

# 有界噪声激励下带有时滞反馈的随机 Mathieu-Duffing 系统的响应<sup>\*</sup>

邢真慈<sup>1)</sup> 徐 伟<sup>1)†</sup> 戎海武<sup>2)</sup> 王宝燕<sup>1)</sup>

1) 西北工业大学应用数学系, 西安 710072)

2) 佛山大学数学系, 佛山 528000)

(2008 年 5 月 30 日收到, 2008 年 8 月 19 日收到修改稿)

研究了参数激励下带有时滞反馈的随机 Mathieu-Duffing 方程的主参数共振响应问题. 运用多尺度方法分离了系统的快慢变量, 分析了系统的分岔性质, 发现调谐参数、时滞、时滞项的系数以及非线性项的强度等都可以影响系统的分岔行为. 适当选择这些参数可以改变系统的分岔响应. 同时, 还讨论了非零解的稳定性, 得到了非零解稳定的充要条件, 而且发现在随机激励的带宽较小时, 系统的多解现象仍然存在, 分岔和跳跃现象仍会发生. 数值模拟验证了理论推导的有效性.

关键词: 随机 Mathieu-Duffing 系统, 多尺度, 稳定性, 分岔

PACC: 0547, 0545

## 1. 引 言

在工程实践中, 由于传递速度的有限性和反应的滞后性, 使得时间滞后现象普遍存在, 因此可以说时滞系统是对自然规律更本质、更真实的描述. 同时, 在真实的动力系统中, 由于各种不确定因素的影响, 随机扰动往往不可避免, 而且往往对系统的动力学行为产生关键性影响. 因此研究随机扰动下时滞系统的动力学性质具有重要意义. 在过去的几十年中, 对确定性时滞系统的研究已经取得了丰富的成果. Hu 和 Wang<sup>[1]</sup> 运用广义 Sturm 理论给出了一般情形的时滞系统李雅谱诺夫稳定性判别法; Liao 等<sup>[2]</sup> 研究了一类时滞系统的 Hopf 分岔和 Hopf-Hopf 分岔; 徐鉴等<sup>[3,4]</sup> 利用中心流形和平均理论, 研究了带有时滞速度反馈和带有时滞位移反馈的 van der Pol-Duffing 振子, 讨论了系统的稳定性、分岔、拟周期等现象. 多尺度方法作为一种摄动方法在时滞系统中也得到了广泛应用. Hu 等<sup>[1,5,6]</sup> 运用多尺度方法研究时滞系统的动力学行为, 在文献 [6] 中研究了振动主动控制中的动力学问题, 讨论了时滞位移和速度反馈的 Duffing 系统的主共振与亚谐共振问题. 钱长照

等<sup>[7]</sup> 研究了简谐激励下含有两个时滞参数的 van der Pol-Duffing 振子, 分析了时滞参数对该类参数激励的时滞系统的主参数共振的分岔控制问题. 同时, 对于一般随机(不含时滞)系统的研究也是屡见不鲜<sup>[8,9]</sup>. 但是, 由于随机激励下时滞系统的复杂性及其自身的特点, 在确定性系统和一般随机系统中广泛应用的方法很难推广到随机时滞系统中, 因而对随机激励下时滞系统的研究很少. 值得一提的是, 近年来多尺度在随机系统中也有了一些应用<sup>[10-12]</sup>.

Mathieu-Duffing 系统是典型的非线性振动系统, 对确定的 Mathieu-Duffing 系统或是不含时滞的此类随机系统的动力学性质已有不少研究<sup>[13,14]</sup>, 但对参数激励下带有时滞反馈的随机 Mathieu-Duffing 系统的研究却很少见. 本文运用多尺度方法研究了带有时滞反馈的随机 Mathieu-Duffing 系统的主参数共振响应, 讨论了系统的分岔性质以及非零解的稳定性, 最后给出了数值模拟.

## 2. 基本方程

考虑如下随机时滞系统

$$\ddot{x}(t) + \varepsilon\beta\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t)$$

<sup>\*</sup> 国家自然科学基金(批准号:10872165)资助的课题.

