

基于模糊观测器的 Chua 混沌系统投影同步*

孟 娟 王兴元†

(大连理工大学电子与信息工程学院, 大连 116024)

(2008 年 6 月 2 日收到, 2008 年 8 月 21 日收到修改稿)

研究了 Chua 混沌系统的广义投影同步问题. 基于 Takagi-Sugeno(T-S)模糊模型, 设计了一种模糊观测器. 利用 Lyapunov 稳定性理论证明了所提方案的可行性和全局稳定性. 数值仿真试验进一步验证了该方案可以实现 Chua 混沌系统的投影同步. 方法设计简单, 且可以推广到其他的一些混沌系统.

关键词: T-S 模糊模型, Chua 混沌系统, 观测器, 投影同步

PACC: 0545, 0555

1. 引 言

近年来, 混沌同步由于其在保密通信、生命科学和信息等领域的潜在应用价值引起了非线性科学工作者的广泛关注^[1-5]. 人们从不同的角度研究了混沌同步, 并提出了多种不同类型的混沌同步, 如: 完全同步、相同步、投影同步等^[6-15]. 投影同步是指将驱动系统和响应系统的状态矢量同步于某一比例尺度. 这一比例特性可用于保密通信中将二进制数扩展到 M 进制数以实现更快的传输. 因此, 关于投影同步的研究具有重要的理论意义和应用价值. 观测器方法是一种有效的控制工具. 1996 年, Morgul 等首先利用观测器方法实现了混沌系统的完全同步^[16]. 近年来, 模糊逻辑作为一种有力的非线性控制工具引起了控制专家们的广泛关注. 模糊控制器设计简单, 具有很强的处理非线性和干扰的能力^[17, 18]. 本文基于 Takagi-Sugeno(T-S)模糊模型^[18], 设计了一种模糊观测器, 实现了 Chua 混沌系统的广义投影同步. 理论分析和数值仿真验证了所提方案的可行性和有效性.

2. 同步问题描述和预备知识

考虑如下的混沌系统:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + f(x(t)), \quad (1)$$

其中 $x(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]^T \in R^n$ 为系统(1)的状态矢量, A 为具有适当维数的系统矩阵, $f(x(t))$ 为连续矢量函数.

系统(1)的 T-S 模糊模型可以表示为

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \sum_{i=1}^r h_i(z(t))\alpha_i x(t), \quad (2)$$

式中 $z(t)$ 为与系统状态相关联的前件变量; α_i 为第 i 个模糊子系统的矩阵; r 为模糊规则总数;

$h_i(z(t))$ 为隶属度函数, $\sum_{i=1}^r h_i(z(t)) = 1$, 有

$$h_i(z(t)) = \frac{w_i(z(t))}{\sum_{i=1}^r w_i(z(t))}, \quad (3)$$

其中,

$$w_i(z(t)) = \prod_{j=1}^p M_j^i(z(t)), \quad (4)$$

这里 $M_j^i(z(t))$ 为 $z(t)$ 在模糊子集 M_j^i 中的隶属度.

设系统(1)的输出为

$$y(t) = Kx(t), \quad (5)$$

其中 $K \in R^{m \times n}$ 为反馈增益矩阵.

构造模糊观测器系统

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= A\hat{x}(t) + \sum_{i=1}^r h_i(z(t))\hat{\alpha}_i \hat{x}(t) \\ &+ L(\lambda y(t) - \hat{y}(t)), \end{aligned} \quad (6)$$

其中 $\hat{x}(t) = [\hat{x}_1(t), \hat{x}_2(t), \dots, \hat{x}_n(t)]^T \in R^n$ 为模糊观测器系统的状态变量; $\hat{\alpha}_i$ 为自适应参数, L 为

* 国家自然科学基金(批准号: 60573172)、高等学校博士学科点专项科研基金(批准号: 20070141014)和辽宁省自然科学基金(批准号: 20082165)资助的课题.

† 通讯联系人. E-mail: wangxy@dlut.edu.cn

反馈增益矩阵 λ 为非零常数 $\dot{y}(t)$ 为模糊观测器系统的输出,且

$$\dot{y}(t) = K\hat{x}(t). \quad (7)$$

定义 1 如果存在非零常数 λ , 使得系统 (2) 和系统 (6) 满足

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\hat{x}(t) - \lambda x(t)\| = 0, \quad (8)$$

则称系统 (2) 和系统 (6) 获得了广义投影同步, λ 称为比例因子(其中, $\|\cdot\|$ 代表欧几里德范数).

