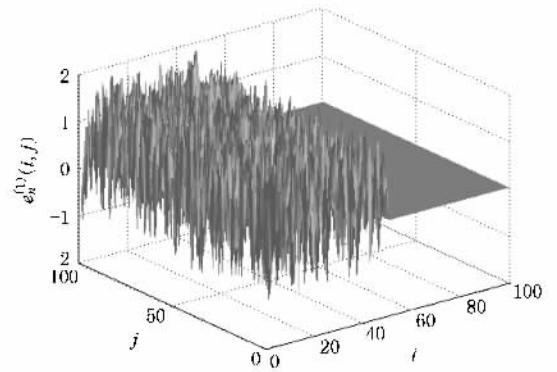


图 9 误差变量 $e_n^{(1)}(i, j)$ 的时空演化

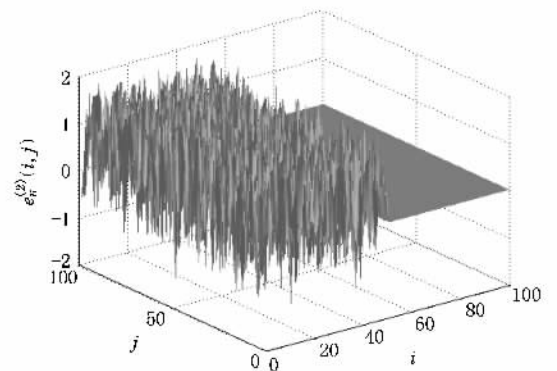


图 10 误差变量 $e_n^{(2)}(i, j)$ 的时空演化

现,只要 A 的取值在 $|A| \leq 1$ 范围内,整个网络均存在稳定的混沌反同步现象.

5. 结 论

本文利用非线性耦合方法研究了离散型时空混

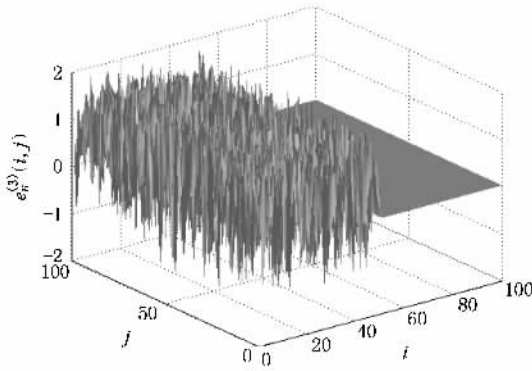


图 11 误差变量 $e_n^{(3)}(i, j)$ 的时空演化

沌系统的反同步问题. 利用时空混沌系统本身的非线性项作为耦合函数, 通过单向耦合使目标系统和响应系统建立关联. 基于 Lyapunov 稳定性定理, 确定了实现反同步时分离配置的系统线性项系数矩阵 A 的取值范围. 采用具有时空混沌行为的二维耦合映象格子作为仿真实例, 仿真模拟发现 A 的取值在某一区域内时, 系统存在稳定的混沌反同步现象. 进一步将这种非线性耦合方法推广应用到由二维耦合映象格子构成复杂网络的反同步研究中, 发现在单向星型连接下, 网络中任意一个节点的二维耦合映象格子与其他节点的二维耦合映象格子实现了混沌反同步.

- [1] Raparl R 1985 *Phys. Rev. A* **31** 3868
- [2] Emura T 2006 *Phys. Lett. A* **349** 306
- [3] Brandt S, Dellen B K, Wessel R 2006 *Phys. Rev. Lett.* **96** 34104
- [4] Nekorkin V I, Kazantsev V B, Verlarde M G 1997 *Phys. Lett. A* **236** 505
- [5] Wang M S, Hou Z H, Xin H W 2006 *Chin. Phys.* **15** 2553
- [6] Hu G, Xiao J H, Yang J Z, Xie F G, Qu Z L 1997 *Phys. Rev. E* **56** 2738
- [7] Zhang X, Shen K 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 2702 (in Chinese) [张旭、沈 柯 2002 物理学报 **51** 2702]
- [8] Yue L J, Shen K 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 5671 (in Chinese) [岳立娟、沈 柯 2005 物理学报 **54** 5671]
- [9] Kuang J Y, Deng K, Huang R H 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 1856 (in Chinese) [匡锦瑜、邓 昆、黄荣怀 2001 物理学报 **50** 1856]
- [10] Lü L 2000 *Nonlinear Dynamics and Chaos* (Dalian : Dalian Publishing House) (in Chinese) [吕 翎 2000 非线性动力学与混沌 (大连 : 大连出版社)]
- [11] Kaneko K 1989 *Physica D* **37** 60

Anti-synchronization of nonlinear-coupled spatiotemporal chaotic systems^{*}

Lü Ling[†] Xia Xiao-Lan

(College of Physics and Electronic Technology, Liaoning Normal University, Dalian 116029, China)

(Received 27 July 2008 ; revised manuscript received 15 August 2008)

Abstract

The anti-synchronization of two nonlinear-coupled spatiotemporal chaotic systems is discussed. A special nonlinear-coupled term is constructed through suitably separating the spatiotemporal chaotic systems to linear and nonlinear terms, and anti-synchronization of two two-dimensional coupled map lattices is realized. The nonlinear-coupled method is further generalized to anti-synchronize the complex networks composed of two-dimensional coupled map lattices. The artificial simulation results show that this method is still effective.

Keywords : anti-synchronization, nonlinear coupling, coupled map lattice, complex network

PACC : 0545

^{*} Project supported by the Natural Science Foundation of Liaoning Province, China (Grant No. 20082147) and the Innovative Team Program of Liaoning Educational Committee, China (Grant No. 2008T108).

[†] E-mail : luling1960@yahoo.com.cn