<sup>†</sup> 通讯联系人. E-mail: weixu@nwpu.edu.cn

$$\begin{aligned}
 & + \varepsilon x(t) h \cos(\Omega t + \gamma u(t)) + \varepsilon \alpha x^3(t) \\
 & = \varepsilon [u x(t - \tau) + v x'(t - \tau)], \quad (1)
 \end{aligned}$$

式中  $\varepsilon \ll 1$ ,  $\beta$  和  $\omega_0$  分别表示刚度项系数和自然频率;  $\alpha > 0$  为非线性项的强度;  $u$  和  $v$  为时滞项的系数;  $u(t)$  是标准的 winner 过程;  $h \cos(\Omega t + \gamma u(t))$  为随机激励, 其中  $h$  是激励强度,  $\Omega$  为激励的平均频率,  $\gamma$  为激励带宽. 称系统 (1) 为带有时滞反馈的随机 Mathieu-Duffing 系统.

运用多尺度方法来研究系统 (1) 的动力学性质. 设 (1) 式具有如下形式的一阶近似解:

$$x(T_0, T_1) = x_0(T_0, T_1) + \varepsilon x_1(T_0, T_1), \quad (2)$$

其中  $T_0 = t$ ,  $T_1 = \varepsilon t$ , 分别是快慢时间尺度. 引入偏微分算子  $D_0 = \partial/\partial T_0$ ,  $D_1 = \partial/\partial T_1$ , 则有

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} &= D_0 + \varepsilon D_1 + \dots, \\
 \frac{d^2}{dt^2} &= D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \dots \quad (3)
 \end{aligned}$$

将 (2) 和 (3) 式代入 (1) 式, 比较等式两边  $\varepsilon$  同次幂的系数可得到

$$D_0^2 x_0 + \omega_0^2 x_0 = 0, \quad (4)$$

$$D_0^2 x_1 + \omega_0^2 x_1$$

$$= -2D_0 D_1 x_0 - \beta D_0 x_0$$

$$- h \cos(\Omega t + \gamma u(t)) x_0 - \alpha x_0^3$$

$$+ u x_0(T_0 - \tau, T_1) + v D_0 x_0(T_0 - \tau, T_1). \quad (5)$$

这里讨论系统 (1) 的主参数共振响应的问题, 即  $\Omega \approx 2\omega_0$  时, 系统的响应. 引入调谐参数  $\sigma$ ,  $\Omega = 2\omega_0 + \varepsilon\sigma$ , 则  $\Omega T_0 = 2\omega_0 T_0 + \sigma T_1$ .

设 (4) 式的解为

$$x_0 = A(T_1) \exp(i\omega_0 T_0) + cc, \quad (6)$$

其中  $cc$  为前边各项的共轭. 将 (6) 式代入方程 (5), 并利用  $\Omega T_0 = 2\omega_0 T_0 + \sigma T_1$ , 有

$$D_0^2 x_1 + \omega_0^2 x_1$$

$$= -2i\omega_0 A' \exp(i\omega_0 T_0) - i\beta\omega_0 A \exp(i\omega_0 T_0)$$

$$- \frac{hA}{2} \exp(3i\omega_0 T_0 + i\sigma T_1 + i\gamma u(T_0))$$

$$- \frac{h\bar{A}}{2} \exp(i\omega_0 T_0 + i\sigma T_1 + i\gamma u(T_0))$$

$$- \alpha A^3 \exp(3i\omega_0 T_0) - 3\alpha A^2 \bar{A} \exp(i\omega_0 T_0)$$

$$+ u A \exp(-i\omega_0 \tau) \exp(i\omega_0 T_0)$$

$$+ i v \omega_0 A \exp(-i\omega_0 \tau) \exp(i\omega_0 T_0) + cc. \quad (7)$$

令 (7) 式中久期项系数为零, 可得

$$2i\omega_0 A' + i\beta\omega_0 A + \frac{h\bar{A}}{2} \exp(i\sigma T_1 + i\gamma u(T_0))$$

$$+ 3\alpha A^2 \bar{A} - u A \exp(-i\omega_0 \tau)$$

$$- i\omega_0 v A \exp(-i\omega_0 \tau) = 0. \quad (8)$$

对标准 winner 过程,  $\gamma u(T_0) = \frac{\gamma}{\sqrt{\varepsilon}} u(T_1) = \bar{\gamma} u(T_1)$ .