假设 1 定义模糊函数

$$w(x) = \sum_{i=1}^r h_i(z) \alpha_i x \quad (9)$$

$w(x)$ 是 Lipschitz 的, 即存在正数 γ 满足

$$\|w(x_1) - w(x_2)\| \leq \gamma \|x_1 - x_2\|. \quad (10)$$

Barbalat 引理^[19] 如果 $f(t)$ 是一致连续函数, 且

满足 $\int_0^{\infty} |f(\tau)| d\tau < \infty$ 则当 $t \rightarrow \infty$ 时 $f(t) \rightarrow 0$.

3. 混沌投影同步设计

定理 1 对于系统 (2) 和模糊观测器系统 (6), 如果满足

$$\lambda_{\max}(A - LK) \leq -\gamma, \quad (11)$$

并且自适应参数 $\hat{\alpha}_i$ 满足

$$\dot{\hat{\alpha}}_i = -h_i(z(t))e(t)x^T(t), \quad (12)$$

则系统 (2) 和 (6) 可以获得广义投影同步.

证明 定义系统 (2) 和 (6) 的广义投影同步误差为 $e(t) = \hat{x}(t) - \lambda x(t)$, 则误差动力系统可以描述为

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= \dot{\hat{x}}(t) - \lambda \dot{x}(t) \\ &= A e(t) + \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) (\hat{\alpha}_i \hat{x}(t) - \lambda \alpha_i x(t)) \\ &\quad - LK e(t) \\ &= A e(t) + \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) (\alpha_i e(t)) \\ &\quad + \tilde{\alpha}_i \hat{x}(t) - LK e(t) \\ &= (A - LK) e(t) + \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) (\alpha_i e(t)) \\ &\quad + \tilde{\alpha}_i \hat{x}(t), \end{aligned} \quad (13)$$

其中 $\tilde{\alpha}_i = \hat{\alpha}_i - \alpha_i$.

构造 Lyapunov 函数

$$V(t) = \frac{1}{2} e^T(t) e(t) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^r t(\tilde{\alpha}_i^T \tilde{\alpha}_i), \quad (14)$$

显然, $V(t)$ 为非负函数.

(14) 式两端对 t 求导得

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= e^T(t) (A - LK) e(t) \\ &\quad + e^T(t) \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) (\alpha_i e(t) + \tilde{\alpha}_i \hat{x}(t)) \\ &\quad + \sum_{i=1}^r t(\tilde{\alpha}_i^T \dot{\tilde{\alpha}}_i) \\ &\leq \lambda_{\max}(A - LK) \|e(t)\|^2 + \gamma \|e(t)\|^2 \\ &\quad + \sum_{i=1}^r t(h_i(z(t)) \tilde{\alpha}_i^T e(t) \hat{x}^T(t) + \tilde{\alpha}_i^T \dot{\tilde{\alpha}}_i) \\ &= (\lambda_{\max}(A - LK) + \gamma) \|e(t)\|^2 \leq 0. \end{aligned} \quad (15)$$

由 (15) 式可推得

$$\int_0^{\infty} e^T(t) e(t) dt < \infty. \quad (16)$$

另外, 由 (15) 式可知, $e(t)$ 和 $\hat{\alpha}_i$ 均有界, 因此 $e(t)$ 有界. 由此可知 $e(t)$ 是一致连续的. 根据 Barbalat 引理, 可得 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|e(t)\| = 0$. 证毕.

4. Chua 混沌系统的投影同步研究

Chua 电路是一个简单的电系统, 它由一个电感 (L), 两个电容 (C_1, C_2), 一个线性电阻 (R) 和一个非线性电阻 (g) 组成^[20]. Chua 电路结构简单却具有丰富的非线性动力学特性(如分岔和混沌), 因而在混沌控制与同步领域被广泛地研究. 图 1 给出了 Chua 混沌系统的电路图.