将  $A$  写成极坐标的形式, 即

$$A(T_1) = a(T_1) \exp(i\varphi(T_1)). \quad (9)$$

将 (9) 式代入 (8) 式, 分离实部和虚部, 并令  $\eta = \sigma T_1 + \bar{\gamma} u(T_1) - 2\varphi(T_1)$  得到

$$\begin{aligned}
 a' &= -\frac{\beta a}{2} - \frac{h a}{4\omega_0} \sin \eta - \frac{u a}{2\omega_0} \sin(\omega_0 \tau) \\
 &+ \frac{v a}{2} \cos(\omega_0 \tau),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a\eta' &= \sigma a - \frac{h a}{2\omega_0} \cos \eta - \frac{3\alpha a^3}{\omega_0} + \frac{u a}{\omega_0} \cos(\omega_0 \tau) \\
 &+ v a \sin(\omega_0 \tau) + a\bar{\gamma} w'(T_1). \quad (10)
 \end{aligned}$$

由此得方程 (1) 的一阶近似解为

$$x = 2a(\varepsilon t) \cos\left(\frac{\Omega t}{2} - \frac{\varphi(\varepsilon t)}{2}\right) + o(\varepsilon), \quad (11)$$

其中  $a$  和  $\eta$  被方程 (10) 所控制.

### 3. 分岔与非零解的稳定性

当  $\gamma = 0$  时, 方程 (10) 化为如下形式:

$$\begin{aligned}
 a' &= -\frac{\beta a}{2} - \frac{h a}{4\omega_0} \sin \eta - \frac{u a}{2\omega_0} \sin(\omega_0 \tau) \\
 &+ \frac{v a}{2} \cos(\omega_0 \tau), \quad (12)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a\eta' &= \sigma a - \frac{h a}{2\omega_0} \cos \eta - \frac{3\alpha a^3}{\omega_0} \\
 &+ \frac{u a}{\omega_0} \cos(\omega_0 \tau) + v a \sin(\omega_0 \tau).
 \end{aligned}$$

其稳态解满足  $a' = 0$ ,  $\eta' = 0$ , 由此可得频率响应方程

$$\begin{aligned}
 & \left(-\beta - \frac{u \sin(\omega_0 \tau)}{\omega_0} + v \cos(\omega_0 \tau)\right)^2 a^2 \\
 & + \left(\sigma - \frac{3\alpha a^2}{\omega_0} + \frac{u}{\omega_0} \cos(\omega_0 \tau) + v \sin(\omega_0 \tau)\right)^2 a^2 = \frac{h^2 a^2}{4\omega_0^2}. \quad (13)
 \end{aligned}$$

显然,  $a = 0$  总是方程 (13) 的解. 由于  $a$  为非负实数, 分岔方程 (13) 在一定的参数范围内有三种可能的解. 除零解外的其他解可由下列方程给出:

$$\frac{9\alpha^2}{\omega_0^2} a^4 - \frac{6\alpha\sigma}{\omega_0} a^2 + \left(\beta^2 + \sigma^2 - \frac{h^2}{4\omega_0^2}\right) = 0, \quad (14)$$

式中  $\beta_e = \beta + \frac{u}{\omega_0} \sin(\omega_0 \tau) - v \cos(\omega_0 \tau)$ ,  $\sigma_e = \sigma + \frac{u}{\omega_0} \cos(\omega_0 \tau) + v \sin(\omega_0 \tau)$ .

对方程(14)的解进行如下讨论:

- 1)  $\beta_e^2 + \sigma_e^2 - \frac{h^2}{4\omega_0^2} = 0, \frac{6\alpha\sigma_e}{\omega_0} \leq 0$  时, 方程(13)存在唯一零解;
- 2)  $\beta_e^2 + \sigma_e^2 - \frac{h^2}{4\omega_0^2} = 0, \frac{6\alpha\sigma_e}{\omega_0} > 0$  时, 方程(13)可能存在两个实数解;
- 3)  $\beta_e^2 + \sigma_e^2 - \frac{h^2}{4\omega_0^2} > 0, \frac{6\alpha\sigma_e}{\omega_0} < 0$  时, 方程(13)存在唯一零解;
- 4)  $\beta_e^2 + \sigma_e^2 - \frac{h^2}{4\omega_0^2} > 0, \frac{6\alpha\sigma_e}{\omega_0} > 0, \frac{9\alpha^2}{\omega_0^2} \left( \frac{h^2}{\omega_0^2} - 4\beta_e^2 \right) > 0$  时, 方程(13)可能存在三个实数解;
- 5)  $\beta_e^2 + \sigma_e^2 - \frac{h^2}{4\omega_0^2} > 0, \frac{6\alpha\sigma_e}{\omega_0} > 0, \frac{9\alpha^2}{\omega_0^2} \left( \frac{h^2}{\omega_0^2} - 4\beta_e^2 \right) = 0$  时, 方程(13)可能存在两个实数解;
- 6)  $\beta_e^2 + \sigma_e^2 - \frac{h^2}{4\omega_0^2} > 0, \frac{6\alpha\sigma_e}{\omega_0} > 0, \frac{9\alpha^2}{\omega_0^2} \left( \frac{h^2}{\omega_0^2} - 4\beta_e^2 \right) < 0$  时, 方程(13)存在唯一零解;
- 7)  $\beta_e^2 + \sigma_e^2 - \frac{h^2}{4\omega_0^2} < 0, \frac{9\alpha^2}{\omega_0^2} \left( \frac{h^2}{\omega_0^2} - 4\beta_e^2 \right) > 0$  时, 方