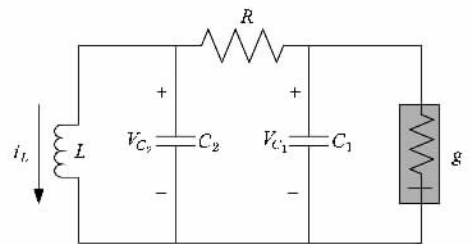


图 1 Chua 电路图

Chua 电路的动力学方程可以描述为^[20]

$$\begin{aligned} \dot{V}_{C_1} &= \frac{1}{C_1} \left(\frac{1}{R} (V_{C_2} - V_{C_1}) - g(V_{C_1}) \right), \\ \dot{V}_{C_2} &= \frac{1}{C_2} \left(\frac{1}{R} (V_{C_1} - V_{C_2}) + i_L \right), \\ \dot{i}_L &= \frac{1}{L} (-V_{C_2} - R_0 i_L), \end{aligned} \quad (17)$$

其中, V_{C_1}, V_{C_2} 和 i_L 为状态变量, R_0 为常数.

非线性电阻 g 为电压 V_{C_1} 的函数, 其表示式为

$$g(V_{C_1}) = aV_{C_1} + cV_{C_1}^3, \quad (18)$$

其中 $a < 0, c > 0$.

当 $R = 10/7, R_0 = 0, C_1 = 1.0, C_2 = 19/2, L =$

19/14, $a = -4/5, c = 2/45$ 时, Chua 系统的混沌吸引子及其在各坐标平面的投影如图 2 所示.

将系统 (17) 改写成 (1) 式的形式, 则

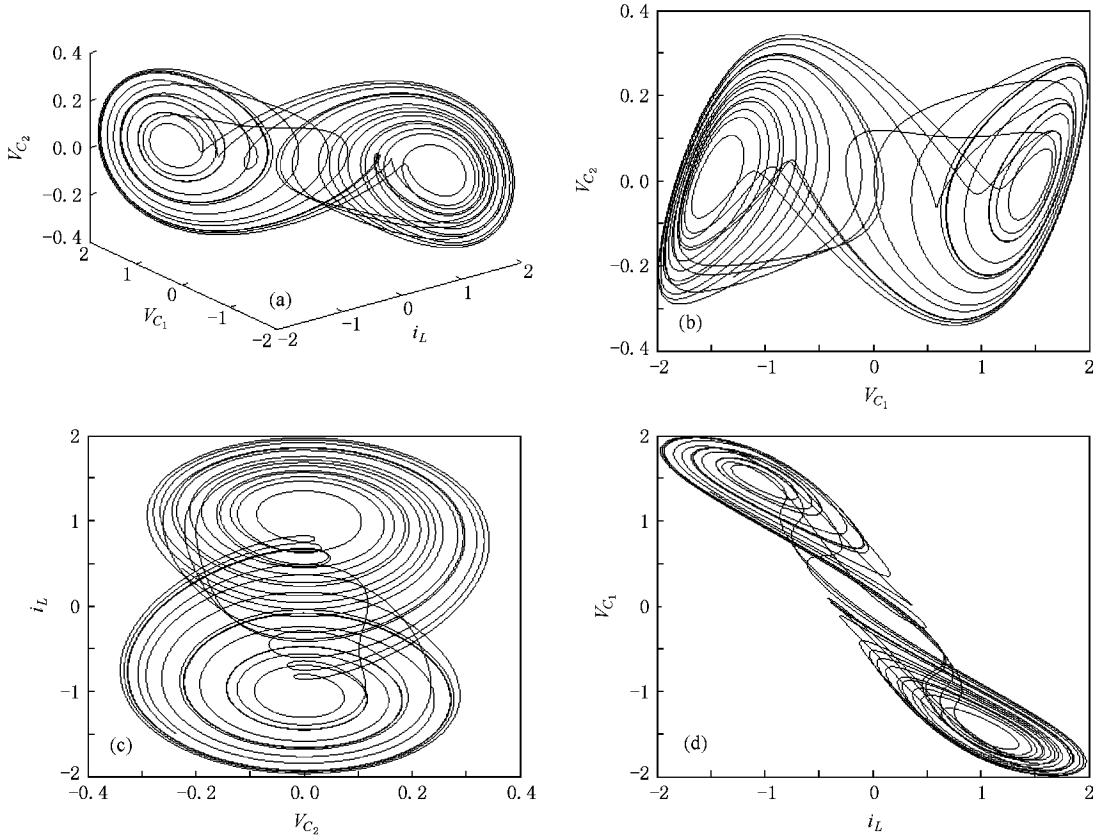


图 2 Chua 电路的混沌吸引子图 (a) Chua 电路三维吸引子 (b) 平面 $V_{C_1}-V_{C_2}$ 上的混沌吸引子 (c) 平面 $V_{C_2}-i_L$ 上的混沌吸引子 (d) 平面 $i_L-V_{C_1}$ 上的混沌吸引子

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{C_1 R} & \frac{1}{C_1 R} & 0 \\ \frac{1}{C_2 R} & -\frac{1}{C_2 R} & \frac{1}{C_2} \\ 0 & -\frac{1}{L} & -\frac{R_0}{L} \end{bmatrix},$$

$$f(x) = \begin{bmatrix} -g(V_{C_1}) / (C_1) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

采用 V_{C_1} 作为模糊前件变量, $V_{C_1} \in [-d, d], d$

= 5. 模糊隶属度函数为

$$h_1(V_{C_1}) = 1 - \frac{V_{C_1}^2}{d^2}, h_2(V_{C_2}) = \frac{V_{C_1}^2}{d^2}.$$

Chua 混沌系统及模糊观测器系统的初始条件分别选取为 $(V_{C_1}(0), V_{C_2}(0), i_L(0)) = (0.5, 0, 0)$ 和

$(\hat{V}_{C_1}(0), \hat{V}_{C_2}(0), \hat{i}_L(0)) = (-1.0, 0.8, 1.0)$. 矩阵 $(A - LK)$ 的特征值选取为 $[-2, -3, -5]$.

当比例因子 $\lambda = 2$ 时, 数值模拟结果如图 3 和图 4 所示. 从误差效果图 3 可以看出, 误差 $e_1(t), e_2(t)$ 和 $e_3(t)$ 最终渐进稳定于零点, 表明所设计的模糊观测器系统和 Chua 混沌系统获得了广义投影同步. 图 4 给出了各状态变量的对应关系图. 从图 4 可以看出, 广义投影同步时, 各对应变量呈线性关系 (斜率为 2).

当比例因子 $\lambda = -1.2$ 时, 数值模拟结果如图 5 和图 6 所示. 从图中可以看出, 同步误差最终稳定于零点, 各对应状态变量之间表现为线性关系 (斜率为 -1.2).