程(13)可能存在两个实数解.

通过以上分析可见, 系统含有丰富的动力学分岔特性, 并且其分岔性质与调谐参数、时滞、时滞项的系数以及非线性项的强度有关. 因此, 适当的选择这些参数可以改变系统的分岔行为.

这里选择调谐参数  $\sigma$  作为分叉参数, 并对不同的  $\tau$  值来讨论  $\gamma = 0$  时系统的分岔性质. 取  $\beta = 0.5, \omega_0 = 1.0, \alpha = 0.07, h = 1.0, u = 0.5, v = -0.1$  时滞  $\tau$  分别取 3 和 3.5. 根据(13)式画出分岔响应曲线, 如图 1 所示, 随着  $\sigma$  的逐渐增大, 稳态响应  $a$  的变化如曲线  $A_1 A_2 A_3$  所示, 在  $A_2$  即  $\sigma_1$  处, 稳态响应从零变为非零, 因此  $\sigma_1$  是系统的一个分叉点; 在  $\sigma$  从大逐渐减小的过程中, 稳态响应  $a$  的变化如图中  $A_5 A_4 A_3 A_2 A_1$  所示, 在  $A_3$  即  $\sigma_2$  处, 稳态响应  $a$  从  $A_4$  跃迁到  $A_3$ , 因此  $\sigma_2$  也是系统的一个分叉点. 由此可见, 在一定参数范围内系统的稳态响应有三个, 其中最大和最小值是稳定的, 可实现的, 具体实现哪一个由系统的初值决定. 中间值是不稳定的, 跳跃现象在最大和最小值之间发生. 并且对比图 1(a) 和 (b) 可以看出适当地选择时滞参数可以改变系统的分岔响应曲线, 使分岔提前或滞后. 因此, 适当地选择时滞参数可以对系统的分岔行为进行控制. 数值模拟验证了理论结果.

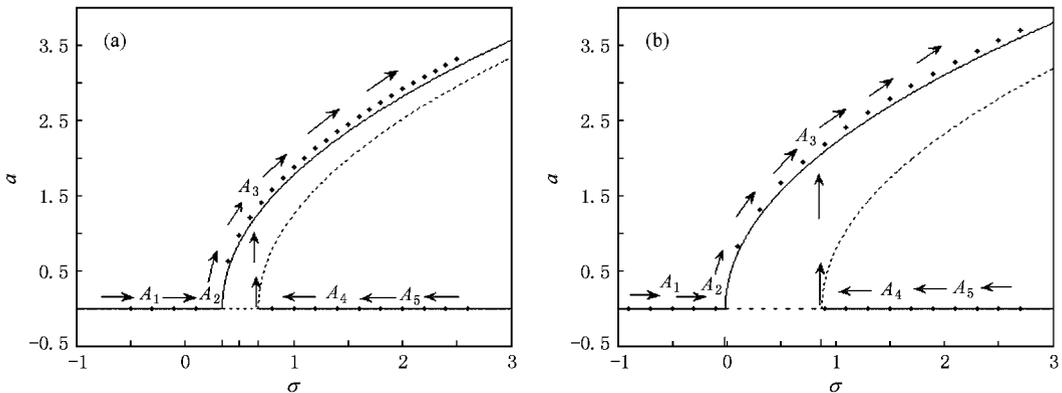


图 1 系统的分岔响应曲线图  $\beta = 0.5, \omega_0 = 1.0, \alpha = 0.07, h = 1.0, u = 0.5, v = -0.1, \gamma = 0$ ; — 稳定解, - - - 不稳定解, \*\*\* 数值解. (a)  $\tau = 3$  (b)  $\tau = 3.5$