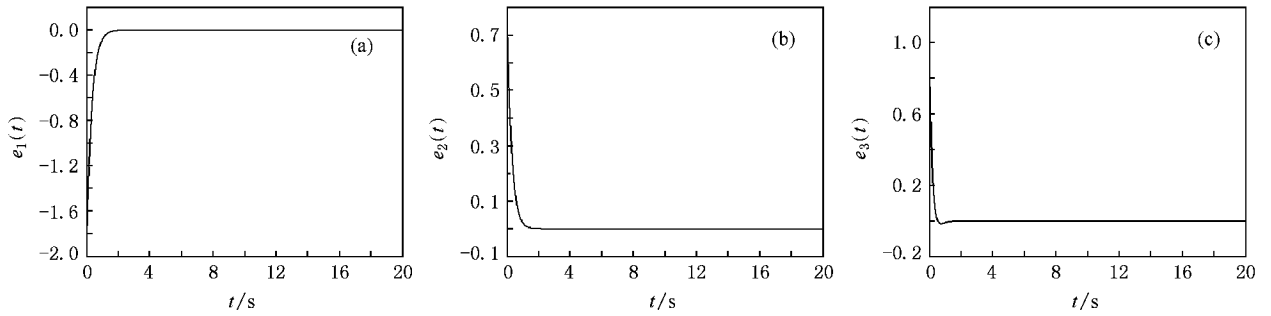


图 3 $\lambda = 2$ 时, 广义投影同步误差效果图 (a) 误差 $e_1(t)$ (b) 误差 $e_2(t)$ (c) 误差 $e_3(t)$

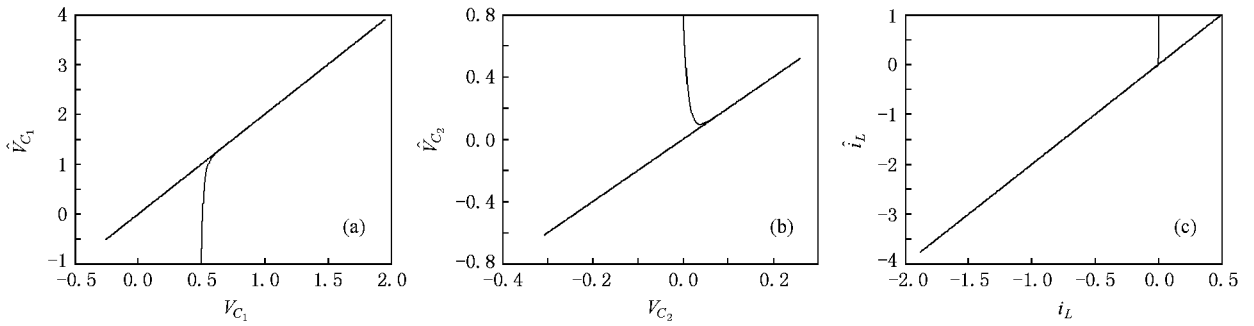


图 4 $\lambda = 2$ 时, 对应变变量关系图 (a) V_{C_1} 与 \hat{V}_{C_1} 的对应关系 (b) V_{C_2} 与 \hat{V}_{C_2} 的对应关系 (c) i_L 与 \hat{i}_L 的对应关系

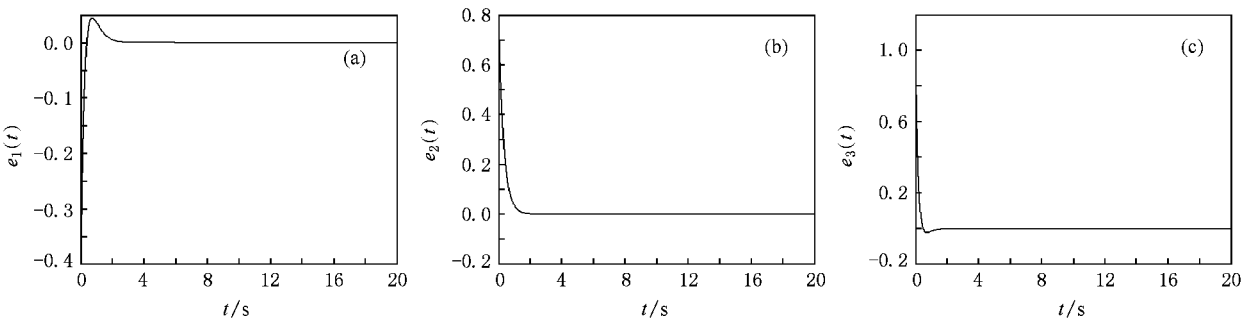


图 5 $\lambda = -1.2$ 时, 广义投影同步误差效果图 (a) 误差 $e_1(t)$ (b) 误差 $e_2(t)$ (c) 误差 $e_3(t)$

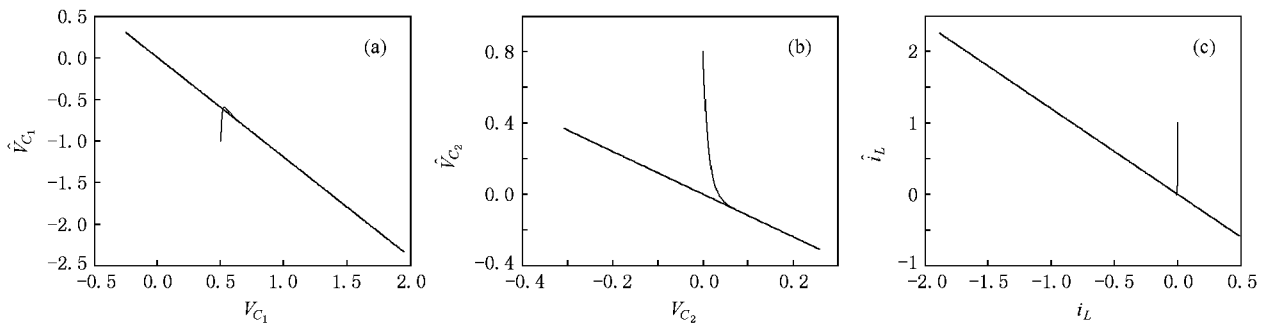


图 6 $\lambda = -1.2$ 时, 对应变变量关系图 (a) V_{C_1} 与 \hat{V}_{C_1} 的对应关系 (b) V_{C_2} 与 \hat{V}_{C_2} 的对应关系 (c) i_L 与 \hat{i}_L 的对应关系

5. 结 论

本文研究了 Chua 电路的广义投影同步问题,基于 T-S 模糊模型,设计了一种模糊观测器,并利用

Lyapunov 稳定性理论证明了所提方法的可行性. 本文方法不仅可以实现 Chua 混沌系统的广义投影同步,而且可以推广到其他的一些混沌系统,具有一定的普遍性. 数值仿真试验进一步验证了本文方法的有效性.