下面讨论非零解的稳定性. 方程(12)的非零解所对应的 Jacobi 矩阵的特征方程为

$$\lambda^2 - \frac{h \sin \eta_0}{2\omega_0} \lambda - \frac{3h\alpha a_0^2}{2\omega_0^2} \cos \eta_0 = 0. \quad (15)$$

由 Routh-Hurwitz 准则, 非零解渐进稳定当且仅当下列不等式同时成立:

$$\begin{aligned} & \beta + \frac{u}{\omega_0} \sin(\omega_0 \tau) - v \cos(\omega_0 \tau) > 0; \\ & \frac{3\alpha a_0^2}{\omega_0} \left( \sigma - \frac{3\alpha a_0^2}{\omega_0} + \frac{u \cos(\omega_0 \tau)}{\omega_0} + v \cos(\omega_0 \tau) \right) < 0. \end{aligned} \quad (16)$$

当  $\gamma \neq 0$  为小参数时, 对方程(10)用摄动法求解, 令

$$a = a_0 + a_1, \eta = \eta_0 + \eta_1, \quad (17)$$

其中  $(a_0, \eta_0)$  是 (12) 式的非零稳态解,  $a_1$  和  $\eta_1$  为小扰动项. 将 (17) 式代入 (10) 式, 忽略非线性项, 并写成 Ito 微分方程形式

$$\begin{aligned} da_1 &= -\frac{ha_0\eta_1}{4\omega_0}\cos\eta_0 dT_1, \\ d\eta_1 &= \left(-\frac{6}{\omega_0}\alpha a_0 a_1 + \frac{h}{2\omega_0}\eta_1 \sin\eta_0\right) dT_1 + \bar{\gamma} dw. \end{aligned} \quad (18)$$

对 (18) 式应用矩方法, 解出一阶稳态矩和二阶稳态矩, 并统一用幅值  $a_0$  表示, 有

$$Ea_1 = E\eta_1 = 0; \quad (19)$$

$$\begin{aligned} Ea_1^2 &= -\frac{\omega_0 \bar{\gamma}^2 \left(\sigma_e - \frac{3\alpha a_0^2}{\omega_0}\right)}{24\alpha\beta_e}, \\ E\eta_1^2 &= \frac{\bar{\gamma}^2}{2\beta_e}, Ea_1\eta_1 = 0. \end{aligned} \quad (20)$$

由  $Ea_1^2 \geq 0, E\eta_1^2 \geq 0$  得二阶稳态矩存在的必要条件

$$\frac{\omega_0 \bar{\gamma}^2 \left(\sigma_e - \frac{3\alpha a_0^2}{\omega_0}\right)}{24\alpha\beta_e} \leq \alpha (\beta_e \geq 0). \quad (21)$$

为了分析二阶矩的稳定性, 写出二阶矩所满足

的方程

$$\begin{aligned} \frac{dEa_1^2}{dT_1} &= -\frac{ha_0\cos\eta_0}{2\omega_0} Ea_1\eta_1, \\ \frac{dE\eta_1^2}{dT_1} &= -\frac{h\sin\eta_0}{\omega_0} E\eta_1^2 - \frac{12\alpha a_0}{\omega_0} Ea_1\eta_1 + \bar{\gamma}^2, \\ \frac{dEa_1\eta_1}{dT} &= -\frac{6\alpha a_0}{\omega_0} Ea_1^2 - \frac{ha_0}{4\omega_0}\cos\eta_0 E\eta_1^2 \\ &\quad + \frac{h\sin\eta_0}{2\omega_0} Ea_1\eta_1. \end{aligned} \quad (22)$$

由 (22) 式并利用 Routh-Hurwitz 准则可知二阶矩稳定当且仅当

$$\beta_e > 0; 2\beta_e^2 - 8\alpha a_0^2 \left(\sigma_e - \frac{3\alpha a_0^2}{\omega_0}\right) > 0. \quad (23)$$