- [1] Sundar S , Minai A A 2000 *Phys. Rev. Lett.* **85** 5456
- [2] Feki M 2003 *Chaos Soliton. Fract.* **18** 141
- [3] Guan X P , Fan Z P , Chen C L , Hua C C 2002 *Chaotic Control and its Application on Secure Communication* (Beijing : National Defence Industry Press) chapt. 9 (in Chinese) [关新平、范正平、陈彩莲、华长春 2002 混沌控制及其在保密通信中的应用(北京:国防工业出版社)第九章]
- [4] Wang X Y 2003 *Chaos in the Complex Nonlinearity System* (Beijing : Electronics Industry Press) chapt. 2 (in Chinese) [王兴元 2003 复杂非线性系统中的混沌(北京:电子工业出版社)第二章]
- [5] Chen G R , Lü J H 2003 *Dynamical Analyses , Control and Synchronization of the Lorenz System Family* (Beijing : Science Press) chapt. 3 (in Chinese) [陈关荣、吕金虎 2003 Lorenz 系统族的动力学分析、控制与同步(北京:科学出版社)第三章]
- [6] Michael G R , Arkady S P , Jurgen K 1996 *Phys. Rev. Lett.* **76** 1804
- [7] Ho M C , Hung Y C , Chou C H 2002 *Phys. Lett. A* **296** 43
- [8] Parmananda P 1998 *Phys. Lett. A* **240** 55
- [9] Yassen M T 2005 *Chaos Soliton. Fract.* **23** 131
- [10] Gonzalez-Miranad J M 1996 *Phys. Rev. E* **53** 5656
- [11] Mainieri R , Rehacek J 1999 *Phys. Rev. Lett.* **82** 3042
- [12] Li Z G , Xu D L 2001 *Phys. Lett. A* **282** 175
- [13] Xu D L , Li Z G , Bishop S R 2001 *Chaos* **11** 439
- [14] Li Z G , Xu D L 2004 *Chaos Soliton. Fract.* **22** 477
- [15] Li G H 2007 *Chin. Phys. B* **16** 2608
- [16] Morgul O , Solak E 1996 *Phys. Rev. E* **54** 4803
- [17] Lee C C 1990 *IEEE Trans. Syst. Man Cyber.* **20** 404
- [18] Takagi T , Sugeno M 1985 *IEEE Trans. Syst. Man Cyber.* **15** 116
- [19] Gopalsamy K 1992 *Stability and Oscillations in Delay Differential Equations of Population Dynamics* (Dordrecht : Kluwer Academic Publishers) chapt. 3
- [20] Chua L O , Komuro M , Matsumoto T 1986 *IEEE Trans. Cir. Sys.* **33** 1073

Projective synchronization of Chua chaotic system based on fuzzy observer^{*}

Meng Juan Wang Xing-Yuan[†]

(School of Electronic & Information Engineering , Dalian University of Technology , Dalian 116024 , China)

(Received 2 June 2008 ; revised manuscript received 21 August 2008)

Abstract

The generalized projective synchronization of Chua chaotic system is investigated. A new fuzzy observer is designed based on the Takagi-Sugeno (T-S) fuzzy model. According to the Lyapunov stability theory , it is verified that the proposed scheme is feasible and globally stable. Numerical simulations further demonstrate that the projective synchronization of Chua circuit can be achieved by using the proposed scheme. The designed procedure is simple , and the method can be adapted to other chaotic systems .

Keywords : T-S fuzzy model , Chua chaotic system , observer , projective synchronization

PACC : 0545 , 0555

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 60573172) , the Specialized Research Fund for the Doctoral Program of Higher Education of China (Grant No. 20070141014) and the Natural Science Foundation of Liaoning Province , China (Grant No. 20082165) .

[†] Corresponding author. E-mail : wangxy@dlut.edu.cn