同  $\gamma = 0$  时一样, 可以讨论  $\gamma \neq 0$  时系统的分岔性质. 利用 (13) (17) (19) 式, 可得

$$\begin{aligned} Ea &= a_0; \\ Ea^2 &= \frac{\sigma_e \omega_0}{3\alpha} \pm \left(\frac{\sqrt{h^2 - 4\omega_0^2 \beta_e^2}}{6\alpha} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\bar{\gamma}^2 \sqrt{h^2 - 4\omega_0^2 \beta_e^2}}{48\alpha\beta_e}\right). \end{aligned} \quad (24)$$

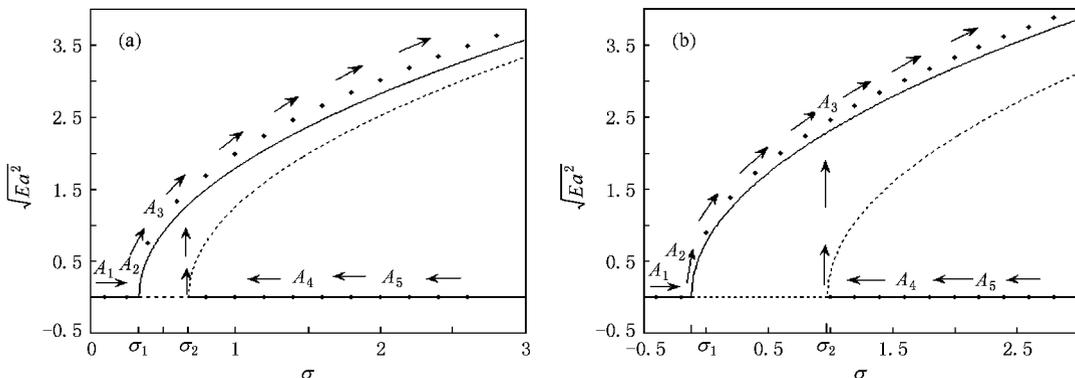


图 2 分岔响应曲线图  $\beta = 0.5, \omega_0 = 1.0, \alpha = 0.07, h = 1.0, u = 0.5, v = -0.1, \gamma = 0.1$ ; —— 稳定解, - - - - 不稳定解, \*\*\* 数值解. (a)  $\tau = 3$  (b)  $\tau = 3.5$

根据 (24) 式, 画出  $\gamma = 0.1$  时系统的分岔响应曲线, 这里以振幅  $a$  的均方响应的平方根  $\sqrt{Ea^2}$  作为一种度量. 如图 2 所示, 当  $\gamma$  较小时, 系统有与  $\gamma = 0$  时同样类型的分岔, 而且在一定的参数范围内, 系统仍然有三个稳态响应, 其中最大值和最小值是稳定的可实现的, 具体实现哪一个由系统的初值决定. 中间值不稳定, 跳跃现象在最大和最小值之间发生. 从图中的数值解也可以看出,  $\gamma$  较小时, 系统的多解现象仍然存在, 跳跃现象仍会发生. 同样对图 2(a) 和 (b) 作比较可以看出, 时滞  $\tau$  的改变使得一个分岔点提

前, 而另一个滞后, 而且由于随机扰动的存在, 使得时滞  $\tau$  对分岔响应的影响更加明显, 即随着时滞  $\tau$  的改变分岔提前或滞后的幅度大大增大. 数值解验证了理论结果.

### 4. 数值模拟

数值模拟, 由于 winner 过程的形式导数是 Gauss 白噪声, 因此可以将其看做独立的变量, 对方程进行扩阶, 然后运用四阶 Runge-Kutta 方法对扩阶后的方

程组进行数值积分. 模拟结果见图 1 和图 2. 这里系统参数取为:  $\beta = 0.5$ ,  $\varepsilon = 0.1$ ,  $\omega_0 = 1$ ,  $\alpha = 0.07$ ,  $u = 0.5$ ,  $v = -0.1$ ,  $h = 1.0$ ,  $\tau = 3$ ,  $\rho = 1.0$ . 可见理论解和数值解吻合得相当好, 而且系统的分岔和跳跃现象在数值模拟中也得到了证实.

## 5. 结 论

对参数激励下带有时滞反馈的随机 Mathieu-Duffing 系统动力学行为进行了研究, 在主参数共振

情形下, 用多尺度方法分离了系统的快慢变量, 分析了系统的分岔性质以及非零解的稳定性, 发现在一定参数范围内, 系统可能有三个解, 其中最大解和最小解是稳定的可实现的, 中间值不稳定, 分岔和跳跃现象将在最大值和最小值之间发生, 而且分岔与调谐参数、时滞、时滞项的系数以及非线性项的强度有关, 适当地选择这些参数可以改变甚至控制系统的分岔行为. 研究还发现在激励带宽较小的情况下, 系统的多解现象仍然存在, 分岔和跳跃现象也仍会发生. 最后的数值模拟很好地验证了理论结果.

- [ 1 ] Hu H Y, Wang Z H 1998 *Int. J. Sound Vib.* **214** 213
- [ 2 ] Liao X F, Chen G R 2001 *Int. J. Bifurcat. Chaos* **11** 2105
- [ 3 ] Xu J, Yu P 2004 *Int. J. Bifurcat. Chaos* **14** 2777
- [ 4 ] Xu J, Chung K W 2003 *Phys. D* **180** 17
- [ 5 ] Hu H Y, Dowell E H, Virgin L N 1998 *Nonlinear Dynam.* **15** 311
- [ 6 ] Hu H Y 1997 *Journal of Vibration Engineering* **10** 273 (in Chinese)  
[ 胡海岩 1997 振动工程学报 **10** 273 ]
- [ 7 ] Qian C Z, Tang J S 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 617 (in Chinese)  
[ 钱长照、唐驾时 2006 物理学报 **55** 617 ]
- [ 8 ] Jin Y F, Xu W, Ma S J, Li W 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 3480 (in Chinese)  
[ 靳燕飞、徐 伟、马少娟、李 伟 2005 物理学报 **54** 3480 ]
- [ 9 ] Ma S J, Xu W, Li W, Jin Y F 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 3508 (in Chinese)  
[ 马少娟、徐 伟、李 伟、靳燕飞 2005 物理学报 **54** 3508 ]
- [ 10 ] Rong H W, Wang X D, Xu W, Meng G, Fang T 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 2557 (in Chinese)  
[ 戎海武、王向东、徐 伟、孟 光、方 同 2005 物理学报 **54** 2557 ]
- [ 11 ] Lei Y M, Xu W 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 5103 (in Chinese)  
[ 雷佑明、徐 伟 2007 物理学报 **56** 5103 ]
- [ 12 ] Sun Z K, Xu W, Yang X L 2006 *Journal of Vibration Engineering* **19** 57 (in Chinese)  
[ 孙中奎、徐 伟、杨晓丽 2006 振动工程学报 **19** 57 ]
- [ 13 ] Luo A C J 2004 *Int. J. Sound Vib.* **473** 653
- [ 14 ] Rong H W, Xu W, Wang X D, Meng G, Fang T 2003 *Int. J. Non-Linear Mech.* **38** 609

# Response to bounded noise excitation of stochastic Mathieu-Duffing system with time delay state feedback<sup>\*</sup>

Xing Zhen-Ci<sup>1)</sup> Xu Wei<sup>1)†</sup> Rong Hai-Wu<sup>2)</sup> Wang Bao-Yan<sup>1)</sup>

<sup>1</sup> *Department of Applied Mathematics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China*

<sup>2</sup> *Department of Mathematics, Foshan University, Foshan 528000, China*

( Received 30 May 2008 ; revised manuscript received 19 August 2008 )

## Abstract

We investigate the principal parametric resonance of Mathieu-Duffing Equation under a narrow-band random excitation with time delay feedback. The method of multiple scales is used to determine the equations of modulation of amplitude and phase. The bifurcation of the system is discussed. We find that the bifurcation can be influenced by the detuning parameter, time delay, and the intensity of the non-linear term, and an appropriate choice of these parameters can change the response of bifurcation. In addition the stability of nontrivial solution is studied. The nontrivial solution of necessary and sufficient condition for stability is obtained. Moreover, we find that when the bandwidth of the random excitation is smaller, the multi-solution phenomenon still exists, and bifurcation and jumping phenomenon will occur. Theoretical analysis is verified by numerical results.

**Keywords** : stochastic Mathieu-Duffing system, multiple scales, stability, bifurcation

**PACC** : 0547, 0545

<sup>\*</sup> Project supported by the National Natural Science Foundation of China ( Grant No. 10872165 ).

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail : weixu@nwpu.edu.cn